

Rappel de cours : Polynômes et fractions rationnelles

Notations

\mathbb{K} désigne un corps. Dans toute la suite, on prendra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On note

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[X] &= \{\text{polynômes à coefficients dans } \mathbb{K}\} \\ \mathbb{K}_n[X] &= \{\text{polynômes à coefficients dans } \mathbb{K} \text{ de degré } \leq n\}\end{aligned}$$

Polynômes : des objets algébriques

Un polynôme est défini comme une suite de coefficients nulle à partir d'un certain rang :

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

On munit l'ensemble des polynômes ainsi défini d'une addition et d'une multiplication qui en fait une structure d'anneau (cf. algèbre). En définissant **l'indéterminée** comme le polynôme $X = (0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ (défini par ses coefficients), le polynôme P s'écrit naturellement :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

C'est cette forme que l'on manipule usuellement, et qu'on a tendance à confondre avec **la fonction polynomiale associée**, qui est la fonction définie sur \mathbb{K} par $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ où x est une variable dans \mathbb{K} (donc un nombre réel ou un nombre complexe) cette fois. **Evaluer un polynôme** en un $z \in \mathbb{K}$ c'est donner la valeur de la fonction polynomiale en ce z .

Quelques propriétés utiles liées à la nature algébrique

- Une polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls d'où le **principe d'identification** : deux polynômes sont égaux ssi ils ont même coefficients
- Il est bon de s'intéresser au **degré** d'un polynôme (indice du plus grand coefficient non nul) qui vérifie les propriétés :

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q), \quad \deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

- Le **polynôme dérivé** peut être défini de manière purement algébrique :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

Arithmétique dans l'anneau des polynômes

Les notions d'arithmétique (divisibilité, pgcd, nombres premiers) ont été vues dans \mathbb{Z} . On peut aussi définir la divisibilité et la notion clé de division euclidienne pour les polynômes :

- $Q|P$: Q **divise** P ssi il existe un polynôme B tel que $P = QB$

- **division euclidienne de P par Q** : il existe des uniques polynômes B et R vérifiant :

$$P = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(Q)$$

(la condition sur le degré du reste est très importante et permet par exemple quand le degré de Q est assez faible de déterminer R)

- Le **PGCD** (Plus Grand Commun Diviseur) s'obtient comme dans \mathbb{Z} par l'algorithme d'Euclide (en utilisant donc des divisions euclidiennes successives)
- Un polynôme est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont λP et λ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Racines et décomposition en produit de facteurs irréductibles

Par définition, α est racine de P si α est un zéro de la fonction polynômiale associée.

On a les propriétés suivantes :

- $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (X - \alpha) | P$
- **Théorème de d'Alembert-Gauss** : Tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ admet une racine (a priori complexe donc).

Ces deux ingrédients nous permettent de caractériser les polynômes irréductibles dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} et nous donnent les décompositions en facteurs irréductibles suivantes :

Décomposition en produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{C} Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Il existe $u \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{C}^l$ et $(k_1, \dots, k_l) \in \mathbb{N}^l$ uniques tels que :

$$P(X) = u \prod_{i=1}^l (X - \alpha_i)^{k_i}$$

Décomposition en produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{R} Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe :

- $u \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{R}^l$, $(k_1, \dots, k_l) \in \mathbb{N}^l$,
- $r \in \mathbb{N}$, $(\beta_1, \dots, \beta_r), (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \mathbb{R}^r$ avec $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ et $(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r$

uniques tels que

$$P(X) = u \prod_{i=1}^l (X - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^r (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{m_j}$$

Un polynôme n'ayant que des facteurs de degré 1 dans sa décomposition en produit de facteurs irréductibles est dit **scindé** : en particulier tout polynôme à coefficient dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} est scindé sur \mathbb{C} .

En pratique... Chercher la décomposition revient d'abord à déterminer les racines (complexes ou réelles) de P . Pour cela il faut savoir :

- résoudre des équations polynômiales d'ordre 2
- repérer des racines évidentes et factoriser par ces racines (càd diviser P par $X - \alpha$ lorsque α est racine)
- savoir résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^n = 1$ ie connaître les racines n -èmes de l'unité
- utiliser des polynômes bicarrés

Racine n -èmes On rappelle que l'équation $z^n = 1$ a n solutions qui sont :

$$\left\{ e^{\frac{i2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

Il est équivalent de donner la factorisation sur \mathbb{C} du polynôme $X^n - 1$:

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right)$$

Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une expression de la forme P/Q , où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux. C'est donc pour les polynômes ce que sont les nombres rationnels pour les nombres entiers. Nous allons étudier les fractions rationnelles pour les polynômes réels et complexes. Commençons par les polynômes complexes, pour lesquels la situation est plus simple.

