DEVOIR MAISON L2 ALGÈBRE

I. HONORE, 9 octobre 2016

Problème

Questions d'arithmétique.

a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. En déduire

$$n+1 \Big| \binom{2n}{n}.$$

b. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe m, n premiers entre eux tels que $a^m = b^n$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^n$ et $b = c^m$.

c. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et $n = \prod_{k=1}^{N} p_k^{\alpha_k}$ sa décomposition primaire. Quel est le nombre de diviseurs positifs de n ?

d. Problème de factorisation

(a) Montrer que pour tout entier positif n, et pour tout complexes a, b :

$$(a^n - b)^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

(b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, tel que $a \geq 2$ on l'équivalence pour $m, n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - 1 | a^m - 1 \Longleftrightarrow n | m$$

e. Trouver l'ensemble des solutions des équations diophantiennes qui suivent

(a) $49x + 14y = 2$

(b) $17x - 33y = 1$

(c) 18x+25y=2

f. On appelle carré parfait, le carré d'un entier.

(a) Montrer que tout nombre premier impaire est la différence de deux carrés parfaits.

(b) Vérifier que cette écriture est unique.

(c) Est-ce que tout nombre entier, pas forcément premier, peut s'exprimer comme différence de deux carrés parfaits ? Si oui, cette écriture est-elle unique ?

g. On dit qu'un entier $n \in \mathbb{N}$ possède un **développement de Cantor** si on peut écrire

$$n = a_m m! + a_{m-1}(m-1)! + \ldots + a_2 2! + a_1 1!$$

avec $(a_j)_{j \geq 1}$ des entiers tels que $0 \leq a_j \leq j$.

(a) Trouver le développement de Cantor de 23 et de 57.

(b) Montrer que tout entier naturelle admet un développement de Cantor.

(c) Prouyer enfin que cette écriture est unique.