



Université
Paris Cité



Université Paris Cité
École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386)
Département de Mathématiques et Applications (UMR 8553)

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES

présentée par

Pierre GERVAIS

Problèmes de limites hydrodynamiques

dirigée par Isabelle GALLAGHER et Isabelle TRISTANI

Soutenue le 15 décembre 2022 devant le jury composé de :

M ^{me} Isabelle GALLAGHER	PR	Université Paris Cité	Directrice
M ^{me} Isabelle TRISTANI	CR	ENS de Paris	Directrice
M Antoine MELLET	PR	University of Maryland	Rapporteur
M Thierry GOUDON	DR	Université Sophia Antipolis	Rapporteur
M ^{me} Marjolaine PUEL	PR	CY Cergy Paris Université	Examinatrice
M Cyril IMBERT	DR	ENS de Paris	Examineur
M Laurent DESVILLETES	PR	Université Paris Cité	Examineur
M Bertrand LODS	PR	Università degli Studi di Torino	Examineur

Département de Mathématiques et Applications (UMR 8553)
ENS de Paris
45 Rue d'Ulm
7505, Paris

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directrices, Isabelle Gallagher et Isabelle Tristani pour m'avoir initié à la recherche durant ces trois années de thèse, pour leur gentillesse, leurs encouragements et leur soutien pendant les périodes de doutes. Je les remercie également pour leur patience, leurs nombreuses relectures ainsi que leur exigence concernant la rédaction et les exposés qui m'ont permis de présenter mes travaux de façon, je l'espère, claire et intéressante. En particulier, je remercie Isabelle Gallagher pour m'avoir encadré et encouragé à plusieurs occasions depuis ma troisième année de licence ainsi que pour m'avoir introduit à la théorie cinétique et l'analyse asymptotique. Enfin, je remercie spécifiquement Isabelle Tristani pour m'avoir fait profiter de sa vaste connaissance de l'équation de Boltzmann, elle a toujours su me donner la bonne référence lorsque j'étais bloqué.

Je remercie également les rapporteurs Thierry Goudon et Antoine Mellet pour leur relecture attentive de ce manuscrit, ainsi que les membres du jury ; Marjolaine Puel, Cyril Imbert, Laurent Desvillettes et Bertrand Lods, d'être présent pour la soutenance.

Merci à Bertrand Lods de m'avoir permis de terminer cette thèse dans de bonnes conditions, pour m'avoir accordé sa confiance pour un premier postdoc ainsi que pour les super projets qu'il m'a proposé.

Je remercie Kleber Carrapatoso avec qui j'ai fait ma première collaboration, pour sa gentillesse et son expertise qui a rendu cette expérience si enrichissante.

Je remercie à présent mes collègues de l'ENS de Paris, en commençant par mes co-bureaux qui ont été comme une seconde famille. Tout d'abord, Mickaël Latocca, mon grand frère de thèse qui malgré son talent a toujours été extrêmement humble. Je le remercie pour sa bonne humeur et sa considération pour mon travail qui était très encourageante. Ensuite, je remercie Geoffrey Beck, mon grand frère adoptif et camarade spectral, avec qui j'ai eu d'innombrables discussions des plus professionnelles aux plus personnelles. J'envie sa vision d'ingénieur et sa vision large des mathématiques, et le félicite pour son poste à l'INRIA ! Je remercie Daniel Perez, personnage mémorable, pour toutes ces discussions post-confinement au pied du panthéon. Enfin, je remercie Matija Sreckovic que je ne peux pas imaginer autrement qu'enthousiaste et prêt à plaisanter !

Merci aux occupants du bureau des plaisirs. Nicolas Forien que j'ai eu la chance de

côtoyer durant ma première année de thèse, Maxime Berger pour tous ces moments à rire et ces parties d'échecs, Anthony Gauvan pour son humour et dont la présence à une soirée la rend automatiquement deux fois plus fun, et le duo que constituent Corentin Gentil et Côme Tabary, aussi espiègles que talentueux.

Enfin je remercie l'équipe administrative du DMA, Zaina Elmir et Fabienne Renia, ainsi que ses directeurs Nicolas Bergeron et Cyril Imbert.

Merci à mes grands frères de thèse, Théophile Dolmaire et Mohamad Rachid, que je n'ai pu voir qu'à de rares occasions, mais dont les discussions scientifiques ont toujours été passionnantes.

À présent, je remercie mes camarades de thèse de l'Université de Paris-Cité, anciennement Université de Paris, mais pour moi Université Paris Diderot.

Merci à mes cobureaux, en commençant par Mathieu Ballandras qui m'a chaleureusement accueilli, toujours souriant, et pour sa bienveillance durant nos parties d'échecs alors que je débutais. Merci à Dorian Martino, véritable machine de guerre et pas seulement mathématique, pour toutes nos discussions et plaisanteries quand on était seuls (ou pas, oups) au bureau, et pour son beau jeu chaque fois que je lui mettais mat en deux coup. Merci à Camille Amoyal pour la séance d'escalade avec Dodo, je regrette qu'on n'ait pas pu se voir plus souvent mais chacun de ses passages était le point culminant de la semaine ! Merci à Skander Charfi pour toutes nos discussions de jeux vidéos et d'anime, nos échanges sur les colles et les TDs, et d'avoir partagé sa passion pour sa recherche.

Je remercie maintenant les anciens (dans mon référentiel) doctorants qui ont fait de mon arrivée une succession de rencontres de chouettes personnages. Merci à Kevin Massard, le grand maître du labo, pour toutes ces parties d'échecs et pour m'avoir appris à jouer, dommage qu'il n'ait jamais accepté mes échanges de desserts. Merci à Mario, pour ses cours particuliers d'échecs, pour toutes nos discussions de tout et de rien, en particulier celles à propos de nos étudiants, pour sa gentillesse infinie et son enthousiasme à chaque rencontre ! Merci à Maud Szusterman pour son, implication dans la défense des doctorants ainsi que pour ses conseils, elle a été une super «ancienne», tout comme Amandine Escalier qui m'a proposé de discuter pendant les premières difficultés rencontrées durant ma première année, ou Gabriel qui est arrivé en même temps que moi. Merci à Charles Valentin pour ses énigmes mathématiques aux réponses tordues et d'avoir veillé sur nous en silence depuis son fauteuil. Merci à Tancrede Huet pour son chaleureux accueil et son super exposé présentant la vie de thésard à l'occasion de la rencontre master-doctorants. Je remercie Romain Sieuzac, un des personnages les plus mémorables du labo, pour sa bienveillance, les innombrables discussions, le Nouvel Institut, l'escalade et les fous rires !

Parmi ceux qui sont arrivés en même temps que moi, je souhaite remercier Xavier Onfroy pour avoir partagé sa passion pour la zététique, pour son fameux tableau «je crois-je ne crois pas» et pour nos chouettes discussions sur l'enseignement. Merci à Farid Gharbi pour la bonne ambiance qu'il sait si bien amener, d'avoir partager sa passion

pour l'enseignement, pour les discussions vidéoludiques ! Merci à Charlotte Barbier, je suis content d'avoir pu la côtoyer régulièrement avant le Grand Confinement, merci pour le blind test «dessins animés de notre enfance» et notre concours du pire date. Allez voir sa chaîne youtube de sciences sociales «Les Langues de Cha'» ! Merci à Marie Besson pour son énergie, son enthousiasme sans faille et son émerveillement qu'elle a partagé avec moi. Enfin, merci à Fabien Hoareau pour pour les soirées passées ensemble, nos discussion et nos échanges de musiques !

Je remercie à présent les «nouveaux» doctorants, plus forcément si nouveaux aujourd'hui et dont certains entament leur troisième année ! Merci à Alexandre Girodroux-Lavigne, un personnage pétillant, mon seul camarade de physique mathématique dans ce labo, possédant le meilleur rire que j'ai eu la chance d'entendre (\\)(°,°,°)(\\) Merci à Razvan Apredoaei, co-organisateur des Bourbakettes, ça va me manquer de ne plus passer puis m'arrêter devant son bureau. Je suis sûr qu'en me voyant approcher il entendait le thème des Dents de la Mer. Merci à Ellie Studnia qui me remplace, la légende dit qu'il peut remplacer au pied levé n'importe quel orateur de n'importe quelle conférence. Merci à Maxime Chatal pour toutes les histoires ahurissantes qu'il a pu me raconter ! Merci à Anatole Dahan pour son enthousiasme à chaque rencontre et pour son entrain concernant son impressionnant travail de recherche, je regrette de ne pas l'avoir plus souvent mais c'était un plaisir de le connaître ! Merci à Arthur Troupel pour son allégresse tranquille et son chaleureux (sou)rire. Merci à Tal Gottseman qui m'a rappelé avec son style qu'il existait un monde au delà des skinny jeans et des t-shirts, et surtout pour son implication dans la vie doctorante à peine arrivée au labo, Tal présidente ! Merci à Zahra Mohsen pour nos discussions sur le chant et la religion, et pour ses super outfits qui transformaient chacune de ses traversées du couloir en un défilé de mode. Enfin, merci à William Gaudelier d'avoir pris ma relève pour tenir compagnie à Romain !

Je remercie aussi mes proches externes à mes labos, aussi bien ceux rencontrés dans le cadre du doctorat que ceux que j'ai connu à d'autres occasions. Merci à Armand Chillaud, mon EDMate, pour sa curiosité et son énergie qui nous a mené à passer de nombreuses longues soirées à parler de tout et de rien, et en particulier de musique, les échanges de conseils de compo, sa façon de s'exprimer ou une phrase sur deux est une punchline ! Merci à Oscar Zouzout, mon plus vieil ami avec qui on a fait les quatre-cent coups, pour s'être réfugié chez moi avant que son père ne m'appelle pour savoir si je ne l'ai pas vu (et oui, je l'ai vu), pour l'histoire de la lumière de contrôle parental, pour la bombe à eau qui a traversé le toit de la voisine, pour cette fois où on a fait le mur grâce à une échelle qu'on n'a pas pensé à ranger, pour les murs de notre cabane faits d'une barrière qui «n'appartenait à personne», et tant d'autres choses que je ferais mieux de ne pas dire ici. Merci à Ivanhoé Botcazou pour sa bienveillance et sa positivité constante, pour avoir été présent dans des moments difficiles, et toute l'aide qu'il a pu m'apporter. Je n'oublierai pas nos discussions sur l'art, l'enseignement, ni cette semaine mémorable en Bretagne

(Primousse non plus certainement)! Merci à la Team Pause; Antoine Lepeltier, Baptiste Souilhac et Evin Dokur, les Loups dans la Bergerie, pour toutes les séances de révisions à la BU, les pauses, les pauses dans les pauses, les Fubini et les Taylor, les «Eh, en vrai» et les «Gros, c'est claqué». Merci au Crew Spectral, Kevin Guillon, Adrien Tendani et Thomas Borsoni, pour les conférences passées ensemble, dont la majorité des repas ont été passés à s'étouffer de rire (les pauvres steaks végétariens et autres déboires au Régent, le fromage-confiture, les trois t-shirts, la règle des cinq secondes, les flancs chocolat et vanille qui gigotent...). On se souviendra longtemps de l'AirBnB qu'on a trouvé en testant toutes les serrures, et qu'on a quitté après le contretemps inattendu d'Adrien. Je aussi remercie ma famille qui a toujours été présente et m'a permis de faire mes premières années de licence dans de bonnes conditions.

Enfin, je remercie les enseignants qui ont marqué mon parcours mathématique et qui constituent des exemples pédagogiques, en particulier Rached Mneimné qui m'a appris ce qu'était l'élégance en mathématiques, Mathieu Bonnivard pour ses TDs commençant toujours par des rappels de cours, Samy Abbes qui est un modèle de pédagogie et m'a fait comprendre l'importance de rédiger ses idées pour les mettre à l'épreuve, Patrick Lemeur pour ses exigences de rigueur, Adina Ciomaga pour sa pédagogie et ses DMs qui nous ont tant fait progresser, mais aussi pour sa confiance et son soutien, Thierry De Pauw pour sa clarté même dans une matière qui ne m'intéressait pas. Enfin, Jean Voisin pour avoir été aussi prévenant, encourageant et avoir cru en moi dès le début!

Résumé

L'équation de Boltzmann, introduite par J.C. Maxwell et L. Boltzmann à la fin du XIX^{ème} siècle décrit l'évolution d'un gaz au niveau moléculaire à l'aide d'un point de vue statistique. Plus précisément, au lieu de considérer la position et la vitesse exactes de chacune des particules constituant le gaz, on s'intéresse à leurs répartitions statistiques pour une particule typique (on parle de point de vue mésoscopique ou cinétique).

En 1900, D. Hilbert présenta à l'occasion du Congrès international des mathématiciens une liste de 23 problèmes, le sixième s'intitulant «Problème d'axiomatisation de la physique». Dans le cas de la mécanique des fluides, il consiste en la dérivation des équations hydrodynamiques (point de vue macroscopique) à partir des équations cinétiques (point de vue mésoscopique), qui doivent elles-même être dérivées des équations de Newton appliquées à l'ensemble des particules constituant le gaz (point de vue microscopique). Il s'avère qu'une solution de Boltzmann proche d'un équilibre spatialement homogène se comporte comme la somme de celui-ci et d'une perturbation dont la dynamique est dictée par les équations de Navier-Stokes. Ce fait a été démontré rigoureusement entre les années 1990 et 2000 dans une série d'articles par C. Bardos, F. Golse, D. Levermore et L. Saint-Raymond. Cependant les outils utilisés nécessitaient que la donnée initiale pour l'équation de Boltzmann décroisse comme une gaussienne par rapport à la variable de vitesse, ce qui est très loin des hypothèses physiquement pertinentes d'avoir une décroissance polynomiale d'ordre 2 (masse et énergie finie). Les travaux de C. Mouhot, M.P. Gualdani et S. Mischler entre 2005 et 2017 ont développé une «théorie d'élargissement (d'espaces fonctionnels)» permettant de construire des solutions pour l'équation de Boltzmann pour des données initiales avec une décroissance polynomiale. Les deux premiers travaux de cette thèse traitent de la dérivation des équations de Navier-Stokes depuis l'équation de Boltzmann pour de telles données initiales.

