

## Fonctions usuelles - TD3

### Fonctions réciproques

#### Exercice 1. Echauffement

- Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions bijectives de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- Vrai ou faux : Si  $f$  est bornée et bijective alors  $f^{-1}$  est bornée.

#### Exercice 2. Fonction croissante

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application strictement croissante et continue.

- Montrer que  $f$  est injective, que  $f(\mathbb{R})$  est un intervalle ouvert, et que l'application  $f^{-1}$  définie sur  $f(\mathbb{R})$  est continue.  
Donner un exemple d'une telle fonction  $f$  pour lequel on ait :  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , et un exemple pour lequel on ait :  $f(\mathbb{R}) = ]0; 1[$
- On suppose de plus que  $f$  est dérivable et que  $f$  ne s'annule pas ; montrer que  $f^{-1}$  est dérivable et que pour tout  $y \in f(\mathbb{R})$ , on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

- On suppose de plus que  $f$  est  $C^2$  ; montrer que  $f^{-1}$  est  $C^2$  et calculer  $(f^{-1})''$ .
- On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x - 1 + \cos x$ . Montrer que  $f$  est bijective, et que  $f^{-1}$  est  $C^2$ .

#### Exercice 3. Fonctions circulaires réciproques

- Etudier la fonction  $f : x \mapsto \arcsin(\sin(x))$  et tracer sa courbe représentative.
- Pour tout  $x \in [-1; 1]$  déterminer une relation entre  $\arccos(x)$  et  $\arccos(-x)$
- Exprimer, pour tout réel  $x$  non nul,  $\arctan(x)$  en fonction de  $\arctan(1/x)$ .
- Que pensez-vous de la fonction  $f(x) = \arg \tanh(x) - \arg \tanh(1/x)$  ?

#### Exercice 4. étude de $x^3$

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3$

- Montrer que  $f$  est strictement croissante. Sa dérivée est-elle strictement positive ? Cette fonction est-elle surjective ?
- la fonction réciproque  $f^{-1}$  est-elle dérivable ?

#### Exercice 5. Etude d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{-2}{x+1} + 1$

- Donner le domaine de définition et l'image de  $f$
- Quels sont les points d'intersection du graphe de  $f$  avec les axes de coordonnées ?
- Quels sont les intervalles de croissance ou de décroissance de  $f$  ?
- Déterminer la fonction réciproque  $f^{-1}$ , en précisant son domaine de définition et son image.