Université Pierre et Marie Curie 2013-2014
Probabilités élémentaires - LM345

Encore des calculs de probabilités...

1. Produits défectueux Un magasin vend des ordinateurs fabriqués par trois constructeurs différents. La constructeur A a un taux de produits défectueux de 10%, le constructeur B un taux de 5% et le constructeur C un taux de 15%. Le magasin dispose dans son stock de 2 fois plus d'ordinateurs de marque B que de marque C et de 3 fois plus d'ordinateurs de marque A que de marque C. On choisit au hasard un ordinateur dans le stock du magasin. Sachant que l'ordinateur choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par A ? Par B ? Par C ?

Solution de l'exercice 1. On tire un ordinateur au hasard et on note :

- A l'événement "l'ordinateur a été fabriqué par le constructeur A"
- B l'événement "l'ordinateur a été fabriqué par le constructeur B"
- C l'événement "l'ordinateur a été fabriqué par le constructeur C"
- D l'événement "l'ordinateur est défectueux"

Notons x le nombre d'ordinateurs de la marque C dans le stock du magasin. Elle dispose donc de $2x$ ordinateurs de la marque B, de $3x$ ordinateurs de la marque A, et de $6x$ ordinateurs au total. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3x}{6x} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}.$$

Les événements A, B et C forment de plus une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que l'ordinateur choisi soit défectueux est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(D \cap B) + \mathbb{P}(D \cap C) \\ &= \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C) \end{aligned}$$

Et on a d'après l'énoncé

$$\mathbb{P}(D|A) = 0.1 \quad \mathbb{P}(D|B) = 0.05 \quad \mathbb{P}(D|C) = 0.15.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|D) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|C)\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{0.1 * 0.5}{0.1 * 0.5 + 0.05 * 1/3 + 0.15 * 1/6} = 0.5455 \end{aligned}$$

On trouve de même $\mathbb{P}(B|D) = 0.1818$ et $\mathbb{P}(C|D) = 0.2727$. ($\mathbb{P}(D) = 0.09$).

2. Texas Hold'em Une variante du jeu de poker se joue de la manière suivante, avec un jeu de 52 cartes. Chaque joueur possède un main de 2 cartes (qu'il garde cachée des autres joueurs). Ensuite des cartes sont révélées, par phase, et posée sur la table :

- d'abord 3 cartes (le flop)
- puis une carte supplémentaire (le turn)
- et une dernière carte (la river)

L'objectif de chaque joueur est de former la meilleure main de 5 cartes possible à l'aide des cartes visibles sur la table et des cartes de sa main. Dans cet exercice, on se restreindra pour simplifier aux annonces suivantes (triées par ordre croissante de valeur) :

- paire : deux cartes de la même hauteur
- double paire : deux paires
- brelan : trois cartes de la même hauteur
- carré : quatre cartes de la même hauteur

a) Un joueur possède la main (2,2). Quelle est la probabilité que ce joueur obtienne un brelan (ou un carré) à la fin de la partie ? Qu'il l'obtienne au flop ? Qu'il l'obtienne au turn sachant qu'il ne l'avait pas au flop ? En déduire la probabilité de l'obtenir au turn.

b) Le joueur A possède la main (2,2) et le joueur B possède la main (Roi,As). Quelle est la probabilité que A obtienne un brelan (ou un carré) en fin de partie ? Quelle est la probabilité qu'en fin de partie B puisse former une paire avec son Roi ou son As ?

c) Quelle est la probabilité que B gagne contre A ?

Solution de l'exercice 2.

a) L'expérience aléatoire est la révélation des 5 cartes de la table. Il reste 50 cartes dans le jeu (en otant la main du joueur) donc seulement 2 deux. L'espace probabilisé associé est donc :
   - Ω l'ensemble des combinaisons de 5 cartes parmi les 50 cartes restantes ($\Omega = \binom{5}{50}$)
   - $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
   - $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité : toutes les combinaisons de 5 cartes ont la même probabilité d'apparaître sur la table

Probabilité d'avoir un carré ou un brelan à la fin de la partie

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{A obtient un brelan ou un carré}) &= \mathbb{P}(\text{il y a au moins un 2 sur la table}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{il n'y a aucun 2 sur la table}) \\ &= 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{50}{5}} = 1 - \frac{45 \times 44}{49 \times 50} = 0.1918\end{aligned}$$

(choisir une main sans deux revient à choisir les 5 cartes de la table parmi les 48 cartes qui ne sont pas des deux)

