

## Dénombrement et calcul des probabilités.

1. Une ligne brisée reliant deux points  $A(n, N)$  et  $B(m, M)$  du plan est appelée chemin entre  $A$  et  $B$  : à chaque point du chemin, on passe au point suivant en augmentant l'abscisse de 1 et en augmentant l'ordonnée de 1 (montée) ou en la diminuant de 1 (descente).

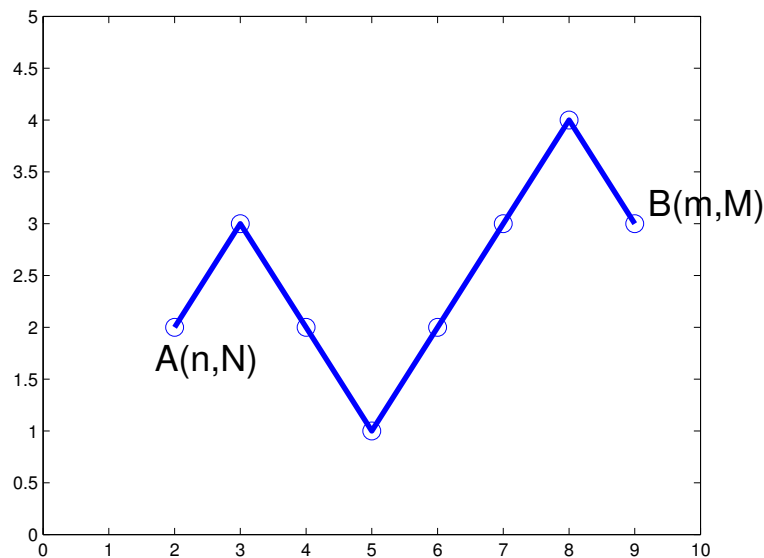


FIGURE 1 – Un chemin

### Compter les chemins

- Dans un chemin entre  $A(n, N)$  et  $B(m, M)$  quel est le nombre de montées? De descentes? Quelles sont les conditions sur  $n, N, m$  et  $M$  pour qu'un tel chemin existe?
- Déterminer  $\mathcal{N}((n, N); (m, M))$ , le nombre de chemins entre les points de coordonnées  $(n, N)$  et  $(m, M)$ .
- Déterminer  $\mathcal{N}_0((n, N); (m, M))$ , le nombre de chemins entre les points de coordonnées  $(n, N)$  et  $(m, M)$  ne croisant pas l'axe des abscisses.  
(indication : on cherchera un lien entre de tels chemins et des chemins partant de  $(n, -N)$ )

**La ruine du joueur** Un joueur qui possède une fortune initiale  $G_0 = N$  euros joue contre le casino à un jeu de hasard (de votre choix). Le jeu est constitué de tours indépendants où le joueur gagne un euro avec probabilité  $p$  et perd un euro avec probabilité  $1 - p$ . On note  $G_n$  la fortune du joueur au bout de la partie  $n$ . On considère que le joueur peut 'emprunter' à la banque et avoir une fortune négative au cours du jeu.

- a) Le joueur joue une partie de  $m$  tours. Comment représenter graphiquement une telle partie ?
- b) Calculer  $\mathbb{P}(G_m = M | G_0 = N)$ , la probabilité pour que le joueur ayant une fortune initiale de  $N$  euros possède  $M$  euros au bout de  $m$  tours.
- c) Soit  $k \leq m$ . Quelle est la probabilité que le joueur emprunte pour la première fois à la banque à l'instant  $k$  ?

**Le théorème du scrutin** Aux dernières élections dans votre commune de naissance, le candidat  $A$  a obtenu  $p$  voix contre  $q < p$  voix pour le candidat  $B$ . Quelle est la probabilité que le candidat  $A$  ait été en tête tout au long du dépouillement dans cette commune ? (en admettant que l'ordre d'arrivée des voix est équiprobable)

*Indication : Comment représenter un dépouillement comme un chemin ?*