Université Pierre et Marie Curie — LIM10
Licence de Mathématiques L1 — 2011-2012

Polynômes - TD1
Notions élémentaires et arithmétique

Exercice 1. Echauffement

Déterminer les polynômes P vérifiant les relations suivantes :

$$P(X^2+1) = P(X) \quad (1)$$
$$P(2X+1) = P(X) \quad (2)$$
$$(1-X)P'(X) - P(X) = X^n \quad (n \in \mathbb{N} \text{ fixé}) \quad (3)$$

Solution de l'exercice 1. Seuls les polynômes constants satisfont (1) ou (2) pour des raisons de degré (1) ou de coefficient dominant (2). La solution de l'équadiff (3) est $P(X) = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X^k$

Exercice 2. Division euclidienne

a) Effectuer la division euclidienne de $3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3. En déduire que ces deux polynômes sont premiers entre eux.

b) Soit a un réel et n un entier naturel. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos(a)+X\sin(a))^n$ par X^2+1

c) Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $a, b, P(a)$ et $P(b)$.

d) Quel est le reste de la division euclidienne de $P_n = X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$?

Solution de l'exercice 2.

a) $3X^5+4X^2+1 = (X^2+2X+3)(3X^3-6X^2+3X+16) - 41X - 47$ et le polynôme X^2+2X+3 n'ayant pas de racine réelles, il n'est pas divisible par $-41X-47$ donc l'algorithme d'Euclide donnera un dernier reste constant.

b) Ecrire la division euclidienne et évaluer en i, on obtient par identification des parties rélles et imaginaires d'un nombre complexe que $R_n = a_nX + b_n$ avec $b_n = \cos(an)$ et $a_n = \sin(an)$.

c) Poser $R(X) = \alpha X + \beta$, écrire $P = B(X-a)(X-b) + R$ et en évaluant en a et b on obtient le système $P(a) = \alpha a + \beta$ et $P(b) = \alpha b + \beta$ et on obtient :

$$R(X) = \frac{P(a)-P(b)}{a-b}X + \frac{aP(b)-bP(a)}{a-b}$$

d) Evaluer en 1 et dériver pour obtenir une deuxième relation... Finalement $R = (n+1)X + (2-n)$

Exercice 3. Polynômes de Tchebychev

On considére la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$P_0 = 1, P_1 = X \quad \text{et} \quad P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$$

a) Préciser P_2, P_3, P_4.

b) Déterminer le terme de plus haut degré de P_n

c) Etudier la parité des polynômes P_n

d) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

Solution de l'exercice 3. Cet exercice est basé sur des raisonnements par réccurrence pour donner le degré, la parité et la relation fondamentale des polynômes de Tchebychev. Il faut penser á faire une récurrence sur deux rangs et prendre par exemple pour proposition $\mathcal{P}(n)$ dans le cas de b)

$$\begin{array}{rcl} ''P_n(X) & = & 2^{n-1}X^n + R_n(X) \text{ avec } \deg R_n < n \\ \text{ET } P_{n+1}(X) & = & 2^n X^{n+1} + R_{n+1}(X) \text{ avec } \deg R_{n+1} < n+1'' \end{array}$$

Exercice 4.

Soit $\alpha \in K$ et $P \in K[X]$. Montrer que $P(\alpha) = 0$ si et seulement si $X - \alpha \mid P$

Solution de l'exercice 4. Ecrivons la division euclidienne de P par $X - \alpha$: il existe un polynôme Q et une constante c uniques tels que $P(X) = (X - \alpha)Q + c$. En évaluant en α on obtient $c = P(a)$ d'où

$$P(X) = (X - \alpha)Q + P(\alpha)$$

D'où $P(\alpha) = 0$ ssi $P(X) = (X - \alpha)Q$.