Université Pierre et Marie Curie | LM367
Licence de Mathématiques L3 | 2011-2012

TD 4
Fonctions analytiques, logarithmes, connexité

Le principe du maximum pour les fonctions analytiques

Exercice 1. Soit $p > 1$ un entier et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (\star) & a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0\,. \\ (\star\star) & |f(z)| \leq 1 \text{ pour tout } z \in D(0,1)\,. \end{array}$$

1. Montrer que f vérifie les deux propriétés suivantes :
  (a) $|f^{(p)}(0)| \leq p!$.
  (b) $|f(z)| \leq |z|^p$.

2. Déterminer f si de plus $|f(z)| = |z|^p$ pour au moins un $z \neq 0$, ou si $|f^{(p)}(0)| = p!$.

Exercice 2. Soit Ω l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par

$$\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C}\,;\, |y| < 1\,, x > 0\}\,.$$

On note $\bar{\Omega}$ son adherence et $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ sa frontière.

Soit $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\bar{\Omega}$ analytique sur Ω. On suppose que :

$$\begin{array}{ll} (\star) & |f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \partial\Omega\,. \\ (\star\star) & \exists\, C > 0,\ \exists\, a \in]0, \pi/2[\text{ tels que } |f(z)| \leq C \exp\left(e^{ax}\right) \quad \forall z = x + iy \in \bar{\Omega}\,. \end{array}$$

1. Soit b un nombre réel tel que $a < b < \pi/2$. Le nombre b étant fixé, on considère pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction auxiliaire

$$f_\varepsilon(z) = f(z)\, \exp\left(-\varepsilon e^{bz}\right).$$

Montrer que pour tout ε fixé, $f_\varepsilon(x + iy)$ tends vers zéro uniformément en y quand x tends vers $+\infty$.

2. En considérant un rectangle convenable, dont on fera tendre un des côtés vers l'infini, en déduire que

$$|f_\varepsilon(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \Omega\,.$$

3. Montrer finalement que

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \Omega\,.$$

Logarithme et exponentielle complexes

Exercice 3. Donner des déterminations du logarithmes sur les ouverts suivants :

a) les disques $D(1,1)$ et $D(2,2)$

b) de manière générale sur $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}^*$

c) sur U_θ : le plan complexe privé de la demi-droite d'origine 0 faisant un angle θ avec l'horizontale

Exercice 4. Soit l une détermination du logarithme sur un ouvert Ω. Parmi ces propriétés, lesquelles sont vraies :

a) $\forall z \in \Omega, \exp(l(z)) = z$

b) $\forall z \, | e^z \in \Omega, l(\exp(z)) = z$

c) $\forall (a,b) \in \Omega^2, l(ab) = l(a) + l(b)$

d) $\forall (a,b) \in \Omega^2, l(a+b) = l(a)l(b)$

e) $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \exp(ab) = \exp(a) + \exp(b)$

f) $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$

Exercice 5. Montrer qu'il existe une détermination f du logarithme dans

$$\mathbb{C} \backslash \{z \mid Re(z) = 0 \ , \ Im(z) \leq 0\}$$

telle que $f(1) = 0$. Calculer $f(i), f(-1), f(-2), f(2-3i)$

Exercice 6. On définit les fonctions

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n + C_1 \quad \text{sur} \quad U_1 = D(1,1) \\ f_2(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z+1)^n + C_2 \quad \text{sur} \quad U_2 = D(-1,1) \end{aligned}$$

Tracer U_1 et U_2. Quelles valeurs des constantes C_1 et C_2 peut-on choisir pour qu'il existe une détermination du logarithme sur un ouvert contenant U_1 et U_2 coïncidant avec f_1 sur U_1 et avec f_2 sur U_2 ?

Exercice 7. Déterminer une fonction continue (analytique) définie sur

$$U = \mathbb{C} \backslash \{z \mid Re(z) \leq -1 \text{ ou } Re(z) \geq 1\}$$

et telle que $f(0) = i$ et $(f(z))^2 = z^2 - 1 \ \forall z \in U$

Exercice 8. La surface de Riemann du logarithme

1. Calculer $\int_{S^1} \frac{dz}{z}$, où $S^1 = \{e^{it} \, ; \, t \in [0, 2\pi[\}$.

2. En déduire que $\frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive globalement définie dans $\mathbb{C}^*$.

3. On considère le sous-ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$

$$\tilde{L} = \left\{ (z, \theta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R} \, ; \, \frac{z}{|z|} = e^{i\theta} \right\}$$

appelé surface de Riemann du logarithme. Dessiner $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^3$. (voir 1)

4. On considère la projection $p : \tilde{L} \to \mathbb{C}^*$, donnée par $p(z, \theta) = z$. Dessiner p.

5. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\log} : \tilde{L} & \to & \mathbb{C} \\ (z, \theta) & \mapsto & \log |z| + i\theta \end{array}$$

est bijective.

6. On considère l'application exponentielle $e : \mathbb{C} \to C$. Montrer que $\tilde{\log}$ est presque une inverse a droite de e, i.e. :

$$(e \circ \tilde{\log})(z, \theta) = z$$

pour tout $(z, \theta) \in \tilde{L}$.

Un peu de connexité

Exercice 9. Déterminer les parties connexes des deux ensembles ci-dessus :

$$U = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) \neq \mathrm{Im}(z)\} \quad \text{et} \quad V = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2\,;\, z \neq w\}$$

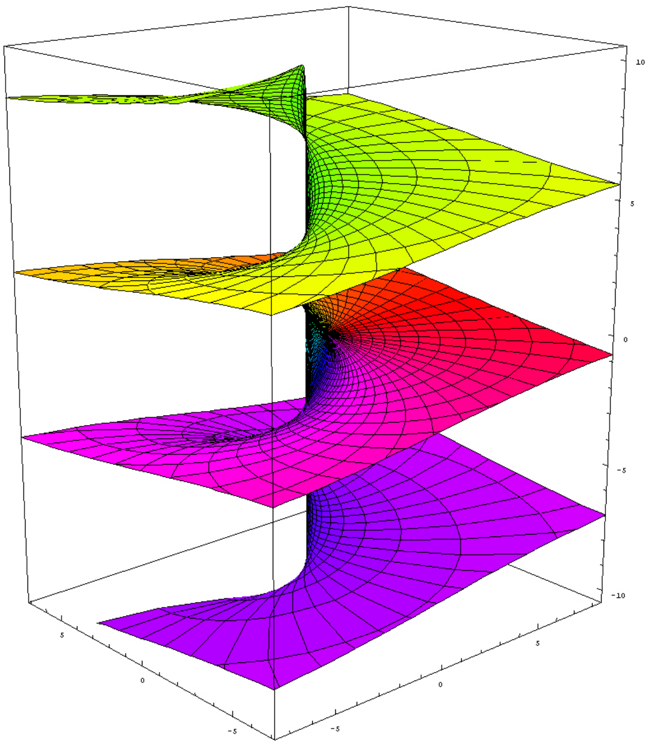

FIGURE 1 – La surface de Riemann du logarithme