La dernière partie de cette thèse, en collaboration avec K. Carrapatoso, ne concerne pas la dérivation des équations de Navier-Stokes, mais l'existence de solutions pour l'équation de Boltzmann, toujours pour des données initiales ayant une décroissance polynomiale, et sans négliger la «singularité angulaire» présente dans l'opérateur de collisions. En effet, une des principales difficultés mathématiques de l'équation de Boltzmann provient des interactions entre paires de particules «éloignées». Considérées individuellement, elles n'influent

que peu sur les vitesses des particules, mais sont extrêmement nombreuses, ce qui se traduit par la présence de la «singularité angulaire» dans l'opérateur modélisant leur effet. Cette difficulté est responsable de la très lente évolution de la théorie mathématique de l'équation de Boltzmann. C'est en 1963 que H. Grad proposa une façon de négliger cette singularité, menant à une progression rapide de notre compréhension de cette équation. Cette singularité angulaire n'est cependant pas anodine, elle procure entre autre un effet régularisant à l'équation, et a été étudiée dans de nombreux travaux à partir des années 1990.

Mots-clés

Boltzmann, Navier-Stokes, limite hydrodynamique, analyse asymptotique, théorie spectrale, perturbation de valeurs propres, décroissance polynomiale, théorie d'élargissement, singularité angulaire, interactions longue portée.

Hydrodynamic limits problems

Abstract

The Boltzmann equation, introduced by J.C. Maxwell and L. Boltzmann at the end of the 19th century, describes the evolution of a gas at the molecular level using a statistical point of view. More precisely, instead of considering the exact position and velocity of each of the particles making up the gas, we are interested in their statistical distributions for a typical particle (we speak of a mesoscopic or kinetic point of view).

In 1900, D. Hilbert presented on the occasion of the International Congress of Mathematicians a list of 23 problems, the sixth being the “Problem of axiomatization of physics”. In the case of fluid mechanics, it consists in the derivation of hydrodynamic equations (macroscopic point of view) from kinetic equations (mesoscopic point of view), which must themselves be derived from Newton’s equations applied to all the particles making up the gas (microscopic point of view). It turns out that a Boltzmann solution close to a spatially homogeneous equilibrium behaves like the sum of this equilibrium and a perturbation whose dynamics are dictated by the Navier-Stokes equations. This fact was rigorously demonstrated between the 1990s and 2000s in a series of articles by C. Bardos, F. Golse, D. Levermore and L. Saint-Raymond. However, the tools used in these works required that the initial datum for the Boltzmann equation decreased like a Gaussian with respect to the velocity variable, which is very far from the physically relevant assumptions of having a polynomial decay of order 2 (finite mass and energy). The works of C. Mouhot, M.P. Gualdani and S. Mischler between 2005 and 2017 developed an “enlargement theory (of functional spaces)” allowing to build solutions for the Boltzmann equation for initial data having a polynomial decay. The first two works of this thesis deal with the derivation of the Navier-Stokes equations from the Boltzmann equation for such initial data.

The last part of this thesis, in collaboration with K. Carrapatoso, is not concerned with the derivation of the Navier-Stokes equations, but the existence of solutions for the Boltzmann equation, still for initial data having polynomial decay, and without neglecting the “angular singularity” present in the collision operator. Indeed, one of the main mathematical difficulties of the Boltzmann equation comes from the interactions between pairs of “distant” particles. Considered individually, they have little influence on the velocities of the particles, but are extremely frequent, which results in the presence of the “angular singularity” in the operator modeling their effect. This difficulty is responsible for the very slow evolution of the mathematical theory of the Boltzmann equation. In 1963, H. Grad proposed a way to neglect this singularity, leading to a rapid progress in our understanding

of this equation. This angular singularity is however not insignificant, it provides among other things a regularizing effect to the equation, and has been studied in many works since the 1990s.

Keywords

Boltzmann, Navier-Stokes, hydrodynamic limits, asymptotic analysis, spectral theory, perturbation of eigenvalues, polynomial decay, enlargement theory, angular singularity, long range interactions.

Table des matières

I	Introduction	17
1	Les modèles et leurs liens	21
1.1	La description macroscopique	21
1.1.1	Équations d'Euler compressibles	21
1.1.2	Équation des ondes	22
1.1.3	Équations de Navier-Stokes	22
1.2	La description microscopique	23
1.3	La description mésoscopique	24
1.4	L'équation de Boltzmann	27
1.4.1	Interprétation du terme de collisions	27
1.4.2	Géométrie des collisions	28
1.4.3	Le noyau de collision	29
1.5	Propriétés de l'opérateur de collision	32
1.5.1	Invariants de collisions et lois de conservation	32
1.5.2	Entropie et convergence vers l'équilibre	34
1.6	Le sixième problème de Hilbert	38
1.6.1	Limites thermodynamique du modèle microscopique	39
1.6.2	Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann	41
1.7	Conclusion	46
2	Étude mathématique de Boltzmann et ses limites	47
2.1	Théories loin de l'équilibre	47
2.1.1	Théorie spatialement homogène	47
2.1.2	Théorie de DiPerna-Lions.	48
2.2	Théorie près de l'équilibre	50
2.2.1	Stratégies	51
2.2.2	Théorie spectrale et des semigroupes	57
2.2.3	Théorie d'élargissement	62
2.2.4	Propriétés des opérateurs linéarisé homogène \mathcal{L} et inhomogène Λ	66
2.2.5	Théorie de Cauchy existante	75

2.3	Limites hydrodynamiques	76
2.3.1	Comparaison des formulations intégrales	77
2.3.2	Approche de Bardos-Ukai [24] et Gallagher-Tristani [86]	79
2.3.3	Approche de Briant-Merinho-Mouhot [35]	80
2.3.4	Autres approches	80
2.4	Conclusion	81
3	Les travaux présentés dans ce manuscrit	83
3.1	Étude spectrale pour des poids polynomiaux	83
3.1.1	Présentation et commentaires des résultats	84
3.1.2	Guide de lecture	86
3.2	Limite hydrodynamique avec donnée initiale générale	90
3.2.1	Présentation et commentaires des résultats	91
3.2.2	Guide de lecture	93
3.3	Boltzmann avec potentiels mous dans \mathbb{R}^3 (sans cutoff)	96
3.3.1	Présentation et commentaires des résultats	97
3.3.2	Guide de lecture	98
3.4	Boltzmann avec potentiels mous dans \mathbb{R}^3 (avec cutoff)	103
3.4.1	Présentation et commentaires des résultats	103
3.4.2	Guide de lecture	104
3.5	Améliorations possibles et perspectives	105
II	Travaux menés durant la thèse	109
4	Spectral study of the linearized operator	111
4.1	Introduction	112
4.1.1	The model	113
4.1.2	Statement of the main results	114
4.1.3	Method of proof and state of the art	117
4.1.4	Outline of the paper	118
4.1.5	Notations and definitions	118
4.2	General properties of the linearized operator	119
4.2.1	Closedness and decomposition of \mathcal{L}_ξ	120
4.2.2	Spectral gap properties of \mathcal{L}_ξ	123
4.3	The eigenproblem for small ξ	125
4.4	Exponential decay of the semigroup	131
4.5	Appendix	133
4.5.1	Spectral theory	133
4.5.2	Semigroup theory	134

4.6	References	135
5	From Boltzmann to Navier-Stokes-Fourier	137
5.1	Introduction	139
5.1.1	The models	139
5.1.2	Statement of the main result	146
5.1.3	Notations	148
5.1.4	Main reductions	149
5.1.5	Comparison with previous works	150
5.1.6	Outline of the paper	150
5.2	Study in the polynomial space	151
5.2.1	Splitting of the linearized operator	151
5.2.2	A priori estimates	154
5.3	Bounds and asymptotics of the semigroup	159
5.3.1	The eigenprojectors and partial semigroups on the Gaussian space	159
5.3.2	Spectral properties on the polynomial spaces	163
5.4	Study in the Gaussian space	170
5.5	Proof of Theorem 4	180
5.6	Appendix A. Technical estimates	183
5.7	References	184
6	Boltzmann with soft potentials	187
6.1	Introduction	188
6.1.1	The model	188
6.1.2	State of the art	189
6.1.3	Notations	190
6.1.4	Functional spaces and norms	190
6.1.5	Main results	191
6.1.6	Outline of the paper	191
6.2	Estimates on the collision operator	191
6.2.1	Homogeneous estimates in the non-cutoff case	191
6.2.2	Inhomogeneous estimates in the non-cutoff case	196
6.2.3	Estimates in the cutoff case	200
6.3	Linear theory	202
6.3.1	Estimates on \mathcal{L}	202
6.3.2	Estimates on Λ	207
6.4	Cauchy theory in the non-cutoff case	209
6.4.1	Stability of the scheme	210
6.4.2	Convergence of the scheme	211
6.4.3	Uniqueness of the solution	213

6.5	Cauchy theory in the cutoff case	214
6.6	Appendix A. Auxiliary results	215
6.7	References	218

Bibliographie**221**

Première partie

Introduction

Nous présentons quelques prérequis pour l'étude de l'équation de Boltzmann avec comme finalité le problème de Cauchy près de l'équilibre (existence, unicité et retour à l'équilibre) ainsi que ses limites hydrodynamiques. En particulier, nous n'évoquerons pas les questions de bords, de chocs, etc.

Les différents modèles présentés dans ce manuscrit sont écrits en dimension $d = 3$ afin de simplifier leur présentation, cependant les travaux [88, 89] présentés dans les Sections 3.1 et 3.2 concernent les cas $d = 2, 3$.

Chapitre 1

Les modèles et leurs liens

1.1 La description macroscopique

Un fluide est décrit à l'échelle macroscopique par un modèle dit «hydrodynamique», c'est-à-dire qu'il est décrit comme un milieu continu au travers d'un petit nombre de quantités définies à l'instant $t \geq 0$ et à la position $x \in \mathbb{R}^3$ telles que sa vitesse $U(t, x) \in \mathbb{R}^3$, sa pression $P(t, x) \in \mathbb{R}$, sa température $T(t, x) \geq 0$, ou encore sa densité $R(t, x) \geq 0$ sur des échelles «humaines» (i.e. de l'ordre du mètre, de la seconde, etc.). Commençons par présenter trois modèles fondamentaux sur lesquels nous reviendrons dans ce manuscrit.

1.1.1 Équations d'Euler compressibles

Les équations d'Euler, parmi les plus anciennes équations aux dérivées partielles, furent introduites par Léonard Euler¹ en 1757 [82] pour modéliser l'écoulement d'un fluide non-visqueux et incompressible puis complétées par Pierre-Simon de Laplace² en 1816 afin de couvrir les fluides compressibles. Le lien entre la pression et les autres quantités hydrodynamiques—ou *loi d'état*—dépend du type de gaz considéré. On ne s'intéressera ici qu'aux gaz parfaits, dont la pression est de la forme $P = RT$, d'une part pour simplifier la présentation, et d'autre part car il s'agit de l'unique loi d'état compatible avec l'équation de Boltzmann (voir Section 1.6.2). Le système d'équations d'Euler s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t R + \nabla_x \cdot (RU) = 0, \\ \partial_t (RU) + \nabla_x \cdot (RU \otimes U) + \nabla_x P = 0, & P = RT, \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} R|U|^2 + \frac{3}{2} RT \right) + \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{2} RU|U|^2 + \frac{5}{2} RTU \right) = 0. \end{cases}$$

La première équation signifie que la masse du fluide est transportée par le mouvement du fluide et est conservée. La deuxième, obtenue en appliquant la seconde loi de Newton³ à des

1. 1707-1783

2. 1749-1827

3. La seconde loi de Newton affirme que $\frac{d}{dt}$ (quantité de mouvement) = forces

portions infinitésimales du fluide, traduit la conservation de la quantité de mouvement. La troisième exprime la conservation de l'énergie totale, c'est-à-dire la somme de son énergie cinétique $\frac{1}{2}R|U|^2$ et thermique $\frac{3}{2}RT$.

1.1.2 Équation des ondes

Lorsque le fluide est proche d'un état d'équilibre—par exemple de densité et température normalisées et de vitesse nulle ($R = T = 1$ et $U = 0$)—on peut s'intéresser aux fluctuations autour de cet équilibre, c'est-à-dire aux quantités ρ, u et θ définies par les approximations $R \approx 1 + \rho$, $U \approx 0 + u$ et $T \approx 1 + \theta$, ce qui implique en particulier $P \approx 1 + \rho + \theta$. En linéarisant (1.1.1) (i.e. en négligeant les termes quadratiques), on obtient le système de lois de conservations suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot u = 0, \\ \partial_t u + \nabla_x(\rho + \theta) = 0, \\ \partial_t \theta + \frac{2}{3} \nabla_x \cdot u = 0, \end{cases}$$

dont on déduit un système d'équations des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t^2(\rho + \theta) = c^2 \Delta_x(\rho + \theta), \\ \partial_t^2(\nabla_x \cdot u) = c^2 \Delta_x(\nabla_x \cdot u), \end{cases} \quad (1.1)$$

où $c = \sqrt{\frac{5}{3}}$ est la vitesse du son dans le fluide représenté par l'état stationnaire autour duquel on a linéarisé le système d'Euler.

