

TD 5

Intégrales de Cauchy

Exercice 1.

1. Calculer $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$, où Γ est le chemin joignant $1 + i$ à $2 + 4i$ le long d'une parabole.
2. Calculer $\int_C (z^2 + 3z) dz$ où C est l'arc du cercle de rayon 2 qui va de $2i$ à 2.
3. Sur l'ellipse $\gamma(t) = a \cos(t) + ib \sin(t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ calculer $\int_{\gamma} |z|^2 dz$

Exercice 2. Soit C l'arc de courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ joignant les points $(1, 1)$ et $(2, 3)$. Trouver la valeur de

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz.$$

Exercice 3. Soit Γ le carré de sommets $0, 1, 1 + i$ et i . Calculer

$$\int_{\partial\Gamma} \operatorname{Ré}(z) dz$$

Le résultat est-il surprenant ?

Exercice 4. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$ n'a pas de primitive dans l'ouvert

$$u = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - 1| < 1\}$$

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur un ouvert U convexe de \mathbb{C} , telle que pour toute courbe fermée simple \mathcal{C} dans U , l'intégrale curviligne

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0.$$

Montrer que f est holomorphe sur U . Il s'agit d'une version faible du théorème de Morera.