Polynômes complexes Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, premier entre eux, et soient a_1, \dots, a_k les racines de Q , de multiplicités m_1, \dots, m_k . Alors on la décomposition

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^{m_i} \frac{c_{i,m}}{(X - a_i)^m}, \quad (1)$$

pour un polynôme E et des constantes $c_{i,m}$. Cette décomposition est unique.

Vocabulaire : On appelle la décomposition précédente la *décomposition en éléments simples*. Le polynôme E est appelé la *partie entière*, et le reste la *partie polaire*. Les a_1, \dots, a_k sont appelés les *pôles* de la fraction rationnelle P/Q , d'ordres respectifs m_1, \dots, m_k . Pour chaque i , la constante $c_{i,1}$ est appelé le *résidu* du pôle a_i .

Pour trouver la décomposition ci-dessus, il existe une multitude de méthodes. En principe, tout est permis (du moins qu'on le justifie bien!). Voici quelques suggestions :

- On peut trouver la partie entière en effectuant une division euclidienne (nécessaire seulement si $\deg P \geq \deg Q$). On peut alors continuer avec le reste de la division (la partie polaire) ou alors avec la fraction rationnelle du départ.
- Pour trouver les coefficients c_{i,m_i} , une méthode assez générale est de multiplier les deux cotés de l'équation (1) par Q et de faire une identification des coefficients des polynômes ainsi obtenus. Cette méthode a pourtant plusieurs inconvénients : D'une part elle nécessite souvent plus de calculs que d'autres méthodes. D'autre part, elle nécessite d'étudier tous les pôles à la fois, alors que souvent en pratique on ne s'intéresse qu'à certains d'entre eux. Finalement, elle ne s'étend pas forcément à l'étude de fonctions plus générales que les fractions rationnelles.
- Une méthode souvent plus simple et rapide est d'évaluer la fraction rationnelle en des points bien choisis. Par exemple, pour tout i , on trouve le coefficient c_{i,m_i} en multipliant la fraction rationnelle par $(X - a_i)^{m_i}$ et en l'évaluant en a_i (ATTENTION : Ceci ne marche que pour les coefficients c_{i,m_i} , pas pour les $c_{i,m}$, avec $m < m_i$!). Autrement dit : On cherche le polynôme Q_i , tel que $Q = (X - a_i)^{m_i} Q_i$, puis on a $c_{i,m_i} = P(a_i)/Q(a_i)$. Ici, il est souvent commode d'utiliser le fait que $Q_i(a_i) = Q^{(m_i)}(a_i)/m_i!$, ou $Q^{(m)}$ désigne la m -ième dérivée de Q .

- d) Pour trouver les coefficients restants, on peut
- i) évaluer la fraction rationnelle en d'autres points,
 - ii) étudier le comportement de la fraction rationnelle (en tant que fonction) quand $x \rightarrow +\infty$ (peut-être en multipliant/divisant au préalable par X^k pour un certain k),
 - iii) multiplier par $(X - a_i)^{m_i}$ et faire un développement limité en a_i ,
 - iv) soustraire les termes d'ordre supérieur et continuer avec le résultat de la soustraction,
 - v) faire une identification (voir point 2).

Polynômes réels. Ici, comme les polynômes $X^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4c < 0$ sont irréductibles, la décomposition en éléments simples prend la forme

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^{m_i} \frac{c_{i,m}}{(X - a_i)^m} + \sum_{j=1}^l \sum_{p=1}^{p_j} \frac{d_{j,p}X + e_{j,p}}{(X + b_jX + c_j)^p}, \quad (2)$$

pour un polynôme E et des constantes réelles $c_{i,m}$, $d_{j,p}$, $e_{j,p}$, a_i , b_j , c_j , avec $b_j^2 - 4c_j < 0$ pour tout j .

Comment trouve-t-on cette décomposition ?

- a) Quand le polynôme est scindé dans \mathbb{R} , c'est comme dans \mathbb{C} !
- b) Si le polynôme n'est pas scindé dans \mathbb{R} , on peut alors faire la décomposition comme pour un polynôme complexe, puis sommer les termes correspondants aux pôles conjugués. Alternativement, on peut travailler directement avec la représentation (2) en adaptant les méthodes décrites ci-dessus aux termes avec dénominateur de second ordre. Par exemple, on a les possibilités suivantes :
 - i) Pour tout j , on peut trouver le polynôme $d_{j,p_j}X + e_{j,p_j}$ en multipliant la fraction rationnelle par $(X + b_jX + c_j)^{p_j}$ et en l'évaluant en une racine (complexe) de $X + b_jX + c_j$.
 - ii) Pour les coefficients restants, on pourra faire une identification après avoir multiplié les deux cotés de (2) par Q .