Université Pierre et Marie Curie — LM367
Licence de Mathématiques L3 — 2011-2012

TD 7

Suites et séries de fonctions holomorphes, Intégrales à paramètres

Exercice 1. Convergence uniforme I.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions entières. On suppose qu'elle converge uniformément sur le cercle unité $\partial D(0,1)$ vers une fonction $g : \partial D(0,1) \to \mathbb{C}$.

a) Calculer $\int_{\partial D(0,1)} g(z)\,dz$.

b) Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'est pas, sur le cercle unité, la limite uniforme d'une suite de fonctions entières.

Exercice 2. Convergence uniforme II.
Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f(z^n)$ converge uniformément sur les compacts de $D(0,1)$ vers une fonction holomorphe g et calculer ses coefficients de Taylors.

Exercice 3. Transformée de Fourier.
Soit f une fonction continue à support compact et $\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-izx}\,dx$ sa transformée de Fourier. Montrer que $\hat{f}$ est une fonction holomorphe. Que dire d'une fonction continue à support compact dont la transformée de Fourier est à support compact ?

Exercice 4. Deux fonctions classiques.

On va justifier que les fonctions suivantes définissent des fonctions holomorphes dans des domaines que l'on précisera :

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \qquad \text{et} \qquad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt\,.$$

a) Trouver un domaine sur lequel ζ est holomorphe.

b) Montrer que Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Ré}(z) > 0\}$

c) Montrer que pour tout z tel que $\text{Ré}(z) > 0$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En déduire que Γ se prolonge analytiquement en une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Ré}(z) > -1\}\backslash\{0\}$

d) Par récurrence, prolonger Γ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble discret que l'on précisera.

Regarder sur la figure 1 une tracé du module de la fonction Γ sur le plan complexe.

Exercice 5. Une intégrale à paramètre
On note $[t]$ la partie entière de $t \in \mathbb{R}$ et ζ la fonction zeta de Riemann.

a) Montrer que l'intégrale à paramètre

$$G(z) = \int_1^{\infty} \frac{([t]-t)}{t^{z+1}}\,dt\,,$$

définit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}\,;\, Re(z) > 0\}$.

b) Pour $n \geq 1$ calculer

$$I_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{1}{t^z}\, dt\,.$$

c) Montrer que

$$\int_n^{n+1} \frac{([t]-t)}{t^{z+1}}\, dt = nI_n(z+1) - I_n(z)\,,$$

et en déduire que sur $\{z \in \mathbb{C}\,;\, Re(z) > 1\}$

$$\zeta(z) = zG(z) + \frac{1}{z-1} + 1\,.$$

Exercice 6. *

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$. On suppose que la suite f_n est uniformément bornée et qu'elle converge simplement vers $f \in C^0(\Omega)$. On considère K un compact de Ω.

a) Montrer que f est holomorphe sur Ω.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $z_0 \in K$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$, il existe N tel que

$$\|f_n(z) - f_m(z)\|_{D(z_0, r/2)} \leq \varepsilon$$

pour tout $n, m \geq N$.

c) En déduire que f_n converge uniformément vers f sur K.

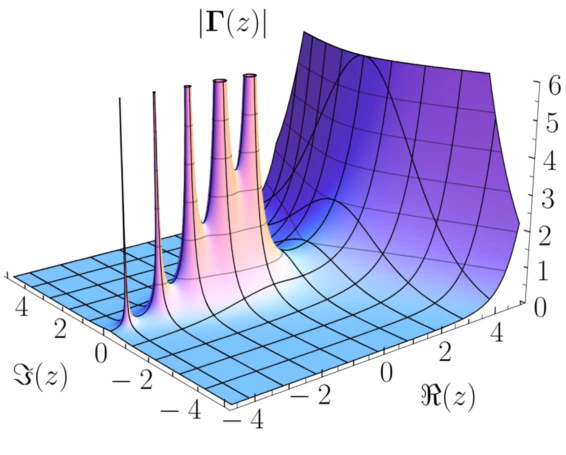

Figure 1 – Module de la fonction gamma sur le plan complexe.