Polynômes - TD2
Racines et factorisation

Exercice 1. Echauffement

On pose $P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$.

a) Effectuer la division euclidienne du polynôme P par le polynôme Q.

b) Décomposer chacun des facteurs obtenus précédemment en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. En déduire les décompositions de P.

Solution de l'exercice 1. On a $P(X) = (1 + X + X^2)(X^3 + 1)$. Le premier facteur admet pour racines j et j^2 sur $\mathbb{C}$, il est irréductible sur $\mathbb{C}$ le second admet $-1, e^{\pm i\pi/3}$ comme racines complexes et sa factorisation sur $\mathbb{R}$ est $(X + 1)(X^2 - X + 1)$ donc :

$$P(X) = (X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$$

et sur $\mathbb{C}$ on remarque que P se factorise par les racine 6-èmes de l'unité différentes de 1.

Exercice 2. Racines n-èmes...

Factoriser sur $\mathbb{C}$ (et sur $\mathbb{R}$ pour Q) les polynômes suivants :

a) $P(X) = (X - 1)^n - (X + 1)^n$

b) $Q(X) = X^{2n} - 2X^n \cos(a) + 1$ où a est un réel fixé

Solution de l'exercice 2. On obtient :

$$\begin{aligned} P(X) &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - i\text{cotan}\frac{k\pi}{n}\right) \\ Q(X) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{a}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right) \end{aligned}$$

Exercice 3.

Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1)$$

Solution de l'exercice 3. La forme de la relation à vérifier (multiplicative) ne favorise pas la recherche d'un polynôme écrit sous la forme d'un somme de coefficients. Par contre on peut aisément caractériser un polynôme vérifiant cette relation par ses racines.

Soit P un polynôme vérifiant la relation $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. Tout d'abord on remarque que

$$\begin{aligned} \alpha \text{ racine de } P \quad &\Rightarrow \quad \alpha^2 \;\text{ racine} && (1)\\ \alpha \text{ racine de } P \quad &\Rightarrow \quad (\alpha-1)^2 \;\text{ racine} && (2) \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate on déduit de (1) que si α est racine de P, l'ensemble $\{\alpha^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ est aussi racine de P. P n'ayant qu'un nombre fini de racines, il faut que α soit nul ou soit de module 1. Les racines non nulles de P vérifient donc

$$|\alpha| = 1 \;\text{ et }\; (\alpha = 1 \text{ ou } \;|\alpha - 1| = 1) \tag{3}$$

ou la deuxième condition vient du fait que si α est racine, $(\alpha-1)^2$ aussi et cette racine est nulle ou de module 1 d'après ce qui précède.
Déterminer les nombres complexes vérifiant (3) revient à chercher l'intersection de deux cercles et on trouve que les racines de P sont comprises dans l'ensemble :

$$\left\{0, 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}\right\}$$

Mais $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ ne vérifient pas que leur carré est dans l'ensemble des racines, donc les seules racines possibles sont 0 et 1.
On conclut que les solutions du problème sont de la forme :

$$P = uX^n(X-1)^m$$

A-t-on terminé ? Non car jusqu'à présent on n'a raisonné que par condition nécessaire (analyse) : les solutions s'écrivent forcémment sous cette forme mais il n'est pas sûr que tous les polynômes de cette forme soient solutions du problème. Il s'agit de voir quels polynômes de cette forment conviennent (synthèse). Et si $P = uX^n(X-1)^m$, on a :

$$\begin{aligned} P(X^2) &= uX^{2n}(X^2-1)^m = uX^{2n}(X-1)^m(X+1)^m \\ P(X)P(X+1) &= u^2X^n(X-1)^m(X+1)^nX^m = u^2X^{n+m}(X-1)^m(X+1)^n \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $n = m$ et $u^2 = u$. Finalement l'ensemble des solutions est l'ensemble des polynômes :

$$\{uX^n(X-1)^n, u = 0 \text{ ou } 1, n \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 4.

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et a une racine de P, donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$, tel que $P = (X-a)Q$. Montrer que $Q(a) = P'(a)$.
b) Montrer que $\prod_{j=1}^{n-1}(1 - e^{2i\pi j/n}) = n$ pour tout $n \geq 1$.
c) En déduire que $\prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Solution de l'exercice 4. Pour la dernière question :

$$\prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)}{2i} = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{ik\pi}{n}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)$$

D'oú :

$$\prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}i^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{ik\pi}{n}}$$

L'avant-dernier produit vaut n par la question précedente quand au dernier il se calcule simplement par

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{ik\pi}{n}} = e^{-\frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k} = e^{-i\frac{\pi n(n-1)}{2n}} = (-i)^{n-1}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 5.

Déterminer l'ensemble des polynômes tels que $P'|P$

Solution de l'exercice 5. Comme P' divise P il existe un polynôme Q tel que $P = QP'$. Q est donc de degré 1 et il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u \in K$ tel que $P = u(X-\alpha)P'$. Soit β un racine de P différente de α, et k son ordre de multiplicité dans P, alors β est aussi racine k-ème de P', ce qui est une contradiction. Donc P est de la forme $u(X-\alpha)^n$ et (synthèse !) on vérifie que tous les polynômes de cette forme vérifient $P'|P$.