Fonctions usuelles - TD4
Développements limités

Exercice 1. Etude d'une fonction définie par morceaux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) \text{ si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0 \end{cases}$

a) Ecrire les développements limités à l'ordre 4 de $\cos(x)$ et $\cosh(x)$ au point 0.

b) Montrer que f est de classe C^1 et possède un développement limité d'ordre 2 en 0 puis le calculer.

Exercice 2. Limites

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\exp(\arctan x)-\exp(\tan x)}{\exp(\arcsin x)-\exp(\sin x)}\right)$

Exercice 3. Fonctions C^2

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$. Calculer la limite de $\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$ quand x tend vers 0.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Calculer, au moyen des dérivées de f la limite de $\frac{xf(x)-f(x^2)}{(f(x))^3}$ quand x tend vers 0.

Exercice 4. Étude de comportement asymptotique

a) Donner les limites en l'infini des fonctions suivantes puis leur développement limité 'en l'infini', càd dans la base des $\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}...\}$

$$\frac{x}{x-1} \qquad \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
$$e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \qquad \sqrt{1+x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) Faire une étude détaillée de la fonction

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x+1}$$

En particulier, on recherchera une asymptote oblique au voisinage de l'infini et la position relative du graphe de f par rapport à celle-ci.