Intégration - TD11
Approximation des Intégrales

Exercice 1. Sommes de Riemann

a) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_k - x_{k+1})$ avec $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_a^b f.$$

b) On suppose maintenant que f est $\mathcal{C}^1$ et on choisit $\xi_k = x_k$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_a^b f - I_n = \frac{C}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) Calculer les limites des suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

Exercice 2. Méthode des trapèzes

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$.

a) Soit $\alpha, \beta \in [a,b]$. Montrer que

$$\int_\alpha^\beta f = \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta)) + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)f''(x)dx$$

b) En déduire que

$$\left|\int_\alpha^\beta f - \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))\right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}\|f''\|_\infty$$

c) Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. On note $I_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_a^b f - I_n\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

Exercice 3. Méthode de Gauss

a) On fixe $(a_1,\ldots,a_n) \in [-1,1]^n$. Montrer qu'il existe $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall R \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 R(x)dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k R(a_k)$$

b) Pour $n \geq 1$, on introduit les polynômes $T_n = (X^2 - 1)^n$ et $P_n = T_n^{(n)}$. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} Q(x)P_n(x)dx = 0$.

c) Déduire de la question précédente que P_n a n racines simples $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $]-1, 1[$.

d) Montrer qu'il existe $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \beta_k Q(x_k)$$