

## Calculs d'espérance : un jeu d'enfants

**1.** (*CC 2012*) Trois bébés jouent à un jeu d'éveil constitué d'une boîte munie d'une serrure et d'un trousseau de quatre clés dont une seule ouvre la boîte.

- Camille est la plus petite : à chaque tentative elle essaye une clé au hasard
- Arthur est le plus concentré : il procède avec méthode, en éliminant successivement les clés qui ne marchent pas
- Sonia, un peu étourdie, ne tient compte à chaque essai que de l'échec immédiatement précédent

- a) Déterminer la loi de  $X$  (respectivement  $Y$ ,  $Z$ ), le nombre d'essais nécessaires à Camille (respectivement Arthur, Sonia) pour ouvrir la boîte.
- b) Quel est le nombre moyen d'essais effectués par chacun ?

**2. Variables continues** Soit  $X$  une variable aléatoire. Déterminer pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  la variable  $e^{\lambda X}$  est intégrable et calculer  $\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$  dans chacun des cas suivants :

- a)  $X$  suit la loi uniforme sur un intervalle  $[a, b]$ ,
- b)  $X$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\theta > 0$ ,
- c)  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**3. Variables discrètes** (*Examen 2012*) Soit  $X$  et  $Y$  deux variables indépendantes à valeur dans  $\mathbb{N}$  de lois respectives Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  et Poisson de paramètre  $\mu > 0$ .

- a) Rappeler l'expression de  $\mathbb{P}(X = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$
- b) Rappeler l'expression de la fonction génératrice de la loi de Poisson, i.e.  $g_X(s) := \mathbb{E}(s^X)$ ,  $s \in [0, 1]$ .
- c) Donner la loi de  $X + Y$ . Justifier votre réponse.
- d) Soit  $N$  une variable de loi géométrique de paramètre  $p$ . Rappeler sa distribution et sa fonction génératrice.
- e) Donner la fonction génératrice de  $Z := \sum_{i=1}^N X_i$  où les  $X_i$  sont des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .