Université Pierre et Marie Curie — LIM10
Licence de Mathématiques L1 — 2011-2012

Intégration - TD9
Propriétés élémentaires

Exercice 1. Relation de Chasles

Soient $a \leq c \leq b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f, \frac{1}{b-c}\int_c^b f\right)$$

Solution de l'exercice 1.
Supposons par exemple $\dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^c f \leq \dfrac{1}{b-c}\displaystyle\int_c^b f$. Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f &= \frac{1}{b-a}\int_a^c f + \frac{1}{b-a}\int_c^b f\\ &\leq \frac{1}{b-a}\frac{c-a}{b-c}\int_c^b f + \frac{1}{b-a}\int_c^b f\\ &\leq \frac{1}{b-c}\int_c^b f\end{aligned}$$

On a bien

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f, \frac{1}{b-c}\int_c^b f\right).$$

Exercice 2. Positivité de l'intégrale

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue non identiquement nulle telle que

$$\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$$

Montrer que f est la fonction constante égale à 1.

Solution de l'exercice 2. En passant tout dans le même membre et en remarquant que $f(1-f)$ est une fonction continue et positive d'intégrale nulle, on obtient qu'elle est identiquement nulle, or comme f n'est pas identiquement nulle elle prend la valeur 1 en au moins un point (partout ailleurs elle doit être nulle). Comme elle est continue elle prend cette valeur partout.

Exercice 3. Fonctions d'intégrale nulle

On considère $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f continue sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f = 0$.
Montrer que f s'annule sur $[a,b]$:

a) Avec le théorème des valeurs intermédiaires.

b) En appliquant le théorème de Rolle.

On suppose maintenant que f est continue sur $[0,1]$ et vérifie $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Solution de l'exercice 3.

a) f est bornée et atteint ses bornes : $m \leq f(x) \leq M$. On intègre ces inégalités sur $[a,b]$, par positivité on obtient $m \leq 0$ et $M \geq 0$. On conclut avec le TVI.

b) Considerons la primitive $F(x) = \int_a^x f$. F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, $F(a) = F(b) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle, f admet une racine sur $[a,b]$.

Pour la dernière question, il suffit de poser $g(x) = f(x) - x$.

Exercice 4. Inégalité de Cauchy-Schwarz

a) Soient $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$$

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Calculer

$$\inf_{f \in E} \int_0^1 f'(x)^2 dx$$

Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Solution de l'exercice 4.

a) Comme f et g sont à valeurs positives, on peut appliquer Cauchy-Schwarz à leurs racines.

b) Cauchy-Schwarz donne que l'intégrale est toujours minorée par $(b-a)^2$, borne qui est atteinte pour f affine.