1.1.3 Équations de Navier-Stokes

Les équations d'Euler ne prennent pas en compte la viscosité. Pour pallier à cela, Henri Navier⁴ introduisit en 1823 un terme modélisant son effet dans les équations d'Euler, et c'est Georges Gabriel Stokes⁵ qui formula en 1845 les équations de Navier-Stokes sous leur forme actuelle. Dans ce manuscrit, ce système sera utilisé pour décrire des fluctuations autour d'un état d'équilibre, donc en conservant les notations du paragraphe précédent, l'équation satisfaite par la fluctuation de vitesse est

$$\partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \mu \Delta_x u,$$

où $\mu > 0$ est la viscosité du fluide. De plus, cette équation sera toujours assortie d'une condition d'incompressibilité, et couplée avec une équation modélisant l'advection et diffusion de la fluctuation de chaleur, elle même assortie de la *relation de Boussinesq* liant la

4. 1785-1836

5. 1819-1903

fluctuation de densité et chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \mu \Delta_x u, & \nabla_x \cdot u = 0, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta, & \nabla_x (\rho + \theta) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\kappa > 0$ est la conductivité thermique du fluide. La pression peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange associé à la condition d'incompressibilité $\nabla_x \cdot u = 0$, elle peut être déduite de u en prenant la divergence des deux membres de l'équation sur u :

$$\nabla_x \cdot (u \cdot \nabla_x u) + \Delta_x p = 0,$$

ce qui nous indique que p est en réalité une fonction de u car le Laplacien est inversible sous certaines conditions. On peut également voir $\nabla_x p$ comme la partie compressible du terme non-linéaire $u \cdot \nabla_x u$, ainsi en projetant l'équation décrivant la dynamique de u sur l'espace des champs incompressibles à l'aide du *projecteur de Leray* \mathbb{P} , on obtient

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbb{P}(u \otimes u) = \mu \Delta_x u, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta, & \nabla_x (\rho + \theta) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Une première remarque importante est que les conditions d'incompressibilité et de Boussinesq interdisent l'apparition d'ondes acoustiques décrites par (1.1), une seconde est que la relation de Boussinesq implique que $\rho + \theta$ est constant, et en particulier nul si on impose que le gaz ait une énergie finie.

1.2 La description microscopique

Un autre point de vue peut être adopté pour décrire un fluide ; le point de vue *microscopique*. Au lieu de le considérer comme un milieu continu, on peut s'intéresser au mouvement de chacune des particules qui le constitue. On le considère alors comme un système d'un grand nombre N de particules (typiquement de l'ordre du nombre d'Avogadro 6×10^{23}) de positions $(x_i(t))_{i=1}^N$ et de vitesses $(v_i(t))_{i=1}^N$ évoluant selon les lois de Newton :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = \mathcal{F}_i(t), \end{cases}$$

où $\mathcal{F}_i(t)$ est la force subie par la i -ème particule. Plusieurs situations sont possibles pour ces forces, par exemple

- Lorsque les forces sont nulles, c'est-à-dire que les particules sont uniquement soumises

à leurs inerties et se déplacent ainsi en ligne droite :

$$v_i(t) = v_i(0), \quad x_i(t) = x_i(0) + tv_i(0). \quad (1.4)$$

- Dans le cas d'un gaz de Rayleigh ou de Lorentz (voir [177, 160, 162, 161]), les forces sont induites par les interactions avec des obstacles situés à des positions $(y_j)_{j=1}^M$ via un potentiel d'interaction $\Phi = \Phi(x)$, dans ce cas on a

$$\mathcal{F}_i(t) = - \sum_{j=1}^M \nabla_x \Phi(x_i(t) - y_j). \quad (1.5)$$

- Les particules interagissent deux à deux via un potentiel d'interaction $\Phi = \Phi(x)$, dans ce cas

$$\mathcal{F}_i(t) = - \sum_{j \neq i} \nabla_x \Phi(x_i(t) - x_j(t)).$$

Cette situation a lieu par exemple lorsque les particules sont chargées positivement et se repoussent mutuellement mais que le gaz est suffisamment dilué pour que les interactions faisant intervenir plus de deux particules soient négligées.

Un autre modèle est celui des *sphères dures* ; les particules interagissent uniquement lorsqu'elles rentrent en contact pour rebondir comme des boules de billards, autrement elles se déplacent en ligne droite. Comme nous le verrons, ce modèle simplifié a permis pour la première fois d'établir la correspondances entre les modèles microscopiques, macroscopiques et les modèles mésoscopiques que nous allons présenter à la prochaine section.

1.3 La description mésoscopique

Le niveau *mésoscopique* est un niveau de description intermédiaire entre le niveau microscopique et le niveau macroscopique où l'on considère que le nombre de particules est si grand et leurs tailles si petites que l'on peut modéliser le gaz comme un milieu continu. Contrairement au niveau microscopique, on ne s'intéresse pas aux positions et vitesses exactes des particules mais à leur répartition statistique. Mais contrairement au niveau macroscopique, la répartition statistique des vitesses en chaque point de l'espace n'est pas suffisamment resserrée autour d'une valeur moyenne pour se permettre de négliger les fluctuations statistiques autour de celle-ci (plus précisément, le gaz n'est pas localement à l'équilibre thermodynamique). Le fluide est alors décrit à l'aide d'une fonction de densité $F = F(t, x, v)$ sur l'espace des phases $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$ de sorte qu'à l'instant t , le nombre moyen de particules se trouvant à une position x et se déplaçant à une vitesse v , où $(x, v) \in U \subset$

$\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$, soit donné par l'intégrale

$$\int_U f(t, x, v) dx dv.$$

La *théorie cinétique des gaz* a pour vocation d'expliquer des propriétés macroscopiques telles que la pression, la viscosité ou la température par des phénomènes microscopiques en adoptant un point de vue statistique. En particulier, elle apporta des formules pour la viscosité et la conductivité thermique qui jusque là étaient déterminées de façon expérimentale, et réciproquement elles permirent d'estimer la taille des molécules de gaz (dont l'existence était à l'époque sujet à débat). Cette vision remonte au moins à Daniel Bernoulli⁶ qui postula en 1738 dans son traité *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii* [25] que la pression d'un gaz serait dû aux chocs des particules le constituant contre les parois du récipient. Les travaux de Sadi Carnot⁷, August Karl Krönig⁸, Rudolph Clausius⁹ aboutirent à la notion d'entropie et à la formulation de la seconde loi de la thermodynamique affirmant que cette dernière ne peut qu'augmenter.

C'est durant la seconde moitié du XIX^{ème} siècle que les modèles mathématiques pour la mécanique statistique furent développés par James Clerk Maxwell¹⁰ et Ludwig Boltzmann¹¹. En 1860, Maxwell affirma qu'un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique est constitué de particules dont les vitesses v suivent une loi normale de valeur moyenne la vitesse macroscopique U et de variance la température T :

$$\frac{1}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v - U|^2}{2T}\right).$$

L'équation aux dérivées partielles aujourd'hui connue sous le nom d'équation de Boltzmann, dictant l'évolution d'un gaz hors de l'équilibre thermodynamique, apparue sous une première forme «faible» dans les travaux de Maxwell [151, équation 3], fait intervenir l'effet des collisions entre paires de particules. Elle fut réécrite sous une forme «forte» par Boltzmann en 1872 [30] qui donna l'expression explicite du terme décrivant le processus de collisions. Depuis, différents modèles cinétiques ont été développés pour modéliser des phénomènes variés tels que des plasmas, les galaxies, les aérosols, des paquets d'électrons... De manière générale, une telle approche sera adoptée dès que l'on s'intéresse à une grande collection d'éléments distincts dont on sait modéliser les dynamiques individuelles, mais dont les informations que leur étude apporterait sont moins intéressantes que leurs informations statistiques.

Lorsque les particules ne sont soumises à aucune force, elles se déplacent en ligne droite

6. 1700-1782

7. 1796-1832

8. 1822-1879

9. 1822-1888

10. 1831-1879

11. 1844-1906

et leur densité $F = F(t, x, v)$ suit l'équation de transport libre :

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = 0, \quad (1.6)$$

qui est la formulation cinétique du modèle (1.4), et dont la solution n'est rien d'autre que la translation de la distribution à l'instant initial :

$$F(t, x, v) = F(0, x - vt, v).$$

Lorsqu'en revanche les particules sont soumises à une forces extérieure \mathcal{F} (à valeur dans \mathbb{R}^3), il convient d'ajouter un terme modélisant l'effet de celles-ci, on obtient alors l'équation de *Vlasov* :

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F + \mathcal{F} \cdot \nabla_v F = 0.$$

On peut citer par exemple le cas où la force $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ a pour but de concentrer les particules dans une région de l'espace et dérive d'un potentiel dit *de confinement* $\Phi = \Phi(x)$, dans cet cas $\mathcal{F}(x) = \nabla_x \Phi(x)$. Un autre exemple est celui de l'équation de *Vlasov-Poisson*, modélisant des particules interagissant deux à deux via une force inversement proportionnelle au carré de la distance ; soit en se repoussant dans le cas de particules chargées électriquement, soit en s'attirant dans le cas de corps célestes s'attirant mutuellement au sein d'une galaxie. La quantité de particules étant très importante, et les forces ayant lieu sur des échelles spatiales non-négligeables par rapport aux échelles spatiales de ces modèles, elles se «mélangent» en un champ moyen \mathcal{F} induit par la charge ou masse cumulée des particules R via :

$$R(t, x) = \int F(t, x, v) dv, \quad \mathcal{F}(t, x) = \pm \int R(t, y) \frac{x - y}{|x - y|^3} dy,$$

ce qui correspond au modèle (1.2). Lorsque les particules interagissent (entre elles ou avec le milieu dans lequel elles évoluent) via des forces agissant sur des distances négligeables relativement à l'échelle spatiale du modèle, ces forces ne sont pas modélisées par un champ moyen mais sont *localisées* : à chaque instant t et en tout point de l'espace x fixé ces interactions ne dépendent que de la distribution statistique des vitesses à cet instant t et ce point de l'espace x et pas celles à un autre point x' . Ces interactions sont qualifiées de *collisions* et modélisées par un terme \mathcal{C} dit *de collision* :

$$\partial_t F(t, x, v) + v \cdot \nabla_x F(t, x, v) = \mathcal{C}(F(t, x, \cdot))(v).$$

On peut citer, pour des interactions avec le milieu, les équations de *Fokker-Planck* ou *Boltzmann linéaire* pour lesquels l'opérateur \mathcal{C} est respectivement $F \mapsto \Delta_v F + \nabla_v \cdot (vF)$ ou un opérateur intégral dérivé du modèle (1.5). Lorsque les collisions ont lieu entre paires de particules, on considère l'équation de *Boltzmann* pour les gaz raréfiés, ou *de Landau*

pour les plasmas, toutes deux de la forme

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \mathcal{Q}(F, F),$$

où \mathcal{Q} est un opérateur bilinéaire. Dans la section suivante, nous présentons plus en détails l'équation de Boltzmann.

1.4 L'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann modélise un gaz dont l'évolution n'est influencée que par des collisions élastiques et micro-réversibles (réversibles quand modélisées à l'échelle microscopique) entre particules. Le gaz est supposé monoatomique et dilué de sorte que les collisions entre trois particules ou plus soient négligées. Enfin, on fait l'hypothèse de chaos moléculaire : seules des particules décorréelées entrent en collision. L'équation de Boltzmann s'écrit alors

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \mathcal{Q}(F, F),$$

où le terme non-linéaire $\mathcal{Q}(F, F)$ représente la variation du nombre de particules se déplaçant à la vitesse v due aux collisions et est défini par l'intégrale

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(F, F)(v) &:= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} B(v, v_*, \sigma) (F'_* F' - F_* F) \, d\sigma dv_*, \\ F'_* &:= F(v'_*), \quad F' := F(v'), \quad F_* := F(v_*). \end{aligned}$$

Ici, $(v, v_*) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ sont les vitesses d'une paire de particules après une collision, et $(v', v'_*) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ leurs vitesses avant collision. Ces dernières sont entièrement déterminées par (v, v_*) et le paramètre d'impact $\sigma \in \mathbb{S}^2$ de par l'élasticité des collisions (voir Section 1.4.2). Le terme $B(v, v_*, \sigma)$ est le *noyau de collision*, il encode en un sens la probabilité qu'une telle collision ait lieu (voir Section 1.4.3).

1.4.1 Interprétation du terme de collisions

L'opérateur de collision $\mathcal{Q}(F, F)$ représente la variation du nombre de particules se déplaçant à la vitesse v . Elle peut se voir comme la différence du nombre $\mathcal{Q}^+(F, F)(v)$ de particules ayant acquis la vitesse v , et du nombre $\mathcal{Q}^-(F, F)(v)$ de particules ayant perdu la vitesse v . Ce découpage $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^+ - \mathcal{Q}^-$ n'est pas possible en général car les intégrales définissant chaque morceau divergent, sauf comme nous le verrons à la Section 1.4.3 dans le cas très particulier des sphères dures ou du «cutoff angulaire». Nous reviendrons sur ce problème dans la Section 1.4.3.

Le nombre de particules ayant perdu la vitesse v suite à une collision avec une particule

de vitesse v_* est donné par

$$\mathcal{Q}^-(F, F)(v) := \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} B(v, v_*, \sigma) F_* F d\sigma dv_*.$$

On peut comprendre cette quantité comme

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \text{proba. d'une collision } (v, v_*) \times \text{qté. de particules de vitesses } (v, v_*) d\sigma dv_*,$$

et le fait que seules des particules décorrélées n'entrent en collision se traduit par le fait que la quantité de paires de particules de vitesses (v, v_*) se tensorise en FF_* .

