Université Pierre et Marie Curie — LIM10

Licence de Mathématiques L1 — 2011-2012

Intégration - TD10
Calcul d'integrales, Changement de variables et Intégration par parties

Exercice 1. Calcul d'intégrales et de primitives

Calculer :

a) $A = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ b) $B = \int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx$ c) $C = \int_1^2 (\ln x)^2 dx$

d) $\int (x^2-1)e^{3x}dx$ e) $\int \frac{dx}{1+x^3}$ f) $\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx$

g) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ h) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ i) $\int e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)dx$

j) $\int \sin^4 x dx$ k) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^3 x}dx$ l) $D = \int_0^\pi \sqrt{1+\sin x}dx$

Solution de l'exercice 1.

a) Integrer par parties : $A = \ln 2 - 2 + \pi/2$.

b) Poser $u = \arcsin x$ et intégrer par parties deux fois : $B = \pi^2/4 - 2$.

c) Faire $u = \ln x$ et intégrer par parties deux fois : $C = (\ln 2 - 1)^2$.

d) Intégrer deux fois par parties : $\left((x^2-1) - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)\frac{e^{3x}}{3}$. (on peut aussi chercher une primitive de la forme $P(x)e^{3x}$ avec P un polynôme.)

e) Décomposer la fraction en éléments simples. On trouve : $\frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

f) Décomposer la fraction en éléments simples. On trouve $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(1+x)$

g) Poser $y = \sqrt{x}$, puis décomposer en éléments simples. On trouve $4\sqrt{x} - x - 4\ln(1+\sqrt{x})$

h) Poser $y = \sqrt[3]{x}$. On trouve $\frac{3}{2}x^{2/3} - 3x^{1/3} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x})$

i) On intègre par parties le deuxième terme et on trouve $e^x \ln x$.

j) Il faut linéariser $\sin^4 x$. $\frac{1}{3}2\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$

k) On pose $u = \cos x$. Resultat : $-\frac{1}{3}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{6}\ln(\cos^3 x - \cos x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

l) On pose $u = \sin x$. $D = 4$.

Exercice 2. Une primitive sophistiquée

Calculer $I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx$.

Solution de l'exercice 2. Il s'agit d'un exemple classique d'un cas où la primitive n'est pas calculable (il n'y en a pas beaucoup). Il faut donc ruser un peu. On remplace $\tan x = \sin x / \cos x$ et on utilise les propriétés du logarithme pour obtenir $I = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x + \sin x)\,dx - \int_0^{\pi/4} \ln\cos x dx$. Puis on utilise les formules d'addition : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, d'où

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx - \int_0^{\pi/4} \ln\cos x dx$$

En faisant le changement de variable $u = \pi/4 - x$ dans la première intégrale, les deux derniers termes s'annulent et il reste $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Exercice 3.

a) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer

$$I_{p,q} = \int_0^{2\pi} e^{ipx}e^{-iqx}dx \quad , \quad J_{p,q} = \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx dx,$$
$$K_{p,q} = \int_0^{2\pi} \cos px \sin qx dx \quad , \quad L_{p,q} = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx dx.$$

b) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ pour $n \geq 1$. Trouver une relation de récurrence sur I_n.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{(2^{n+1} - 1)}{n+1}$$

Solution de l'exercice 3.

a) Le calcul de $I_{p,q}$ est immédiat : $I_{p,q} = 2\pi\delta_{pq}$. Les formules d'Euler permettent d'en déduire $J_{p,q} = \pi\delta_{|p|,[q|}$, $K_{p,q} = 0$ et $L_{p,q} = \pi(\delta_{p,-q} - \delta_{p,q})$.

b) Une intégration par parties donne $3nI_{n+1} = (3n-1)I_n + \frac{1}{2^n}$.

c) Il suffit d'utiliser $\frac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 x^k dx$ puis le binôme de Newton.