Probabilité d'avoir un carré ou un brelan au flop

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{A obtient un brelan ou un carré au flop})\\
&= \mathbb{P}(\text{il y a au moins un 2 parmi les trois premières cartes de la table})\\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{il n'y a aucun 2 parmi les trois premières cartes sur la table})\\
&= 1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{50}{3}} = 1 - \frac{47 \times 46}{49 \times 50} = 0.1176
\end{aligned}$$

(pour calculer la probabilité, il est plus facile de considérer l'expérience aléatoire où on tire les 3 premières cartes seulement, ce qui réduit l'univers des possible)
On a par ailleurs

$$\mathbb{P}(\text{avoir brelan au turn}|\text{on ne l'a pas au flop}) = \frac{2}{47}$$

(il reste 47 cartes après le flop parmi lesquelles deux sont des 2)
La probabilité d'avoir un brelan au turn est donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{avoir brelan au turn})\\
&= \mathbb{P}(\text{avoir un brelan au flop}) + \mathbb{P}(\text{avoir un brelan au turn et pas au flop})\\
&= \mathbb{P}(\text{avoir un brelan au flop}) +\\
&\qquad \mathbb{P}(\text{avoir un brelan au turn}|\text{on ne l'a pas au flop}) \times \mathbb{P}(\text{pas de brelan au flop})\\
&= 1 - \frac{47 \times 46}{49 \times 50} + \frac{2}{47} \times \frac{47 \times 46}{49 \times 50} = 1 - \frac{46 \times 45}{50 \times 49} = 0.1551
\end{aligned}$$

b) Si on connait la main du joueur A et celle du joueur B, l'expérience aléatoire (et le Ω associé) changent. En effet, les cartes restantes du paquet sont désormais au nombre de 48 dont seulement 2 deux, 3 as et 3 rois, et l'expérience aléatoire est donc le tirage de 5 cartes parmi ces 48 cartes. La probabilité que A obtienne un brelan en fin de partie est légèrement modifiée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{A obtient un brelan ou un carré}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{il n'y a aucun 2 sur la table})\\
&= 1 - \frac{\binom{46}{5}}{\binom{48}{5}} = 1 - \frac{43 \times 42}{48 \times 47} = 0.1995
\end{aligned}$$

(la probabilité augmente subtilement, ce qui se comprend car la main du joueur B retire deux cartes du paquet qui ne sont pas des deux, ce qui rend l'apparition d'un deux légèrement plus probable)

Probablité que B obtienne au moins une paire avec son roi ou son as

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{B obtient au moins une paire}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{il n'y a ni roi, ni as sur la table})\\
&= 1 - \frac{\binom{42}{5}}{\binom{48}{5}} = 1 - \frac{42! \times 43!}{48! \times 37!} = 0.5032
\end{aligned}$$

En effet, un tirage sans roi ni as revient à choisir les 5 cartes du tirages parmi les cartes restantes qui ne sont ni des rois ni des as, et il y en a $48-3(\text{rois})-3(\text{as}) = 42$. On note que B a tout de même plus d'une chance sur deux de former une paire intéressante (ou mieux, car ici on inclut aussi la probabilité d'avoir un brelan ou un carré d'As)

c) Si B obtient une paire avec son roi ou son as et que A n'obtient pas un brelan, B gagne la partie. Notant :
   - A l'événement "'A obtient un brelan"'
   - B l'événement "'B obtient au moins une paire"'

   Les autres situations qui mènent à la victoire de B sont celles où A obtient un brelan ou un carré de 2 et où B obtient une annonce supérieure (brelan ou carré) formé d'As ou de Rois. Cet événement étant beaucoup plus rare, on va approximer la probabilité de victoire de B par $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.
   Or remarque d'abord qu'il est plus facile de calculer $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$. En effet, cela revient à compter les tirages où il n'y a ni deux, ni as, ni rois :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{\binom{40}{5}}{\binom{48}{5}} = \frac{40! \times 43!}{48! \times 35!} = 0.3843$$

   (il y a 40 cartes restantes qui ne sont ni des deux, ni des rois, ni des as).
   Or on a par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$$

   Et donc la probabilité que l'on cherche à calculer peut s'écrire

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0.1995 - 0.3843 = 0.4159$$

   Et si on suppose A et B indépendants Les événements A et B ne sont pas indépendants : on comprend bien par exemple que le fait de savoir qu'il n'y a pas de deux augmente légèrement la probabilité qu'il y ait un roi ou un as. On peut remarquer toutefois que dans ce cas particulier, on n'aurait pas perdu grand chose à considérer A et B comme étant indépendants :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = (1 - 0.1995) \times 0.5032 = 0.4028$$