De façon similaire, le nombre de particules se déplaçant nouvellement à la vitesse v , mais qui se déplaçaient auparavant à une vitesse v' avant d'entrer en collision avec une particule de vitesse v'_* est donné par

$$\mathcal{Q}^+(F, F)(v) := \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} B(v, v_*, \sigma) F'_* F' d\sigma dv_*.$$

1.4.2 Géométrie des collisions

Comme évoqué à la section précédente, le fait que les collisions soient élastiques impose une certaine rigidité sur les relations entre les couples de vitesses pré-collisionnelles (v', v'_*) et post-collisionnelles (v, v_*) . En effet, les particules étant de même masse, la conservation de quantité de mouvement et d'énergie impliquent respectivement les relations

$$\begin{aligned} v + v_* &= v' + v'_*, \\ |v|^2 + |v_*|^2 &= |v'|^2 + |v'_*|^2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Géométriquement, la première relation signifie que les segments $[v, v_*]$ et $[v', v'_*]$ se coupent en leur milieu $\frac{1}{2}(v + v_*)$ et sont donc les diagonales d'un parallélogramme. La seconde relation réécrite en prenant pour origine le point d'intersection des diagonales devient

$$|v - v_*|^2 = |v' - v'_*|^2, \tag{1.8}$$

c'est-à-dire que les diagonales sont de même longueur ; ce parallélogramme est donc un rectangle. On en déduit qu'étant donnés v et v_* , v' et v'_* sont déterminés de façon unique modulo un paramètre $\sigma \in \mathbb{S}^2$ exprimant la direction de déviation par rapport à la vitesse moyenne :

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \sigma \frac{|v - v_*|}{2}, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \sigma \frac{|v - v_*|}{2},$$

ou bien modulo un paramètre $\omega \in \mathbb{S}^2$ exprimant la direction de déviation entre les vitesses après et avant collision, et qui est à interpréter comme la direction entre le centre de la

particule de vitesse v_* et celle de vitesse v (voir Section 1.6.1) :

$$v' = v - [(v - v_*) \cdot \omega] \omega, \quad v'_* = v_* + [(v - v_*) \cdot \omega] \omega$$

On note θ l'angle formé par la direction de la vitesse relative post-colisionnelle σ et pre-colisionnelle $k := \frac{v-v_*}{|v-v_*|}$, qualifié d'*angle de déviation*.

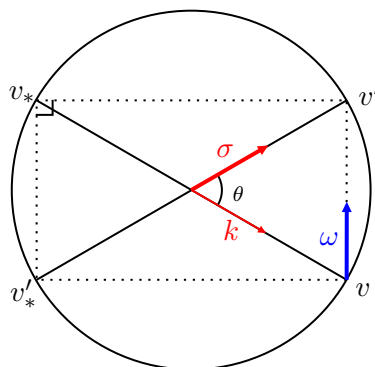


FIGURE 1.4.1 – Répartition des vitesses dans le référentiel barycentrique (c'est-à-dire le centre de masse de la paire de particules).

1.4.3 Le noyau de collision

Le noyau de collision dépend de l'interaction considérée entre les particules (rappelons que nous entendons par «collision» une interaction modélisée comme instantanée et localisée) et est à l'origine des principales difficultés dans l'étude mathématique de l'équation de Boltzmann. Il est défini de façon implicite en résolvant un problème de diffusion de particules (voir [51, 91] pour plus de détails) et n'admet pas de forme explicite en dehors des modèles de sphères dures et d'interactions de Coulomb. Cependant, Maxwell a montré dans [151] que dans le cas de forces intermoléculaires dérivant d'un potentiel de type loi de puissance, on peut dégager suffisamment de ses propriétés pour comprendre son effet dans l'équation de Boltzmann. Tout d'abord, par l'invariance galiléenne des collisions, B ne dépend que de la vitesse relative $|v - v_*|$ et du cosinus de l'angle de déviation θ :

$$B(v, v_*, \sigma) = B(|v - v_*|, \cos \theta).$$

Dans le cas où les particules se repoussent via des forces de type loi de puissance, B se factorise en une *partie cinétique* dépendant de la vitesse relative et une *partie angulaire* dépendant de $\cos \theta$:

$$B(|v - v_*|, \cos \theta) = \Phi(|v - v_*|)b(\cos \theta).$$

Nous présentons ici les propriétés de Φ et b lorsque la force exercée entre deux particules séparées d'une distance d est proportionnelle à d^{-p} , où $p > 2$.

La partie cinétique.

La partie cinétique prend la forme

$$\Phi(|v - v_*|) = |v - v_*|^\gamma, \quad \gamma := \frac{p-5}{p-1} \in (-3, 1),$$

et on distingue différentes instances de l'équation de Boltzmann en fonction de ce paramètre :

- $\gamma \in [0, 1]$, correspondant aux cas $p \in [5, \infty]$, qualifiés de *potentiels durs*. Cette situation est la plus confortable car les petites vitesses relatives ne créent pas de singularité, et le retour à l'équilibre est exponentiellement rapide (voir Section 2.2.4).
- $\gamma \in (-3, 0)$, correspondant aux cas $p \in (2, 5)$, qualifiés de *potentiels mous*. Ce modèle est plus délicat à manipuler, d'une part à cause de la singularité due aux petites vitesses relatives et d'autre part car le retour à l'équilibre a lieu à une vitesse algébrique lorsque de plus $\gamma + 2s < 0$.

Parlons à présent des modèles limites $p = 2, \infty$ et intermédiaire $p = 5$:

- $\gamma = 0$, correspondant au cas $p = 5$, qualifié de *potentiel Maxwellien*. Ce modèle permet de s'affranchir des complications posées par Φ dues aux grandes valeurs qu'il peut prendre et d'isoler le rôle de la partie angulaire $b(\cos \theta)$. Ce modèle a été très utilisé par Maxwell et Boltzmann car il permet des calculs explicites.
- $\gamma = 1$, correspondant au cas $p = \infty$, qualifié de *sphères dures*. Dans ce modèle, on considère qu'une particule se déplace en ligne droite jusqu'à rebondir contre une autre à la façon d'une boule de billard.
- $\gamma = -3$, correspond au cas $p = 2$, c'est-à-dire au potentiel de Coulomb modélisant des particules chargées électriquement. Cependant, Φ présentant ainsi une singularité non-intégrable, le terme $\mathcal{Q}(F, F)$ est mal défini même pour des fonction F très régulières. On utilise plutôt l'équation de Landau (1.10) pour ce type d'interaction.

La partie angulaire

Pour des raisons de symétrie, la partie angulaire $b(\cos \theta)$ peut être supposée à support dans $\theta \in [0, \pi/2]$. Elle est lisse excepté en $\theta = 0$ où elle présente une singularité non-intégrable sur la sphère :

$$\sin \theta b(\cos \theta) \approx \theta^{-(1+2s)}, \quad s := \frac{1}{p-1} \in (0, 1).$$

Notons qu'un petit angle de déviation $\theta \approx 0$ correspond à une collision durant laquelle les particules ne dévient que peu ($v' \approx v$ et $v'_* \approx v_*$, voir Figure 1.4.1), qualifiée de *collision rasante*. Cette situation intervient quand des particules en interactions sont très éloignées et donc n'affectent pas leurs vitesses de façon significative. De telles interactions sont très

probables, ce qui se traduit par une singularité non-intégrable de $b(\cos\theta)$ en $\theta \approx 0$. Ainsi, seul le modèle des sphères dures ($p = \infty$ et donc $s = 0$) pour lequel les particules n'interagissent pas à distance ne présente aucune singularité angulaire et admet donc pour noyau de collision

$$B(v - v_*, \sigma) = K|v - v_*|.$$

Pour étudier les autres modèles, Harold Grad¹² a introduit en 1958 dans [99] l'hypothèse aujourd'hui très répandue de *cutoff angulaire*. Elle consiste à négliger les interactions à longue distance et donc à «couper» les collisions rasantes. L'hypothèse de cutoff se décline en plusieurs versions plus ou moins fortes, mais l'idée est à chaque fois de considérer que b est intégrable sur la sphère :

$$\int_{\mathbb{S}^2} b(\cos\theta) d\sigma = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta b(\cos\theta) d\theta < \infty, \quad (1.9)$$

où on a réécrit l'intégrale en coordonnées sphériques en choisissant $v - v_*$ comme axe. Dans cette situation, le découpage $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^+ - \mathcal{Q}^-$ présenté à la Section 1.4.1 est bien défini.

Lorsque les interactions à longue distance ne sont pas négligées, l'écriture $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^+ - \mathcal{Q}^-$ n'a plus de sens. En échange, on peut compter sur le phénomène de «compensation» de cette singularité : pour de petits angles de déviation ($\theta \approx 0$), les vitesses pré-post-collisionnelles sont très proches ($v' \approx v$ et $v'_* \approx v_*$) et donc $G'_*F' \approx G_*F$, si bien que l'on peut espérer estimer

$$Q(G, F)(v) \approx \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} |v - v_*|^\gamma \frac{G'_*F' - G_*F}{\theta^{2+2s}} dv_* d\sigma,$$

en terme de certaines dérivées de F . Comme nous le verrons à la Section 2.2.4, cette singularité fait que l'opérateur de collisions est comparable à un Laplacien fractionnaire :

$$Q(G, \cdot) \approx C(-\Delta_v)^s + \text{termes d'ordres inférieurs}, \quad C = C(G) > 0.$$

Les singularités sont ainsi lissées et non propagées comme dans le cas cutoff (voir [33, Théorème 2]).

Le cas limite $s = 1$ pour lequel les collisions rasantes sont prédominantes correspond formellement à l'équation de Landau :

$$\begin{aligned} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F &= \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^3} a(v - v_*) (F_* \nabla_v F - (\nabla_v F)_* F) dv_*, \\ a(z) &= |z|^{\gamma+2} \times \text{proj. orth. sur } z^\perp. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Cette équation fut introduite par Lev Landau¹³ en 1936 pour modéliser le comportement des plasmas dilués dont les particules interagissent par des collisions binaires. On réfère

12. 1923-1986

13. 1908-1968

à [8, 190, 19, 58, 55] pour la dérivation de l'équation de Landau à partir de celle de Boltzmann.

Pour résumer cette section, l'équation de Boltzmann s'écrit

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \mathcal{Q}(F, F), \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \Omega, \quad (1.11)$$

et dans ce manuscrit on ne s'intéressera qu'aux domaines spatiaux sans bord : $\Omega = \mathbb{R}^3$ ou \mathbb{T}^3 , et le noyau de collisions prend la forme

$$\begin{aligned} B(v - v_*, \sigma) &= |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta), \\ K^{-1} \theta^{-(1+2s)} &\leq \sin \theta b(\cos \theta) \leq K \theta^{-(1+2s)}, \quad \theta \in (0, \pi/2], \end{aligned}$$

où $\gamma \in (-3, 1)$ et $s \in (0, 1)$, ou bien dans le cas des sphères dures

$$B(v - v_*, \cos \theta) = K |v - v_*|.$$

1.5 Propriétés de l'opérateur de collision

Passons en revue quelques propriétés clés de l'équation de Boltzmann induites par l'opérateur de collision. Par souci de compacité, nous noterons dans cette section

$$d\zeta(v, v_*, \sigma) = B(v - v_*, \sigma) d\sigma dv_* dv.$$

1.5.1 Invariants de collisions et lois de conservation

Présentons quelques changement de variables qui nous serviront à introduire les principales propriétés physiques de l'équation de Boltzmann.

La transformation $(v, v_*, \sigma) \rightarrow (v, v_*, -\sigma)$ est involutive et laisse le noyau de collisions B invariant, ce qui traduit le fait que les particules (de vitesses v et v_*) sont indiscernables. Cette transformation est bien sûr unitaire, en particulier, on peut échanger dans une intégrale les variables (v, v') et (v_*, v'_*) :

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \phi(v, v_*, v', v'_*) d\zeta = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \phi(v_*, v, v'_*, v') d\zeta.$$

La transformation $(v, v_*, \sigma) \rightarrow (v', v'_*, k)$, où on rappelle que $k = \frac{v - v_*}{|v - v_*|}$, est une autre transformation involutive, unitaire laissant invariant le noyau de collision, traduisant cette fois-ci la micro-réversibilité des collisions. On peut ainsi échanger les vitesses post-collisionnelles notées (v, v_*) et pré-collisionnelles notées (v', v'_*) :

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \phi(v, v_*, v', v'_*) d\zeta = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \phi(v', v'_*, v, v_*) d\zeta. \quad (1.12)$$

En appliquant le changement de variable précédent à la formulation faible de l'opérateur de collision, on retrouve la définition originale de \mathcal{Q} identifiée par Maxwell [151, équation 3] avant la formulation forte de Boltzmann :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(F, F)\varphi(v)dv &= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F'_*F' - F_*F)\varphi d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} F_*F(\varphi' - \varphi)d\zeta. \end{aligned}$$

On obtient ensuite à l'aide du changement de variable $v \leftrightarrow v_*$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(F, F)\varphi(v)dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} FF_*(\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*)d\zeta. \quad (1.13)$$

Pour connaître les fonctions φ orthogonales à \mathcal{Q} on est ainsi ramené à se demander lesquelles satisfont l'équation fonctionnelle

$$\varphi + \varphi_* = \varphi' + \varphi'_*.$$

De telles fonctions sont qualifiées d'*invariants de collisions*. On peut montrer [17, 52] que dès lors que φ est mesurable, elle est une combinaison linéaire de $1, v, \frac{|v|^2}{2}$. En multipliant l'équation de Boltzmann par ces invariants de collisions on déduit ainsi que les quantités macroscopiques du gaz à savoir

- sa masse locale $R(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} F(t, x, v)dv$,
- sa quantité de mouvement locale $RU(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} F(t, x, v)v dv$, où U est sa vitesse,
- son énergie locale $\frac{1}{2}R|U|^2 + \frac{3}{2}RT = \int_{\mathbb{R}^3} F(t, x, v)\frac{|v|^2}{2}dv$, où T est sa température,

satisfont les lois de conservations locales suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t R + \nabla_x \cdot (RU) = 0, \\ \partial_t (RU) + \nabla_x \cdot (RU \otimes U + P_F) = 0, \\ \partial_t \left(\frac{1}{2}R|U|^2 + \frac{3}{2}RT \right) + \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{2}RU|U|^2 + \frac{5}{2}RUT \right) = \nabla_x \cdot \delta_F, \end{cases} \quad (1.14)$$

où l'on a noté P_F son tenseur de pression :

$$P_F = \int_{\mathbb{R}^3} (v - U) \otimes F dv, \quad (1.15)$$

et le terme δ_F est défini comme

$$\delta_F := - \int_{\mathbb{R}^3} FA(v - U) \cdot U dv - \int_{\mathbb{R}^3} FB(v - U)dv, \quad (1.16)$$

$$A(z) := z \otimes z - \frac{|z|^2}{3} \text{Id}, \quad B(z) := \frac{1}{2} (|z|^2 - 5) z. \quad (1.17)$$

Remarquons que ce système est très similaire aux équations d'Euler compressible (1.1.1) à la différence près qu'a priori, P_F n'est pas égal à RT et δ_F n'est pas nul. Comme nous le verrons à la Section 1.6.2, dériver des systèmes hydrodynamiques depuis l'équation de Boltzmann consiste entre autre à fermer le système ci-dessus en montrant que P_F et δ_F ne dépendent que des quantités macroscopiques R, U et T . En intégrant ces équations par rapport à la variable $x \in \Omega$ on obtient formellement que la masse totale, la quantité de mouvement totale et l'énergie totale sont conservées :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} R dx = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} RU dx = 0, \quad (1.19)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} R |U|^2 + \frac{3}{2} RT \right) dx = 0. \quad (1.20)$$

Dans le cas du tore plat \mathbb{T}^3 , ces lois de conservation totale sont vraies dès que F est «raisonnable» ($L^2(\mathbb{T}^3)$ par exemple), en revanche l'état des connaissances actuelles concernant la décroissance des solutions de Boltzmann pour $|x| \rightarrow \infty$ ne permet pas d'établir ces lois dans le cas de l'espace entier \mathbb{R}^3 .

