TD 6
Formules de Cauchy

Formule de Cauchy

Exercice 1. Soit C_R le cercle de centre 0 et rayon R et $w \in \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{w^2 + z^2}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad R < |w| \\ -\frac{2\pi}{w} \sinh(w) & \text{si} \quad R > |w|\,. \end{cases}$$

Exercice 2. On considère une fonction f analytique dans une couronne ouverte A limitée par deux cercles concentriques C_1 et C_2, et sur sa frontière ∂A. Montrer que pour $z_0 \in A$, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $D(0,1)$ et $\mathbb{C}$-dérivable en 0. Montrer que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \int_{C(0,r)} f(z) dz = 0$$

Calcul d'intégrales

Exercice 4.

a) Jusitifier que la fonction $z \mapsto \frac{Log(1-z)}{z}$ est holomorphe sur $D(0,1)$

b) En utilisant une intégrale de Cauchy adéquate, montrer que pour tout $r \in (0,1)$

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos t + r^2)\, dt = 0\,.$$

Exercice 5. Soit γ_R le lacet constitué du segment allant de A d'affixe 0 à B d'affixe R, suivi de l'arc de cercle d'angle $\pi/4$ et de rayon R allant de B à C et complété par le segment CA. Vérifier que $\int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz = 0$. Que vaut la limite lorsque $r \to +\infty$ des intégrales sur les segments BC et CA ? En déduire l'existence des intégrales suivantes et leur valeur :

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Formules de Cauchy

Rappel (voir fin du chapitre 3) Une fois que l'on a montré que les fonctions holomorphes sont analytiques, on peut généraliser la formule de Cauchy pour obtenir l'expression des coefficients successifs du développement de Taylor de f en fonction d'une intégrale.

Exercice 6. Soit f une fonction analytique sur un ouvert convexe U et $a \in U$.

a) Montrer que si $D(a,r) \in U$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$$

b) En déduire les inégalités de Cauchy : si $M = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$ alors

$$f^{(n)}(a) \leq \frac{Mn!}{r^n}$$

c) En déduire que si f est une fonction entière vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq C(1+|z|)^p$$

pour un certain réel C et un entier p, alors f est un polynôme de degré au plus p.

Exercice 7.

a) Calculer $I_n = \int_{C(0,\frac{1}{2})} \frac{dz}{z^n(1+z)(2-z)}$

b) Calculer pour $n = 0, 1, 2$ la valeur de $k_n = \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^n(e^z-1)}$

Le théorème de Liouville

Exercice 8. Soit f une fonction entière et bornée. Soient a et b quelconques. Pour $R \geq max(|a|,|b|)$, calculer la valeur de

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$$

Que vaut la limite quand $R \to +\infty$ de cette intégrale ? En déduire qu'une fonction entière bornée est constante.

Le théorème de Morera

Exercice 9. Soit f une fonction continue sur un ouvert convexe U de $\mathbb{C}$, telle que pour tout triangle ABC contenu dans U l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0\,.$$

où $\int_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{[\mathcal{A},\mathcal{B}]} f(z)\,dz + \int_{[\mathcal{B},\mathcal{C}]} f(z)\,dz + \int_{[\mathcal{C},\mathcal{A}]} f(z)\,dz$
Montrer que f est holomorphe sur U. Il s'agit d'une version faible du théorème de Morera.

Indication : On considèrera la fonction $F(z) = \int_{[a,a+z]} f(w)\,dw$