Université Pierre et Marie Curie 2011-2012

LIM10 : Devoir final du 21 mai 2012

Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1. Une étude de fonction (6pts)

On définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} \text{ si } x < 0 \\ 2e^{x^3+x} - 2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?

c) Montrer que f admet un DL d'ordre 2 en 0.

d) Etudier la fonction f et tracer l'allure de son graphe.

Exercice 2. Une factorisation de polynôme (6pts)

a) Soit $t \in \mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$. Montrer que l'unique solution de l'equation $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{2it}$ est $z = \tan t$.

b) Soit maintenant α un réel tel que $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. On considère le polynôme

$$P(X) = (1 + iX)^n - e^{i2n\alpha}(1 - iX)^n.$$

Quel est le degré de P et son coefficient dominant ?

c) Trouver les racines de P et en déduire sa décomposition en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$.

d) BONUS : en déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \tan\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$

Exercice 3. Suite d'intégrales (8pts)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose,

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x dx$$

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente. On note $l = \lim_{n\to\infty} I_n \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

En déduire la valeur de l.

d) Déduire de la question précédente que quand $n \to \infty$,

$$I_n \sim \frac{1}{4n}$$

e) Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Trouver une relation entre S_N, I_0 et I_{N+1}. En déduire que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $\frac{\pi}{4}$.