Pour résumer cette section, la conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique à l'échelle microscopique impliquent la conservation des analogues macroscopiques. Notons que lorsque les collisions ne conservent pas la masse (voir [10]) ou l'énergie (voir [152, 48]) au niveau microscopique, alors leurs analogues macroscopiques ne le sont pas non plus.

1.5.2 Entropie et convergence vers l'équilibre

Afin de simplifier la discussion, on considère pour le moment l'équation de Boltzmann spatialement homogène, c'est-à-dire qu'en tout point de l'espace, la répartition statistique des vitesses des particules est la même. Mathématiquement, cela signifie que $F = F(t, v)$ et donc on considère l'équation de Boltzmann sans le terme de transport :

$$\partial_t F = \mathcal{Q}(F, F).$$

Le théorème H Bien que la réversibilité microscopique des collisions implique la conservation macroscopique de la masse, quantité de mouvement et énergie, l'équation de Boltzmann admet une quantité qui évolue de façon monotone ; son *entropie* :

$$H[F](t) := \int_{\mathbb{R}^3} F(t, v) \log F(t, v) dv. \quad (1.21)$$

Boltzmann a proposé dans son traité [30] une première démonstration de ce résultat, fournissant ainsi une preuve analytique du second principe de la thermodynamique (du moins, pour certains modèles physiques) : *dans un système isolé, l'entropie* (physique, c'est-à-dire $-H$) *ne peut qu'augmenter*. En particulier, l'équation de Boltzmann est *irréversible*, ce qui fut source de débat car elle est établie en supposant la réversibilité des collisions entre particules, dont l'existence était elle même très controversée à l'époque. Notamment, Zermelo¹⁴ souligna que cette irréversibilité contredirait le théorème de récurrence de Poincaré selon lequel le système devrait retourner (approximativement) à l'état initial une infinité de fois. Cependant, ce théorème s'applique à la dynamique microscopique d'un nombre fini de particules, contrairement au modèle de Boltzmann qui concerne celle d'une infinité de particules. Pour plus d'information à ce sujet, nous renvoyons à [52, 76, 132, 139].

Afin de montrer la monotonie de l'entropie, multiplions l'équation de Boltzmann par $\log F$ pour ensuite intégrer en $v \in \mathbb{R}^3$, ce qui donne formellement l'*inégalité de dissipation d'entropie*

$$\frac{d}{dt}H[F](t) = -D[F](t), \quad (1.22)$$

où l'on a noté $D[F]$ la *fonctionnelle de dissipation d'entropie* :

$$D[F] := - \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{Q}(F, F) \log F dv.$$

En appliquant une fois de plus le changement de variables $(v, v_*) \leftrightarrow (v', v'_*)$ à la formulation faible (1.13) de \mathcal{Q} avec $\varphi = \log F$, on obtient une nouvelle expression pour D nous permettant de déterminer son signe :

$$D[F] = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F'F'_* - FF_*) \log \frac{F'F'_*}{FF_*} d\zeta \geq 0, \quad (1.23)$$

et la positivité de D vient de l'inégalité $(a - b)(\log a - \log b) \geq 0$. On en conclut que l'entropie est décroissante.

On vient de voir que la fonctionnelle d'entropie $H[\cdot]$ est une fonctionnelle de Lyapunov pour l'équation de Boltzmann, elle nous permet donc d'identifier ses équilibres. Pour cela, on cherche quelles distributions F annulent la fonctionnelle de dissipation d'entropie D . La formule (1.23) suggère que les équilibres sont caractérisés par

$$F'F'_* = FF_*,$$

et en prenant le logarithme de cette relation, on en déduit que $\log F$ doit être un invariant de collisions :

$$(\log F)' + (\log F)'_* = \log F + (\log F)_*.$$

14. 1871-1953

D'après la Section 1.5.1, cela signifie que $\log F = a + b \cdot v + c|v|^2$, pour certains $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^3$ et où $c < 0$ de sorte à ce que la distribution F soit intégrable. Autrement dit, les équilibres de l'équation de Boltzmann homogène sont les *Maxwelliennes globales* :

$$\mathcal{M}(v) = \frac{R}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v-U|^2}{2T}\right),$$

$$R = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}(v) dv, \quad RU = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}(v)v dv, \quad R|U|^2 + 3RT = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M}(v)|v|^2 dv.$$

On a donc montré que

$$D[F] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{Q}(F, F) = 0 \Leftrightarrow F \text{ est une Maxwellienne.}$$

Ainsi, les collisions ont pour effet de ramener F vers les distributions identifiées par Maxwell de gaz à l'équilibre thermodynamique.

Rappelons que l'entropie, qui existe sous diverses formes dans différentes théories physiques ou statistiques, formalise la notion de «quantité d'information». On peut montrer qu'à R, U et T fixés, l'entropie est minimisée par la Maxwellienne associée à ces paramètres [174], ce qui illustre le fait qu'une telle distribution statistique ne cache pas d'autre information que ces trois valeurs moyennes.

La conjecture de Cercignani Une question naturelle à se poser à présent est à quelle vitesse le gaz atteint-il l'équilibre thermodynamique ? Ou plus précisément, à quelle vitesse décroît l'entropie ? Cette question est cruciale pour déterminer les échelles de temps sur lesquelles l'équation de Boltzmann est valide, ainsi que quand est-ce qu'elle peut être approximée par un modèle hydrodynamique.

Commençons par préciser que l'équilibre thermodynamique que F va atteindre est la Maxwellienne globale \mathcal{M} ayant la même masse R , vitesse U et température qu'à l'instant initial de par leur conservation :

$$\mathcal{M}(v) := \frac{R}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v-U|^2}{2T}\right),$$

$$\forall t, R = \int_{\mathbb{R}^3} F(t, v) dv, \quad RU = \int_{\mathbb{R}^3} F(t, v)v dv, \quad R|U|^2 + 3RT = \int_{\mathbb{R}^3} F(t, v)|v|^2 dv.$$

On s'attend à ce que l'entropie $H[F]$ de F tende vers l'entropie $H[\mathcal{M}]$ de \mathcal{M} , on cherche alors à estimer le taux de convergence vers 0 de leur différence, nommée *entropie relative* :

$$H[F|\mathcal{M}] = H[F] - H[\mathcal{M}] = \int_{\mathbb{R}^3} F \log \frac{F}{\mathcal{M}} dv,$$

où la dernière égalité vient du fait que F et \mathcal{M} ont la même masse, vitesse et température. Pour déterminer sa vitesse de convergence, on peut chercher à établir une inégalité

d'entropie-production d'entropie (EEP)

$$D[F] \geq \Theta(H[F|\mathcal{M}]),$$

car une fois injectée dans (1.22), on obtiendra l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt}H[F|\mathcal{M}] \leq -\Theta(H[F|\mathcal{M}]),$$

ce qui permet de déduire un taux de convergence en intégrant, par exemple

$$\begin{aligned} H[F|\mathcal{M}] &\leq Ce^{-\lambda t}, & \text{si } \Theta(H) = \lambda H, \\ H[F|\mathcal{M}] &\leq C(1+t)^{-N}, & \text{si } \Theta(H) = H^{1+\frac{1}{N}}. \end{aligned}$$

Carlo Cercignani¹⁵ conjectura dans son article de 1982 [50] que pour une masse R donnée, il existait un Θ linéaire : $\Theta(H) = \lambda H$, ce qui implique donc une convergence à l'équilibre thermodynamique avec une vitesse $\mathcal{O}(e^{-\lambda t})$. Cette conjecture ainsi que plusieurs tentatives de raffinement ont été progressivement réfutées [26, 27, 199]. Cependant, les travaux [184, 43] aboutirent au résultat de Cédric Villani en 2003 dans [192] : pour des potentiels durs satisfaisant l'hypothèse de cutoff angulaire (c'est-à-dire $\gamma \geq 0$ et « $s = 0$ », voir Section 1.4.3), il existe des $\Theta = \Theta_{f,N}$ admissibles dépendant de f à travers certaines estimations a priori

$$\Theta_{f,N}(H) = \lambda_f H^{1+\frac{1}{N}},$$

où N est arbitrairement grand, impliquant ainsi un retour à l'équilibre avec une vitesse d'ordre $\mathcal{O}(t^{-N})$. Dans le cas sans cutoff, la question est encore ouverte, et Villani a conjecturé dans [192] qu'un Θ linéaire est admissible si et seulement si $\gamma + 2s \geq 2$ [158], cependant il existe des résultats partiels au niveau linéaire dont nous parlerons dans la Section 2.2.4. Pour plus d'informations concernant la conjecture de Cercignani, nous renvoyons à [64]. Notons que d'après l'inégalité de Csiszar-Kullback-Pinsker [53, 83], cette quantité contrôle la distance dans l'espace $L^1(dv)$:

$$\|F - \mathcal{M}\|_{L^1}^2 \leq 2H[F|\mathcal{M}],$$

ainsi le résultat de Villani implique un taux de convergence en norme L^1 à une vitesse d'ordre $\mathcal{O}(t^{-\infty})$. En 2006, Clément Mouhot démontra que pour cette norme, le taux de convergence pouvait être amélioré en un taux de convergence exponentiel [156]. Pour démontrer ce résultat, Mouhot mena une étude spectrale de l'équation de Boltzmann linéarisée dans cet espace, ce qui le mena progressivement à développer la théorie d'élargissement avec Stéphane Mischler et Maria Gualdani dont nous parlerons à la Section 2.2.3.

15. 1939-2010

Le cas spatialement inhomogène Dans le cas spatialement inhomogène, on a les lois de dissipation de l'entropie locale et globale :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H[F](t, x) &= -D[F](t, x) + \nabla_x \cdot \int v \log F(t, x, v) F(t, x, v) dv, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} H[F](t, x) dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} D[F](t, x) dx.\end{aligned}$$

Ici encore, un équilibre \mathcal{M} de l'équation de Boltzmann minimisera l'entropie et sera donc une Maxwellienne, mais cette fois paramétrée par la masse locale $R(x)$, vitesse locale $U(x)$ et température locale $T(x)$; on parle de *Maxwellienne locale* :

$$\mathcal{M}(x, v) := \frac{R(x)}{(2\pi T(x))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|v - U(x)|^2}{2T(x)}\right).$$

Dans le cas du tore $\Omega = \mathbb{T}^3$, on peut montrer que R, U et T sont indépendants de la position [102]. Cependant, dans le cas de l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^3$, les travaux de Pitteri [166], Toscani [181, 182] et Polewczak [167] ont montré qu'en général l'équilibre thermodynamique n'est pas atteint. En revanche, les solutions «s'écrasent» en raison de la *dispersion*, plus précisément les solutions tendent ponctuellement vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ (voir [148]). On peut le constater sur l'équation de transport libre (1.6) dont la solution est donnée par

$$F(t, x, v) = F(t, x - vt, v).$$

Par le changement de variables $(x - vt, v) \rightarrow (y, \frac{x-y}{t})$, on montre que cette solution satisfait l'estimation (voir [20, Proposition 3.2])

$$\|F(t)\|_{L_x^p L_v^q} \leq t^{-3(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \|F(0)\|_{L_x^p L_v^q}, \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

Ainsi, dans le cas de l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^3$, la dissipation d'entropie n'est pas le seul phénomène à prendre en compte lors de l'étude du retour à l'équilibre.

1.6 Le sixième problème de Hilbert

Quant aux principes de la Mécanique, nous possédons déjà au point de vue physique des recherches d'une haute portée; je citerai, par exemple, les écrits de MM. Mach[149], Hertz[119], Boltzmann[31] et Volkmann[194]. Il serait aussi très désirable qu'un examen approfondi des principes de la Mécanique fût alors tenté par les mathématiciens. Ainsi le Livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter au point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois

du mouvement des continua. Inversement on pourrait, au moyen de méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, chercher à déduire les lois du mouvement des corps rigides d'un système d'axiomes reposant sur la notion d'états d'une matière remplissant tout l'espace d'une manière continue, variant d'une manière continue et que l'on devra définir paramétriquement.

