Devoir Maison L3 Algèbre

I. HONORE, 21 octobre 2016

Problème

Notations et définitions :

Voici les notations et les définitions des objets dont nous avons besoin pour ce problème.

1. Le long de ce problème, nous prendrons $(K, +, .)$ un corps avec 0_K l'élément neutre pour la loi "+" et 1_K l'élément neutre pour la loi "." .
2. On dit qu'un sous-corps est **premier** s'il ne contient aucun sous-corps distinct de lui-même. Un élément d'un anneau est dit **premier** si l'idéal engendré est premier.
3. On appelle **caractéristique** d'un corps le plus petit entier strictement positif n tel que $n.1_K = 0_K$.

Partie 1 : Étude de la caractéristique d'un corps.

a. Montrer que les éléments premiers de $\mathbb{Z}$ sont les nombres premier.

b. On considère l'application $\varphi : n \mapsto n.1_K$. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux entre $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(K, +, .)$.

c. Que dire de $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$?

d. Montrer que la caractéristique d'un corps est soit nulle, soit un nombre premier.

e. Montrer qu'un nombre $p \in \mathbb{N}$ est premier si et seulement s'il divise $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in [\![1; p-1]\!]$.

f. On suppose que K est un corps qui a pour caractéristique $p > 0$. Montrer que l'application $x \longleftrightarrow x^p$ est un isomorphisme de K.
Indication : *Remarquer que* $(x + y)^p = x^p + y^p$ *avec* $x, y \in K$.

g. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x \longleftrightarrow x^{p^n}$ est un isomorphisme de K.

Problème

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. Pour tous idéaux I, J, on note :

$$\sqrt{I} := \{x \in A; \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\},$$

que l'on appelle **radical** de I (parfois noté $\mathcal{R}(I)$),

$$IJ := \{x \in A; \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists(x_1, \ldots, x_n) \in I^n, \exists(y_1, \ldots, yn) \in J^n, x = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\},$$

le **produit** de I et J.

Partie 1 : Questions sur le radical

a. Démontrer que pour tout idéal I de A, $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I.

b. Démontrer les propositions suivantes tous idéaux I, J de A :

a) $\sqrt{A} = A$

b) $I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$

c) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

d) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

e) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$

c. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers disctincts, on note $x = \prod_{k=1}^n p_k^{\alpha_k}$ pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'en prenant $x' := \prod_{k=1}^n p_k$, on a

$$\sqrt{x\mathbb{Z}} = x'\mathbb{Z}.$$

Partie 2 : Questions sur le produit

a. Démontrer que pour tous idéaux I, J de A, IJ est un idéal de A.

b. Démontrer les propositions suivantes pour tous idéaux I, I', J de A :

a) $IJ \subset I \cap J$

b) $\{0\}I = \{0\}$, $AI = I$

c) $(I \cap J) + (I' \cap J) \subset (I + I') \cap J$

d) $(I \cap I') + J \subset (I + J) \cap (I' + J)$

e) $I \subset I' \Rightarrow IJ \subset I'J$

f) $(I + I')J = (IJ) + (I'J)$

g) $IJ = JI$, $(II')J = I(I'J)$

h) $(I \cap I')J \subset (IJ) \cap (I'J)$.