Université Pierre et Marie Curie 2013-2014
Probabilités et statistiques - LM345

Vecteurs aléatoires (la suite du CC de l'an dernier)

1. On considère le couple de variables alétoires (X, Y) possédant la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = cxe^{-x(2+y)}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

pour un certaine constante $c > 0$.

a) Pour quelle valeur de c la fonction f définit-elle une densité ?

b) Déterminer la loi de X et la loi de XY.

Solution de l'exercice 1. Le couple (X, Y) possède la densité suivante par rapport à le mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = cxe^{-x(2+y)}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

a) f définit une densité ssi $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = 1$. D'après Fubini ($f(x,y)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^2$), on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy &= c\int_0^\infty xe^{-2x}\int_0^\infty e^{-xy}dydx = c\int_0^\infty xe^{-2x}\left[-\frac{e^{-xy}}{x}\right]_{y=0}^{y=\infty}dx \\
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy &= c\int_0^\infty e^{-2x}dx = \frac{c}{2}
\end{aligned}$$

Donc f définit une densité ssi $c = 2$.

b) Comme le couple (X, Y) possède une densité, la marginale X possède une densité qui est l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la densité jointe :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$$

On a donc

$$f_X(x) = 2xe^{-2x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\int_0^\infty e^{-xy}dy = 2e^{-2x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

On reconnait la densité d'une loi exponentielle de paramètre 2, donc $X \sim \mathcal{E}(2)$.

Soit g une fonction continue bornée. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(XY)] &= \int_{\mathbb{R}^2} g(xy)f(x,y)dxdy \\
&= \int_0^\infty 2xe^{-2x}\int_0^\infty g(xy)e^{-xy}dydx = \int_0^\infty 2xe^{-2x}\int_0^\infty g(u)e^{-u}\frac{du}{x}dx
\end{aligned}$$

Où on a fait le changement de variable $u = xy$ ($du = xdy$) dans l'intégrale en y (càd à x fixé). On a donc, en appliquant le théorème de Fubini

$$\mathbb{E}[g(XY)] = \int_0^\infty g(u)e^{-u} \int_0^\infty 2e^{-2x} dx du = \int_0^\infty g(u)e^{-u} du$$

Ceci est vrai pour toute fonction continue bornée, donc XY possède la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

$$f_{XY}(u) = e^{-u}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u)$$

Ainsi, $XY \sim \mathcal{E}(1)$.

2. Soient X_1, X_2 deux variables alétoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Donner la loi de $\max(X_1, X_2)$.

Solution de l'exercice 2. Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = \max(X_1, X_2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq x) = \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) \\
&\underset{\text{indépendance}}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \mathbb{P}(X_2 \leq x) \\
&= x^2 = \int_0^x 2t dt
\end{aligned}$$

On peut donc dire indifféremment que X possède la fonction de répartition $F_X(x) = x^2\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ ou que la loi de X admet pour densité $f_X(t) = 2t\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.