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens [121]

Durant le deuxième congrès international des mathématiciens en 1900 à Paris, David Hilbert¹⁶ présenta une liste de 23 problèmes dont la résolution marquerait selon lui les mathématiques du XXème siècle et devait guider la recherche pour les décennies à venir. Parmi eux, le 6ème problème concerne l'*axiomatisation de la physique*, qui consiste à établir les lois de la mécanique à partir de lois élémentaires bien choisies. Cela consiste entre autre à montrer que les équations de la mécanique des fluides (voir Section 1.1) sont en un sens une «conséquence» ou une «approximation» des équations de la physique microscopique (voir Section 1.2).

Une première possibilité est dériver les équations macroscopiques depuis un modèle microscopique similaire à ceux présentés dans la Section 1.2. Cette approche a été adoptée par Horng-Tzer Yau et ses collaborateurs dans [163, 172, 81, 137] où sont dérivées les équations d'Euler et Navier-Stokes à partir de versions stochastiques des systèmes présentés dans la Section 1.2.

Une autre possibilité est de faire cette dérivation en deux temps que nous présenterons au cours des deux prochaines sections ; d'abord passer du modèle microscopique au modèle mésoscopique, puis du modèle mésoscopique au modèle macroscopique.

1.6.1 Limites thermodynamique du modèle microscopique

Deux directions furent proposées, une première par Marc Kac¹⁷ [130] permettant de dériver l'équation de Boltzmann spatialement homogène (1.21) en étudiant le comportement asymptotique d'un système de particules évoluant selon une dynamique stochastique, et une seconde, déterministe et initiée par Grad [99] basée sur les travaux de Nikolai Bogolioubov¹⁸ [29], Max Born¹⁹ et Herbert Green²⁰ [32], John Kirkwood [134], et Jacques Yvon²¹ [203], que nous présentons brièvement ici. Pour plus d'informations, nous renvoyons à [28].

On considère une collection de N particules de rayon r dont les positions et les vitesses

16. 1862–1943

17. 1914–1984

18. 1824–1896

19. 1882–1970

20. 1920–1999

21. 1903–1979

sont données par une densité notée

$$F_N = F_N(t, x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, x_N, v_N).$$

Ces particules sont supposées indistinguables, c'est-à-dire que F est invariante par permutation des paires positions-vitesses $(x_i, v_i) \leftrightarrow (x_j, v_j)$, se déplacent en ligne droite entre deux collisions, et rebondissent entre elles comme des boules de billards.

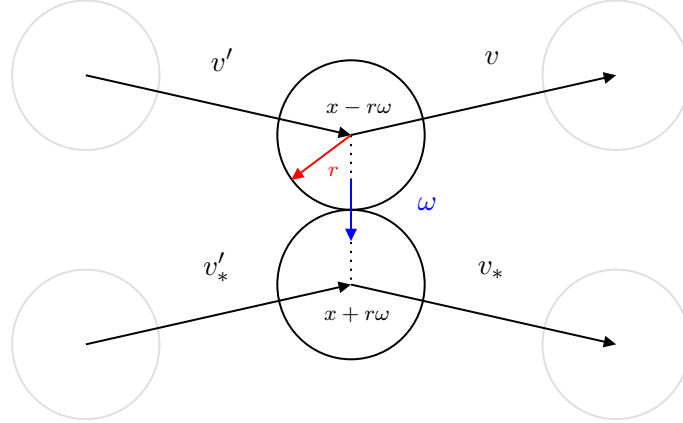


FIGURE 1.6.1 – Collisions binaires

Grad écrit l'équation satisfaite par la marginale d'une particule (typique, puisqu'elles sont supposées indistinguables) notée $F_N^{(1)}(t, x, v)$, faisant intervenir les collisions qu'elle subit en fonction de la marginale de deux particules (typiques) $F_N^{(2)}(t, x, v)$:

$$\partial_t F_N^{(1)} + v \cdot \nabla_x F_N^{(1)} = (N-1)r^2 \mathcal{Q}_r(F_N^{(2)}),$$

$$\mathcal{Q}_r(F_N^{(2)})(x, v) = \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} [(v_* - v) \cdot \omega]_+ [F_N^{(2)}(x, v', x + r\omega, v'_*) - F_N^{(2)}(x, v, x - r\omega, v_*)] d\omega dv.$$

Cette équation est très similaire à l'équation de Boltzmann, à deux différences près :

- Le terme d'ordre Nr^2 en facteur est le *libre parcours moyen*, c'est-à-dire le temps moyen entre deux collisions, et qui est proportionnel à la surface totale de la collection de particules. Grad proposa la loi d'échelle aujourd'hui appelée échelle de Boltzmann-Grad : $Nr^2 = \text{cste}$, en particulier $r \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$, et le volume occupé par les particules relativement au volume occupé par le gaz est d'ordre r , c'est-à-dire que le gaz est dilué.
- Elle n'est pas fermée : l'équation pour $F_N^{(1)}$ a pour source un terme de collisions faisant intervenir $F_N^{(2)}$. Une clé pour obtenir Boltzmann lorsque $N \rightarrow \infty$ est de montrer la *propagation du chaos*, c'est-à-dire qu'asymptotiquement $F_N^{(2)}$ est le tensorisé de $F_N^{(1)}$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N^{(1)} = F, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} F_N^{(2)} = F \otimes F.$$

En passant à la limite $N \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$ on obtient l'équation de Boltzmann pour les sphères dures (dont le noyau de collision en terme de ω s'écrit $B(v - v_*, \omega) = [\omega \cdot (v_* - v)]_+$). La première justification rigoureuse de ce résultat fut obtenu par Cercignani [49] en 1972 sous l'hypothèse de propagation du chaos, puis par Oscar Landford²² [138] en 1975 qui prouva cette hypothèse.

1.6.2 Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann

La question des limites hydrodynamiques n'est pas que conceptuelle ; les inconnues des modèles macroscopiques vivent dans des espaces «plus petits» (\mathbb{R}^n au niveau macroscopique et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ au niveau mésoscopique), autrement dit elles contiennent moins d'informations et sont plus faciles à manipuler et simuler. On a donc intérêt à préférer un modèle macroscopique quand c'est possible, ce qui requiert d'identifier les situations physiques, ou «régimes», dans lesquels le modèle macroscopique est une bonne approximation du modèle mésoscopique. La question de la «vitesse de convergence», qui se traduit par «erreur d'approximation» pour les physiciens et les numériciens, nécessite d'identifier les différentes parties de la quantité dont on étudie la convergence ; la solution de l'équation de Boltzmann est composée d'une partie cinétique, d'une partie fluide, et une partie ondulatoire, chacune convergeant à des vitesses différentes et dans des topologies différentes (voir Section 2.3).

La première étape consiste en la réécriture de l'équation de Boltzmann, initialement formulée à l'échelle des particules et du temps très court séparant leurs collisions successives, dans une échelle macroscopique : on se donne une longueur caractéristique, un temps caractéristique, et une température caractéristique qui détermine une vitesse du son caractéristique. Dans cette échelle, l'équation de Boltzmann devient ainsi

$$\tau \partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \frac{1}{\varepsilon} Q(F, F), \quad (1.24)$$

où ε est le *nombre de Knudsen*, il caractérise le libre parcours moyen, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions successives :

$$\varepsilon \approx \frac{\text{distance parcourue entre deux collisions}}{\text{longueur caractéristique}},$$

il permettra d'obtenir un régime hydrodynamique dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ car la distance parcourue entre deux collisions sera négligeable devant l'échelle spatiale considérée et il ne sera plus pertinent de la prendre en compte. Le paramètre τ est un autre paramètre du fluide qui nous permettra d'obtenir des modèles hydrodynamiques différents en considérant des échelles de temps plus (comme Navier-Stokes) ou moins (comme Euler ou les ondes)

22. 1940–2013

longues. On considère ainsi l'équation de Boltzmann mise à l'échelle :

$$\tau \partial_t F^\varepsilon + v \cdot \nabla_x F^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(F^\varepsilon, F^\varepsilon), \quad \varepsilon \approx 0. \quad (1.25)$$

Les premières études mathématiques des limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann remontent à Hilbert qui proposa en 1912 [120] de considérer le développement formel

$$F^\varepsilon(t, x, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n(t, x, v),$$

qui une fois injecté dans l'équation (1.25) fournirait en identifiant les puissances de ε une hiérarchie d'équations sur les sommes partielles $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n F_n$. Cette approche permet d'obtenir formellement et simplement les équations d'Euler à l'ordre ε^0 , mais devient assez pénible à manipuler à partir des ordres supérieurs, qui fournissent à l'ordre ε^1 les équations de Navier-Stokes. En 1916 et 1917, Sydney Chapman et David Enskog [80] proposèrent une adaptation où chaque F_n^ε dépend de (t, x) à travers les champs hydrodynamiques $R^\varepsilon, U^\varepsilon$ et T^ε :

$$F^\varepsilon(t, x, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n(R^\varepsilon(t, x), U^\varepsilon(t, x), T^\varepsilon(t, x), v).$$

Grad présentait dans [98, 99] une troisième méthode plus simple, appelée *méthode des moments* qui consiste en passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les lois de conservations locales pour $R^\varepsilon, U^\varepsilon$ et T^ε . C'est l'approche que l'on adoptera dans cette section.

La première chose à remarquer est que dans (1.25), le terme de collision apparaît avec le facteur $1/\varepsilon$, donc plus le nombre de Knudsen est petit plus l'effet des collisions est important. Ce sont ces collisions qui amènent le gaz à l'équilibre thermodynamique, donc on devrait avoir à la limite un gaz dans cet état thermodynamique, ce qui justifierait le fait que l'état du gaz soit entièrement décrit par ses moments. Et en effet, en multipliant par ε l'équation, on a formellement

$$\mathcal{Q}(F^\varepsilon, F^\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

d'où en passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathcal{Q}(F^0, F^0) = 0.$$

Comme on l'a vu à la Section 1.5.2, cela équivaut au fait que F^0 soit un équilibre thermodynamique local :

$$F^0(t, x, v) = \frac{R^0(t, x)}{\sqrt{2\pi T^0(t, x)}} \exp\left(-\frac{|v - U^0(t, x)|^2}{2T^0(t, x)}\right).$$

Équations d'Euler.

Dans le régime ou $\tau = 1$, on obtient les équations d'Euler compressible. Il suffit de passer à la limite dans le système de lois de conservations (1.14) :

$$\begin{aligned}\partial_t R^0 + \nabla_x \cdot (R^0 U^0) &= 0, \\ \partial_t (RU) + \nabla_x \cdot (R^0 U^0 \otimes U + P_{F^0}) &= 0, \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} R^0 |U^0|^2 + \frac{3}{2} R^0 T^0 \right) + \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{2} R^0 U^0 |U^0|^2 + \frac{5}{2} R^0 U^0 T^0 \right) &= \nabla_x \cdot \delta_{F^0}.\end{aligned}$$

La forme simple de F^0 nous permet de fermer le système. Premièrement, le tenseur de pression P_{F^0} n'est autre que la matrice de covariance associée à la densité F^0 , à savoir

$$P_{F^0} = \int_{\mathbb{R}^3} (v - U^0)^{\otimes 2} F^0 dv = R^0 T^0 \text{Id}.$$

Deuxièmement, le calcul du terme δ_{F^0} se ramène un simple calcul mettant en jeu une gaussienne centrée réduite \mathcal{M} par le changement de variable $w := \frac{v - U}{\sqrt{T}}$:

$$\begin{aligned}\delta_{F^0} &= - \int_{\mathbb{R}^3} FA(v - U) \cdot U dv - \int_{\mathbb{R}^3} FB(v - U) dv, \\ &= - \frac{R}{\sqrt{T}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M} A(w) U dw - \frac{R}{\sqrt{T}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{M} B(w) dw.\end{aligned}$$

On vérifie aisément à l'aide des premiers moments de la gaussienne centrée réduite que $\delta_{F^0} = 0$, ainsi R^0, U^0 et T^0 vérifient les équations d'Euler compressible (1.1.1).

Régime linéarisé près d'un équilibre thermodynamique global.

Considérons que le gaz présente de petites fluctuations (d'amplitude δ) autour d'un état d'équilibre thermodynamique global, disons au repos et de densité et température normalisée ($R = T = 1$ et $U = 0$, donc représenté par \mathcal{M}). Une telle situation est représentée au niveau de la densité par la linéarisation suivante :

$$F^\varepsilon = \mathcal{M} + \delta f^\varepsilon, \quad \delta = \delta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

où f^ε est le profil de la fluctuation. On s'intéresse dans ces prochains paragraphes au comportement asymptotique du profil de cette fluctuation.

D'une part, l'équation satisfaite par f^ε est

$$\begin{aligned}\tau \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon + \frac{\delta}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \\ \mathcal{L} \varphi &:= \mathcal{Q}(\mathcal{M}, \varphi) + \mathcal{Q}(\varphi, \mathcal{M})\end{aligned}$$

où \mathcal{L} est l'opérateur de collisions linéarisé autour de l'équilibre \mathcal{M} . Pour faire le lien avec l'interprétation présentée dans la Section 1.4.1, en considérant qu'on a un gaz à l'équilibre thermodynamique \mathcal{M} et un autre de distribution φ , et que les particules de chaque gaz interagissent uniquement avec celles de l'autre, alors la quantité $\mathcal{L}\varphi(v)$ se comprend comme la variation du nombre de particules de vitesse v .

