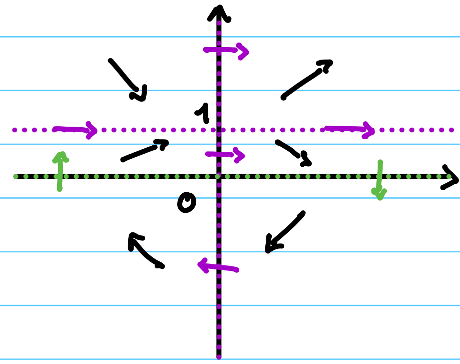
DS 1 - Exercice 3

1)



Isoclines verticales $I_v = $ "$\{\dot{x} = 0\}$"

Isoclines horizontales $I_h = $ "$\{\dot{y} = 0\}$"

2) Le couple $(x(t), y(t)) = (x_0 + t, 1)$ vérifie le système (4), donc son graphe, à savoir la droite $\{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$ est une trajectoire.

<u>NB</u>: Par unicité des solutions, cela implique qu'aucune solution n'étant pas de cette forme ne croise cette droite, et donc on a l'alternative suivante :

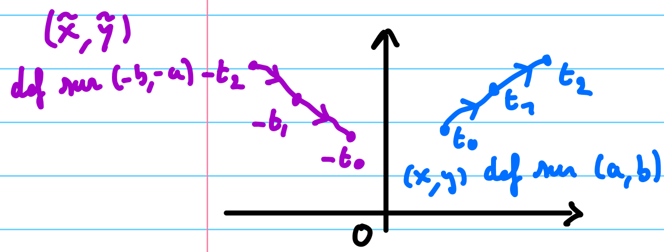
- soit $y(t)$ est constant égal à 1
- soit $(x,y)(t)$ reste confiné dans un demi-plan $\{y \gtrless 1\}$.

3) Soit (x,y) une solution, et $\tilde{x}(t) := -x(-t)$
$\tilde{y}(t) := y(-t)$

on a que * $\tilde{x}'(t) = x'(-t) \underset{(4)}{=} y(-t) = \tilde{y}(t)$

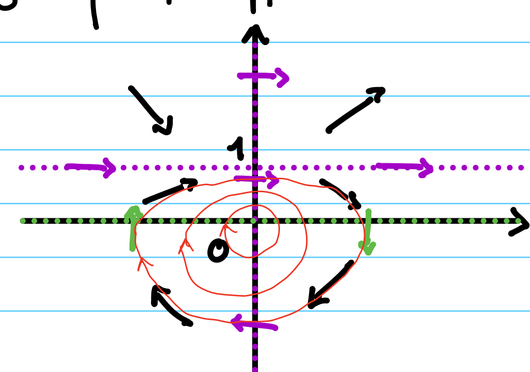
* $\tilde{y}'(t) = -y'(-t) \underset{(4)}{=} -x(-t)\left(1 - y(-t)\right) = \tilde{x}(t)\left(1 - \tilde{y}(t)\right)$

Donc $(\tilde{x}, \tilde{y})$ est une solu° de (4).



On en déduit que les <u>trajectoires</u> (graphes des solu°) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4)



Y repasse par Y(0) => Y périodique

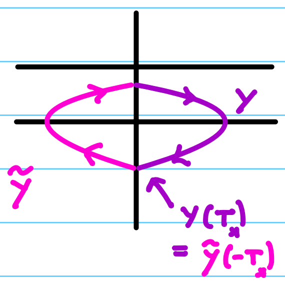
Réponse complète à la question 4)

Le diagramme de la question 1) suggère qu'une telle solu° est périodique. Pour le vérifier, il suffit de montrer que $Y(T) = Y(0)$ pour un certain $T \geq 0$. En effet, cela impliquerait

que $\mathcal{Y}(t) := Y(t+T)$ serait une solution avec la même donnée initiale $\underbrace{\mathcal{Y}(0)}_{Y(T)} = Y(0)$ et donc par unicité (C.L.) $Y(t) = \mathcal{Y}(t) = Y(t+T)$.

Y croise l'axe des ordonnées => Y repasse par Y(0)

Pour montrer que $Y(0) = Y(T)$ pour un certain $T > 0$, il suffit de montrer que $Y(T_*) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ pour un certain T_*. La symétrie montrée en 3) suggère alors que la trajectoire est alors une courbe fermée.



Plus rigoureusement, en posant $Z(t) = \begin{cases} Y(t), & 0 \leq t \leq T_* \\ \tilde{Y}(t - 2T_*), & T_* \leq t \leq 2T_* \end{cases}$

on a que Z est continue puisque $Y(T_*) = \tilde{Y}(-T_*)$ et donc C^1 puisque Y et $\tilde{Y}$ sont solutions de (4). Ainsi Z est une solution sur $[0, T]$ où $T := 2T_*$, et on a $Z(T) = \tilde{Y}(T-T) = Y(0) = Z(0)$.

Y croise l'axe des ordonnées

Montrons donc que $Y(T_*)$ croise l'axe des ordonnées pour un $T_* \geq 0$.

* Montrons que $Y(T_{**})$ croise l'axe des abscisses. Par l'absurde, si $y(t) \neq 0$ pour tout $t \geq 0$, alors par continuité et le fait que $Y(t) \in \{y < 1\}$ (voir NB q°2) on a ① $0 < y(t) < 1$, d'où $\dot{x} > 0$ et donc ② $x \geq \varepsilon$ pour $t \geq t_\varepsilon$. Donc $\dot{y} = -x(1-y) \leq 0$ et en particulier ③ $y \leq y(0) = \sigma$. Par ② et ③ on a pour $t \geq t_\varepsilon$ $\dot{y} \leq -\varepsilon(1-\sigma) < 0$. Mais alors $y(t) \to -\infty$, ce qui contredit l'hypothèse.

* On montre similairement que $x(T_*) = 0$ pour un $T_* > T_{**}$. Les étapes sont
  i) Si $x(t) \neq 0$ pour $t \geq T_{*}$, alors $x(t) \geq 0$ pour $t \geq T_*$
  ii) Donc $\dot{y} \leq 0$ et alors $y(t) \leq -\varepsilon$ pour $t \geq T_* + \delta$
  iii) Ainsi $\dot{x} \leq -\varepsilon$ donc $x(t) \to -\infty$