Université Pierre et Marie Curie — LIM10
Licence de Mathématiques L1 — 2011-2012

# Polynômes - TD4
# $\mathbb{R}[X]$ et l'analyse

**Exercice 1. Echauffement**

a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$, avec $a_n \neq 0$. Décrivez le comportement de $P(x)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.

b) Esquissez les graphes des polynômes suivants, vus commes des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\text{i) } 2X^2 + 4X + 3 \quad \text{ii) } X^3 + 2X^2 - X - 2 \quad \text{iii) } -4X^4 + 4X^2 - 1$$

*Solution de l'exercice* 1.

a) On pourrait commencer par leur rappeler le comportement qualitatif, en distinguant les cas où $n$ est paire ou impaire, puis les faire montrer que $P(x) \sim a_n x^n$ quand $x \to \pm\infty$.

b) i) L'écrire sous la forme $2(X+1)^2 + 1$, puis dessiner la parabole. ii) L'écrire sous la forme $(X-1)(X+1)(X+2)$, puis s'orienter par rapport aux zéros. iii) L'écrire sous la forme $-4(X^2 - 1/2)^2 = -4(X - 1/\sqrt{2})^2(X + 1/\sqrt{2})^2$, puis s'orienter par rapport aux zéros.

**Exercice 2. Racines réelles**

a) Montrer que chaque polynôme de degré impair à coefficients réels admet une racine réelle

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}$. Montrer que $P'$ est également scindé dans $\mathbb{R}$.

*Solution de l'exercice* 2. Illustrer par le graphe du polynôme !

a) Exercice 1 a) et théorème des valeurs intermédiaires.

b) Notons $n = \deg P$. On veut montrer que $P'$ a $\deg P' = n-1$ racines réelles (comptées avec leur multiplicité). Soient $a_1 < \ldots < a_k$ les racines de $P$ et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités, si bien que $m_1 + \cdots + m_k = n$. Chaque $a_i$ avec $m_i \geq 2$ est alors encore racine de $P'$ avec multiplicité $m_i - 1$. De plus, par le théorème de Rolle, entre $a_i$ et $a_{i+1}$ il y a au moins une racine $a_i'$ de $P'$, $i = 1, \ldots, k-1$. Comptés avec leur multiplicité, $P'$ a donc au moins $\sum_{i=1}^{k}(m_i - 1) + k - 1 = n - 1$ racines réelles.

**Exercice 3. Formule de Taylor**

a) Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$. On désigne par $P^{(k)}$ la $k$-ième dérivée de $P$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}$, on ait

$$P(a+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k \quad \text{(Formule de Taylor)}$$

b) Trouver le polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5, tel que $P(1) = 1$, $P'(1) = 1$, $P''(1) = 2$, $P^{(3)}(1) = 6$, $P^{(4)}(1) = 24$, $P(0) = 0$.

*Solution de l'exercice* 3.

a) Clair.

b) $1 + (X-1) + (X-1)^2 + (X-1)^3 + (X-1)^4 + (X-1)^5$.

**Exercice 4. Polynôme interpolateur de *Lagrange*.** Soient $a_1 < \cdots < a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique polynôme $P$ de degré au plus $n-1$ (appelé le "polynôme interpolateur de *Lagrange*"), tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i$.

a) Pour $i = 1, \ldots, n$, trouver un polynôme $L_i$ de degré $n-1$ tel que $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ (symbole de *Kronecker*).

b) Construire à partir des $L_i$, $i = 1, \ldots, n$, un polynôme $P$ avec $P(a_i) = b_i$ pour tout $i$.

c) Soit $Q$ un polynôme de degré au plus $n-1$, tel que $Q(a_i) = b_i$ pour tout $i$. Montrer que $Q = P$. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose pas que $\deg Q \leq n-1$ ?

d) Donner les polynômes de degré 2 ou moins ayant les mêmes valeurs que $\sin(x)$ en

$$\text{i) } -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2} \quad \text{ii) } -\pi, 0, \pi \quad \text{iii) } -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

*Solution de l'exercice* 4.

a) $L_i = \dfrac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a - a_j)}$

b) $P = \sum_i b_i L_i$.

c) Le polynôme $P - Q$ a $n$ racines. Comme il est de degré au plus $n-1$, c'est le polynôme nul. Si on ne suppose pas que $\deg Q \leq n-1$, l'assertion n'est pas vrai, car si $R$ est par exemple le polynôme interpolateur de Lagrange avec $R(a_i) = b_i - a_i^n$, alors $S = R + X^n$ satisfait à $S(a_i) = b_i$.

d) Encore ici, les laisser d'abord dessiner le graphe de $\sin(x)$ et les inciter a deviner la réponse géométriquement. Puis utiliser le fait que le polynôme ainsi trouvé est l'unique.