D'autre part, la linéarisation de F^ε induit celle de ses quantités macroscopiques :

$$R^\varepsilon = 1 + \delta\rho^\varepsilon, \quad U^\varepsilon = 0 + \delta u^\varepsilon, \quad T^\varepsilon = 1 + \delta\theta^\varepsilon,$$

on s'attend donc à ce que

$$F^\varepsilon \approx \mathcal{M}_{1+\delta\rho^\varepsilon, \delta u^\varepsilon, 1+\delta\theta^\varepsilon},$$

or on vérifie aisément par un développement de Taylor en (ρ, u, θ) que

$$\mathcal{M}_{1+\rho, u, 1+\theta} \approx \mathcal{M} + \left(\rho + u \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3)\theta \right) \mathcal{M},$$

donc f^ε doit avoir la même forme que la fluctuation ci-dessus :

$$f^\varepsilon \approx \left(\rho^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3)\theta^\varepsilon \right) \mathcal{M}.$$

De telles distributions sont qualifiées de *Maxwelliennes infinitésimales* et constituent le noyau de \mathcal{L} (voir Section 2.2.4) :

$$\ker(\mathcal{L}) = \left\{ \left(a + b \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3)c \right) \mathcal{M} \mid a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

On peut les interpréter comme la partie visible (macroscopique) d'une fluctuation statistique autour de l'équilibre thermodynamique \mathcal{M} . Notons qu'étant donnée $g \in \ker(\mathcal{L})$, écrite sous la forme

$$g = \left(\rho + u \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3)\theta \right) \mathcal{M},$$

les coefficients ρ, u, θ sont donnés par

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} g(v) dv, \quad u = \int_{\mathbb{R}^3} g(v) v dv, \quad \theta = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^3} g(v) (|v|^2 - 3) dv. \quad (1.26)$$

Équation des ondes.

On considère à nouveau $\tau = 1$. En injectant les linéarisation de $R^\varepsilon, U^\varepsilon$ et T^ε dans le système de lois de conservation locales (1.14), on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_x \cdot u^\varepsilon &= \mathcal{O}(\delta), \\ \partial_t u^\varepsilon + \nabla_x (\rho^\varepsilon + \theta^\varepsilon) &= \mathcal{O}(\delta), \end{aligned}$$

$$\partial_t \theta^\varepsilon + \frac{2}{3} \nabla_x \cdot u = \mathcal{O}(\delta),$$

on en déduit après passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$, que les profils limites des fluctuations vérifient les équations

$$\begin{aligned} \partial_t^2(\rho^0 + \theta^0) &= c^2 \Delta_x(\rho^0 + \theta^0), \\ \partial_t^2(\nabla_x \cdot u^0) &= c^2 \Delta_x(\nabla_x \cdot u^0). \end{aligned}$$

Ainsi, quand les fluctuations autour de l'équilibre sont de faibles amplitudes, l'évolution de leurs profils est bien approximé par l'équation des ondes.

Équations de Navier-Stokes incompressible.

Les modèles d'Euler et des ondes décrivent respectivement l'évolution d'un fluide et des oscillations autour d'un état d'équilibre sur des échelles de temps plus petites que celles décrites par le modèle de Navier-Stokes. Il convient donc de dilater le temps afin de pouvoir observer quoi que ce soit. Il s'avère que la loi d'échelle permettant d'obtenir Navier-Stokes incompressible à la limite est $\delta = \tau = \varepsilon$:

$$\varepsilon \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon + \mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon). \quad (1.27)$$

La dérivation formelle étant un peu lourde, nous allons seulement donner une idée de pourquoi le régime limite est à la fois diffusif et non-linéaire. Pour plus de détails on réfère à [91, 23]. On déduit de (1.27) deux relations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon &= \varepsilon \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \\ \varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} (v \otimes v) f^\varepsilon &= \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Le terme $(v \otimes v) f^\varepsilon$ va donner le terme non-linéaire de Navier-Stokes ainsi que le terme diffusif en injectant la première relation dans la seconde. En utilisant les propriétés d'auto-adjonction de \mathcal{L} (voir Section 2.2.4) et connaissant son noyau, on peut affirmer qu'il existe une fonction matricielle $\widehat{A} = \widehat{A}(v)$ telle que pour toute fonction $\varphi = \varphi(v)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} A(v) \varphi \, dv = \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{A}(v) \mathcal{L} \varphi \, dv, \quad A(v) = v \otimes v - \frac{|v|^2}{3} \text{Id}.$$

On peut alors faire apparaître \mathcal{L} dans l'équation sur u^ε :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\varepsilon) &= \partial_t u^\varepsilon + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon} (v \otimes v) f^\varepsilon \, dv \\ &= \partial_t u^\varepsilon + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon} A(v) f^\varepsilon \, dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon} \frac{|v|^2}{3} f^\varepsilon \, dv \end{aligned}$$

$$= \partial_t u^\varepsilon + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon} \widehat{A}(v) \mathcal{L} f^\varepsilon dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon} \frac{|v|^2}{3} f^\varepsilon dv.$$

Ainsi, en injectant l'expression de $\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon$, on fait apparaître les dérivées spatiales d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\varepsilon) &= \partial_t u^\varepsilon + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon} \widehat{A}(v) \mathcal{L} f^\varepsilon dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\varepsilon} \frac{|v|^2}{3} f^\varepsilon dv \\ &= \partial_t u^\varepsilon + \nabla_x \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{A}(v) \nabla_x \cdot v f^\varepsilon dv \right) + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{A}(v) \mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon) dv \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{3} f^\varepsilon dv. \end{aligned}$$

On a bien la même structure que Navier-Stokes, où le dernier terme qui peut paraître singulier quand $\varepsilon \rightarrow 0$ n'explose pas grâce à la condition de Bousinesq $\nabla_x(\rho^0 + \theta^0) = 0$:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{3} f^\varepsilon dv = \frac{\rho^\varepsilon + \theta^\varepsilon}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1).$$

1.7 Conclusion

Nous avons vu plusieurs façons d'appréhender un gaz, dont l'équation de Boltzmann pour le niveau mésoscopique, et les équations de Navier-Stokes pour le point de vue macroscopique. Il faut être conscient que toutes les manipulations effectuées sur ces équations étaient formelles et rien n'indique qu'elles avaient un sens mathématiquement. Le problème principal vient du fait que les manipulations des inconnues des différents modèles nécessiteraient de connaître leurs propriétés de régularité ou d'intégrabilité. Nous avons également discuté du lien entre ces différentes équations, et les diverses approximations et passages à la limite ne sont a priori pas licites. Typiquement, les termes de la forme \approx et $\mathcal{O}(\varepsilon)$ où ε était un paramètre tendant vers 0 peuvent faire intervenir différentes topologies, et pour peu qu'on arrive à identifier lesquelles sont adaptées, établir que de tels termes disparaissent à la limite n'est pas toujours évident. Dans la prochaine partie, nous discuterons des théories et outils mathématiques permettant de donner du sens à ces manipulations, ou au moins d'obtenir les mêmes résultats.

Chapitre 2

Étude mathématique de l'équation de Boltzmann et de ses limites hydrodynamiques

On distingue trois grands types de théories de Cauchy pour l'équation de Boltzmann : deux concernant les gaz loin de l'équilibre thermodynamique, pour les gaz spatialement homogènes

$$\partial_t F = \mathcal{Q}(F, F),$$

et une théorie faible pour les gaz spatialement inhomogènes

$$\partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \mathcal{Q}(F, F),$$

et une autre proche de l'équilibre. Le premier résultat d'existence remonte aux années 1930 avec Carleman [41], mais la théorie de Cauchy a connu un essor à partir de l'introduction de l'hypothèse de cutoff angulaire par Grad en 1965 [101].

2.1 Théories loin de l'équilibre

2.1.1 Théorie spatialement homogène

Le premier théorème d'existence date de 1933 et est dû à Carleman [41] ; il construit des solutions globales pour le modèle des sphères dures ($\gamma = 1$) pour des données initiales dans $L^\infty(\langle v \rangle^{6+0} dv)$ radiales et continues, puis ces résultats furent améliorés en 1957 par Carleman [42] et en 1965 par Povzner [168]. L'introduction par Grad en 1965 de l'hypothèse de cutoff angulaire [101] permis de considérer des potentiels durs ($\gamma \in [0, 1]$) ; Arkeryd [13, 14, 16] initia dans les années 1970 une théorie dans $L^1(\langle v \rangle^{2+0} dv)$ qui fut ensuite développée par DiBlasio [65, 66], Elmroth [78], Gustafsson [111, 112], Desvillettes [59],

Wennberg [196, 197, 198] et Pulvirenti [170, 171]. Les espaces optimaux $L^1(\langle v \rangle^2 dv)$ ont été atteints par Mischler et Wennberg [155, 200] en 1999.

Les potentiels singuliers (potentiels mous $\gamma \in (-3, 0)$ ou sans hypothèse de cutoff) ont été considérés par Arkeryd en 1981 [15] mais ont principalement été étudiés, d'abord au tournant des années 2000 par Alexandre, Desvillettes, Villani et Wennberg à travers l'effet régularisant de la singularité angulaire [1, 60, 61, 190, 191], puis à travers la question de la stabilité des solutions [85, 183, 63, 84].

Mentionnons également la théorie faiblement homogène, c'est-à-dire lorsque la solution de l'équation spatialement inhomogène est proche d'une distribution spatialement homogène. Cette théorie a été initiée par Arkeryd, Esposito et Pulvirenti en 1987 [18].

Pour une présentation plus détaillée sur l'état de l'art, nous renvoyons à [193, 62]

2.1.2 Théorie de DiPerna-Lions.

Théorie de Cauchy. Dans le cas de l'équation de Boltzmann spatialement inhomogène et pour des données initiales loin de l'équilibre, une théorie a été initiée par Ronald DiPerna¹ et Pierre-Louis Lions à partir de 1989 [68, 69, 143] sous l'hypothèse de cutoff, puis étendu au cas sans cutoff par Alexandre et Villani en 2004 [8]. Les auteurs ont été amenés à considérer une formulation équivalente de l'équation car les estimations a priori ne permettent pas de donner un sens distributionnel au terme non-linéaire $\mathcal{Q}(F, F)$, cependant elles permettent de montrer

$$\frac{\mathcal{Q}(F, F)}{1 + F} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3).$$

Dans la continuité de leurs travaux [67], ils introduisent alors la notion de *solution renormalisée* de l'équation de Boltzmann : une fonction $F \in \mathcal{C}([0, +\infty); L^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3))$ positive et satisfaisant au sens des distributions

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) \log(1 + F) = \frac{\mathcal{Q}(F, F)}{1 + F}.$$

Énonçons le théorème d'existence dans sa version de 1991 [69], où on rappelle que l'entropie relative H ainsi que la fonctionnelle de dissipation d'entropie sont définies à la Section 1.5.2.

Théorème 2.1. *Soit $F_{\text{in}} \geq 0$ une donnée initiale localisée et de masse, énergie et entropie finie, c'est-à-dire*

$$\int (1 + |v|^2 + |x|^2 + |\log F_{\text{in}}(x, v)|) F_{\text{in}}(x, v) dx dv < \infty,$$

il existe une solution renormalisée F telle que $F(0) = F_{\text{in}}$, satisfaisant les mêmes hypothèses

1. 1947-1989

physiques pour tout temps :

$$\forall t \geq 0, \quad \int (1 + |v|^2 + |x|^2) F(t, x, v) dx dv < \infty,$$

ainsi qu'une inégalité de dissipation d'entropie

$$H(F(t)) + \int_0^t D(F(\tau)) d\tau \leq H(F_{\text{in}}).$$

La théorie faible de DiPerna-Lions pour l'équation de Boltzmann est très similaire à celle de Leray [140] pour les équations de Navier-Stokes incompressible ; sous des conditions (physiquement) optimales sur la donnée initiale, il existe une solution faible globale satisfaisant une inégalité d'énergie ou d'entropie. Toutes deux satisfont un principe d'unicité fort-faible [142, 147], bien que nous ne sachions pas actuellement si ces solutions faibles sont uniques, ni si la régularité de la donnée initiale est propagée.

Limites hydrodynamiques : le programme de Bardos-Golse-Levermore. Dans leur article de 1991 [23], Claude Bardos, François Golse et David Levermore considèrent les solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann remise à l'échelle :

$$\varepsilon \partial_t F^\varepsilon + v \cdot \nabla_x F^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(F^\varepsilon, F^\varepsilon), \quad F^\varepsilon = \mathcal{M} + \varepsilon f^\varepsilon,$$

où on rappelle que \mathcal{M} est la Maxwellienne centrée réduite, et montrèrent que les seuls points d'accumulations possibles pour les profils f^ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ fournissent une solution de Leray (voir [140]) des équations de Navier-Stokes. Pour être plus précis, nous citons ici leur théorème.

Théorème 2.2. *Soit $(f^\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de solutions renormalisées de l'équation*

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon + \mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \quad f^\varepsilon|_{t=0} = f_{\text{in}}, \\ \mathcal{L} &= \mathcal{Q}(\mathcal{M}, \cdot) + \mathcal{Q}(\cdot, \mathcal{M}), \end{aligned}$$

dont les observables et collisions convergent faiblement, c'est-à-dire il existe f^0 tel que

$$\begin{aligned} \int f^\varepsilon \psi(v) dv &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int f^0 \psi(v) dv, \quad \psi(v) = 1, v, v \otimes v, v|v|^2, \widehat{A}(v) \otimes v, \widehat{B}(v) \otimes v, \\ \int \mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon) \psi(v) dv &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{Q}(f^0, f^0) \psi(v) dv, \quad \psi = \widehat{A}, \widehat{B}, \end{aligned}$$

au sens des distributions en (t, x) , où \widehat{A} et \widehat{B} ont été introduites à la Section 1.6.2. Alors

la limite f^0 est une Maxwellienne infinitésimale :

$$f^0(t, x, v) = \left(\rho(t, x) + u(t, x) \cdot v + \frac{1}{2} (|v|^2 - 3) \theta(t, x) \right) \mathcal{M}(v),$$

paramétrée par une solution de Leray du système de Navier-Stokes-Fourier incompressible :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \mu \Delta_x u, & \nabla_x \cdot u = 0, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta, & \nabla_x (\rho + \theta) = 0, \end{cases}$$

associée aux conditions initiales

$$u|_{t=0} = \mathbb{P} \left(\int f_{\text{in}}(v) v \, dv \right), \quad \rho|_{t=0} = -\theta|_{t=0} = \frac{1}{2} \int f_{\text{in}}(v) (|v|^2 - 5) \, dv,$$

où on rappelle que \mathbb{P} est le projecteur de Leray sur les champs incompressibles.

