

Polynômes - TD2 Racines et factorisation

Exercice 1. Echauffement

On pose $P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$.

- Effectuer la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q .
- Décomposer chacun des facteurs obtenus précédemment en produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} . En déduire les décompositions de P .

Exercice 2. Racines n -èmes...

Factoriser sur \mathbb{C} (et sur \mathbb{R} pour Q) les polynômes suivants :

- $P(X) = (X - 1)^n - (X + 1)^n$
- $Q(X) = X^{2n} - 2X^n \cos(a) + 1$ où a est un réel fixé

Exercice 3.

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

Exercice 4.

- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et a une racine de P , donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$, tel que $P = (X - a)Q$.
Montrer que $Q(a) = P'(a)$.
- Montrer que $\prod_{j=1}^{n-1} (1 - e^{2i\pi j/n}) = n$ pour tout $n \geq 1$.
- En déduire que $\prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 5.

Déterminer l'ensemble des polynômes tels que $P'|P$