TD 8

Grands théorèmes de l'analyse complexe, Singularités

Les grands théorèmes

Exercice 1. Donner une démonstration (courte) du théorème de d'Alembert-Gauss.

Exercice 2. Que dire d'une fonction holomorphe vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z+1) = f(z+i) = f(z)$$

Que dire plus généralement d'une fonction holomorphe et bi-périodique, c'est-à-dire telle qu'il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{C}$ non proportionnels tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z+T_1) = f(z+T_2) = f(z)$$

Exercice 3. [Examen 2010] On note $Arg : \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0] \to]-\pi, \pi[$ la fonction argument principale. Soit $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

a) Soit f une fonction holomorphe sur H et continue sur $\bar{H}$ telle que $\lim_{|z|\to\infty, z\in\bar{H}} f(z) = 0$. Montrer qu'alors
$$\sup_{z\in\bar{H}} |f(z)| = \max_{z\in\partial H} |f(z)|$$

b) Soit $0 \leq \gamma < 1$. On note $g_\gamma(z) = e^{\gamma \mathrm{Log}(z)}$ la détermination principale de la puissance γ, définie sur H. Justifier qu'on peut la prolonger par continuité sur $\bar{H}$. Pour $z \in \bar{H}$, majorer $|e^{-z^\gamma}|$ en fonction de γ et de $|z|$.

c) Soit f une fonction holomorphe sur H et continue sur $\bar{H}$. On suppose que $|f|$ est majorée par une constante M sur ∂H et qu'il existe une constante C telle que $\forall z \in \bar{H}$, on ait :
$$|f(z)| \leq Ce^{|z|^\beta}$$
avec $\beta < 1$. Montrer que f est bornée sur H et que :
$$\sup_{z\in\bar{H}} |f(z)| = \max_{z\in\partial H} |f(z)|$$
Indication : On appliquera la seconde question à la fonction $z \mapsto F_\epsilon(z) = f(z)e^{-\epsilon z^\gamma}$ pour un nombre γ tel que $\beta < \gamma < 1$.

Exercice 4. [Examen 2011] On considère un ouvert connexe borné D de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur D, continue sur $\bar{D}$. On suppose que $|f|$ est constante sur ∂D. Montrer que soit f admet un zéro dans D, soit f est constante.
Indication : Si f ne s'annule pas, on pourra appliquer le principe du maximum à f et $\frac{1}{f}$.

Singularités

Rappel : Une fonction holomorphe sur un ouvert U privé d'un point a (on parle de "voisinage épointé" de a) peut avoir plusieurs comportements en a : soit elle est holomorphe en a et a est une **singularité effacable**, soit a est un **pôle**, soit a est une **singularité essentielle**. Dans le cas où f est holomorphe sur un ouvert U privé d'un ensemble discret de points qui sont des pôles, on parle de **fonction méromorphe sur U**. En particulier, une fonction méromorphe a un nombre fini de pôles dans un compact.

Exercice 5.

a) Quelles sont les singularités de la fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$?

b) Quel type de singularité en 0 possède la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

c) Pour tout $A \in \mathbb{C}$ montrer qu'il existe une suite z_n telle que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A$ (on construira explicitement la suite)

d) Justifier que pour la fonction f ci-dessus on constate un résultat plus fort que le théorème de Casorati-Weierstrass : sur tout voisinage $D(0,r)$ de 0, la fonction f prend toutes les valeurs de $\mathbb{C}$, sauf peut-être une.

Exercice 6. [Examen 2011] Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert borné U. On suppose que

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \subset U \text{ compact tel que } \; z \in U \backslash K \Rightarrow |f(z)| < \epsilon$$

a) Montrer que f n'a qu'un nombre fini de pôles dans U.

b) En déduire que f est identiquement nulle dans U (trouver une fonction holomorphe bornée P dans U telle que $P \times f$ soit holomorphe sur U et appliquer le principe du maximum).

c) Donner un contre-exemple lorsque $U = \mathbb{C}$.

Exercice 7. [Examen 2010] Soient f et g deux fonctions entières telles que

$$\forall z \in \mathbb{C} \; |f(z)| \leq |g(z)|.$$

Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = cg(z)$.