Intégration - TD9
Propriétés élémentaires

Exercice 1. Relation de Chasles

Soient $a \leq c \leq b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f, \frac{1}{b-c}\int_c^b f\right)$$

Exercice 2. Positivité de l'intégrale

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue non identiquement nulle telle que

$$\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$$

Montrer que f est la fonction constante égale à 1.

Exercice 3. Fonctions d'intégrale nulle

On considère $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f continue sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f = 0$.
Montrer que f s'annule sur $[a,b]$:

a) Avec le théorème des valeurs intermédiaires.

b) En appliquant le théorème de Rolle.

On suppose maintenant que f est continue sur $[0,1]$ et vérifie $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 4. Inégalité de Cauchy-Schwarz

a) Soient $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$$

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Calculer

$$\inf_{f \in E} \int_0^1 f'(x)^2 dx$$

Cette borne inférieure est-elle atteinte ?