Ce résultat réduit ainsi le problème de la dérivation à la preuve de la convergence des moments. Les travaux de Golse, Levermore, Masmoudi et Saint-Raymond [92, 95, 145, 150] au début des années 2000 aboutirent, sous une hypothèse de cutoff, à la preuve que la suite f^ε est compacte dans une certaine topologie, dans le cas des potentiels durs ($\gamma \in [0, 1]$) par Golse et Saint-Raymond [94, 96, 97], et dans le cas des potentiels mous par Lions et Masmoudi [141]. La seule hypothèse faite par ces travaux est que, à l'instant initial, l'entropie de $F|_{t=0}^\varepsilon$ relativement à \mathcal{M} soit d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Ces travaux ont également montré que l'inégalité d'entropie satisfaite par les solutions F^ε

$$H[F^\varepsilon(t)|\mathcal{M}] + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t D[F(\tau)] \, d\tau \leq H[F|_{t=0}^\varepsilon|\mathcal{M}]$$

donne à la limite une inégalité d'énergie similaire à celle satisfaite par les solutions de Leray :

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{5}{4} \|\theta(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \mu \|\nabla_x u(\tau)\|_{L^2}^2 + \kappa \|\nabla_x \theta(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} H(F|_{t=0}^\varepsilon|\mathcal{M}).$$

Enfin, le cas sans cutoff a été traité par Arsénio en 2012 dans [21].

2.2 Théorie près de l'équilibre

Dans le cas où le gaz est proche de l'état d'équilibre thermodynamique global (que ce soit parce qu'il l'était à l'état initial ou bien parce qu'il s'en est approché) représenté par la Maxwellienne centrée réduite

$$\mathcal{M}(v) := (2\pi)^{-3/2} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right), \tag{2.1}$$

on s'attend à ce que le régime linéaire domine, c'est-à-dire que la dynamique de l'équation de Boltzmann soit essentiellement la même que sa version linéarisée près de \mathcal{M} . Plus précisément, étudier l'inconnue F de l'équation de Boltzmann près de \mathcal{M} équivaut à étudier de petites fluctuations $f := F - \mathcal{M}$, on s'intéresse alors à la réécriture suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t f &= \Lambda f + \mathcal{Q}(f, f), \quad f_{t=0} = f_{\text{in}}, \\ \Lambda \varphi &:= \mathcal{L}\varphi - v \cdot \nabla_x \varphi, \quad \mathcal{L}\varphi := \mathcal{Q}(\mathcal{M}, \varphi) + \mathcal{Q}(\varphi, \mathcal{M}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

On cherche à développer une théorie de Cauchy perturbative forte pour des données initiales aussi générales que possible. Spécifiquement, on cherche un espace de Hilbert $(H, \|\cdot\|_H)$ où $H \subset L^1(\langle v \rangle^2 dv dx)$ pour lequel on est capable d'établir le résultat suivant.

Théorème 2.3. *Il existe $\delta > 0$ (petit) tel que si $f_{\text{in}} \in H$ et $\|f_{\text{in}}\|_H \leq \delta$, alors l'équation*

$$\partial_t f = \Lambda f + \mathcal{Q}(f, f), \quad f_{t=0} = f_{\text{in}},$$

admet une unique solution $f \in \mathcal{C}([0, \infty); H)$ et $\|f(t)\|_H \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

On discutera également de la vitesse à laquelle $f(t)$ tend vers 0, c'est-à-dire la vitesse à laquelle $F = \mathcal{M} + f$ converge vers l'équilibre thermodynamique \mathcal{M} .

2.2.1 Stratégies

Présentons à présent le type de stratégie employée pour construire de telles solutions, dans un cadre idéalisé que nous remettrons en question plus loin afin de mettre en lumière les difficultés présentées par l'équation de Boltzmann près de l'équilibre. On désignera par H un espace de Hilbert inclut dans $L^2(dv dx)$ dont le choix exact n'est pas important pour la présentation du schéma de preuve.

Stratégie type Supposons que l'opérateur bilinéaire \mathcal{Q} soit continu et que Λ génère un semigroupe fortement continu $S_\Lambda(t)$ ayant un taux de décroissance exponentiel (on considère que les constantes de continuité et la taux de décroissance exponentielle valent 1 afin de clarifier la discussion) :

$$\|\mathcal{Q}(g_1, g_2)\|_H \leq \|g_1\|_H \|g_2\|_H, \quad \|S_\Lambda(t)g\|_H \leq e^{-t} \|g\|_H,$$

ou bien, faisons les hypothèses duales (équivalentes par le Théorème 2.5) :

$$\langle \mathcal{Q}(g_1, g_2), g_3 \rangle_H \leq \|g_1\|_H \|g_2\|_H \|g_3\|_H, \quad \langle \Lambda g, g \rangle_H \leq -\|g\|_H^2. \quad (2.3)$$

Ces hypothèses signifient en un sens que le terme linéaire (représenté par Λ et S_Λ) est en un sens «plus fort» que le terme non-linéaire \mathcal{Q} . Par exemple lorsque $g_1 = g_2 = g_3 = g = f$ est

petit (disons $\|f(t)\|_H \leq 1/2$), le terme linéaire absorbe le terme non-linéaire ; en prenant le produit scalaire de (2.2) avec la solution f , on a (voir le paragraphe suivant pour plus de détails)

$$\frac{d}{2dt} \|f(t)\|_H^2 \leq -\|f(t)\|_H^2 + \|f(t)\|_H^3 = -\|f(t)\|_H^2 (1 - \|f(t)\|_H) \leq -\frac{1}{2} \|f(t)\|_H^2.$$

Nous allons construire une solution f à (2.2) dans l'espace

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \mathcal{C}([0, +\infty); H) \cap L^\infty(e^t dt; H), \\ \|g\|_{\mathcal{H}} &:= \sup_{t \geq 0} e^t \|g(t)\|_H, \end{aligned}$$

en construisant une suite de solutions approchées $f_N \in \mathcal{H}$, définies par l'équation

$$\partial_t f_{N+1} = \Lambda f_{N+1} + \mathcal{Q}(f_N, f_N), \quad (f_{N+1})|_{t=0} = f_{\text{in}},$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale par la formule de Duhamel

$$f_{N+1}(t) = S_\Lambda(t) f_{\text{in}} + \int_0^t S_\Lambda(t - \tau) \mathcal{Q}(f_N(\tau), f_N(\tau)) d\tau. \quad (2.4)$$

Stabilité du schéma. On initialise à $f_0 = 0$ et on montre par récurrence que chaque solution approchée f_N appartient à $\mathcal{C}([0, \infty); H)$, il reste donc à vérifier qu'elle satisfait le taux décroissance en $\mathcal{O}(e^{-t})$ et que l'on peut passer à la limite $N \rightarrow \infty$ dans l'équation approchée. En effet, en prenant le produit scalaire de la formulation différentielle contre f_{N+1} , on a grâce à (2.3)

$$\frac{d}{dt} \|f_{N+1}\|_H^2 \leq -2\|f_{N+1}\|_H^2 + 2\|f_N\|_H^2 \|f_{N+1}\|_H,$$

d'où en intégrant et en utilisant le fait que $\|\cdot\|_{L_t^\infty H} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$

$$\begin{aligned} e^{2t} \|f_{N+1}(t)\|_H^2 &\leq 2 \int_0^t e^{2\tau} \|f_N(\tau)\|^2 \|f_{N+1}(\tau)\|_H d\tau + \|f_{\text{in}}\|_H^2 \\ &\leq 2 \int_0^t e^{-\tau} (e^\tau \|f_N(\tau)\|_H)^2 (e^\tau \|f_{N+1}(\tau)\|_H) d\tau + \|f_{\text{in}}\|_H^2 \\ &\leq (2\|f_N\|_{\mathcal{H}}^2 \|f_{N+1}\|_{\mathcal{H}} + \|f_{\text{in}}\|_H) \|f_{N+1}\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

on en déduit alors le contrôle inductif suivant :

$$\|f_{N+1}\|_{\mathcal{H}} \leq 2\|f_N\|_{\mathcal{H}}^2 + \|f_{\text{in}}\|_H.$$

Ainsi, si la donnée initiale satisfait $\|f_{\text{in}}\|_H \leq 1/4$, on démontre aisément que la suite est

uniformément bornée :

$$\|f_N\|_{\mathcal{H}} \leq 2\|f_{\text{in}}\|_H \leq 1.$$

Convergence du schéma. Pour montrer la convergence de la suite $(f_N)_N$, on montre que les différences de termes successifs $d_{N+1} := f_{N+1} - f_N$ sont sommables. Pour cela, on applique les mêmes calculs que précédemment à l'équation satisfaite par d_{N+1} :

$$\partial_t d_{N+1} = \Lambda d_{N+1} + \mathcal{Q}(d_N, f_N) + \mathcal{Q}(f_{N-1}, d_N), \quad (d_{N+1})|_{t=0} = 0,$$

dont on tire l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt} \|d_{N+1}\|_H^2 \leq -2\|d_{N+1}\|_H^2 + 2\|d_{N+1}\|_H \|d_N\|_H (\|f_N\|_H + \|f_{N-1}\|_H),$$

ce qui nous donne après intégration

$$\|d_{N+1}\|_{\mathcal{H}} \leq 2\|d_N\|_{\mathcal{H}} (\|f_N\|_{\mathcal{H}} + \|f_{N-1}\|_{\mathcal{H}}).$$

Afin que la suite soit sommable, il faudrait (par exemple) que $\|f_N\|_{\mathcal{H}} \leq 1/8$ quelque soit $N \in \mathbb{N}$. Grâce à l'étape de stabilité, c'est le cas si on restreint davantage la taille de la donnée initiale : $\|f_{\text{in}}\|_H \leq 1/16$, on a ainsi $\|d_N\|_{\mathcal{H}} \leq 2^{-N}$, d'où la convergence de la suite $(f_N)_N$. Sa limite $f := \lim_{N \rightarrow \infty} f_N \in \mathcal{H}$ est alors une solution de (2.2).

Unicité de la solution dans \mathcal{H} . La preuve de l'unicité est un cas particulier du calcul précédent. Elle est démontrée en considérant $d := f^1 - f^2$ la différence de deux solutions $f^1, f^2 \in \mathcal{H}$ associées à la même condition initiale :

$$\partial_t d = \Lambda d + \mathcal{Q}(d, f^1) + \mathcal{Q}(f^2, d), \quad d|_{t=0} = 0,$$

ce qui nous donne avec les mêmes calculs

$$\|d\|_{\mathcal{H}} \leq 2\|d\|_{\mathcal{H}} (\|f^1\|_{\mathcal{H}} + \|f^2\|_{\mathcal{H}}).$$

Ainsi, on déduit $d = 0$ sous l'hypothèse de petitesse $\|f^1\|_{\mathcal{H}} + \|f^2\|_{\mathcal{H}} < 1/2$.

Notons que cette approche appliquée à la formulation intégrale (2.4) correspond exactement à appliquer le théorème de point fixe de Banach dans une petite boule de \mathcal{H} à l'application

$$g \mapsto \left(S_{\Lambda}(t) f_{\text{in}} + \int_0^t S_{\Lambda}(\tau) \mathcal{Q}(g(\tau), g(\tau)) d\tau \right).$$

Une variante La stratégie précédente peut être adaptée en une autre qui consiste à poser le schéma itératif dans l'espace

$$\mathcal{H} := \mathcal{C}_b([0, +\infty); H) \cap L^2([0, +\infty); H),$$

$$\|g\|_{\mathcal{H}} := \sup_{t \geq 0} \|g(t)\|_H + \int_0^\infty \|g(t)\|_H^2 dt,$$

afin de construire une solution f dans celui-ci, puis de montrer la décroissance et l'unicité dans un deuxième temps par une «méthode de continuité». Pour obtenir le taux de décroissance, on prend le produit scalaire de (2.2) contre f , ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \|f\|_H^2 \leq -2\|f\|_H^2 (1 - \|f\|_H).$$

L'objectif est de montrer que $\|f(t)\|_H \leq 1 - \varepsilon$ afin d'obtenir une inégalité que l'on peut intégrer. Pour cela, on considère $t_* := \inf\{t \geq 0 : \|f(t)\|_H \geq 1 - \varepsilon\}$ qui, en supposant la donnée initiale suffisamment petite : $\|f_{\text{in}}\|_H < \lambda - \varepsilon$, est strictement positif. On montre que $t_* = +\infty$, sinon on aurait $\frac{d}{dt} \|f\|_H^2 \leq 0$ sur $[0, t_*]$, et en particulier $\|f(t_*)\|_H < 1 - \varepsilon$. La continuité de f impliquerait alors que $\|f(t)\|_H < 1 - \varepsilon$ sur $[0, t_* + \delta]$ avec δ suffisamment petit, contredisant ainsi la définition de t_* . L'inégalité différentielle se simplifie alors en

$$\frac{d}{dt} \|f\|_H^2 \leq -(1 + \varepsilon)\|f\|_H^2.$$

On obtient ainsi une décroissance exponentielle $\|f(t)\|_H \leq e^{-\frac{1+\varepsilon}{2}t} \|f_{\text{in}}\|_H$, qui n'est pas optimale, mais est améliorable à l'aide du lemme de Grönwall en prenant $\varepsilon = 1/3$:

$$\|f\|_H^2 \leq e^{-2t} \|f_{\text{in}}\|_H^2 + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} e^{-2\tau} \|f_{\text{in}}\|_H^3 d\tau \leq C e^{-2\lambda t} \|f_{\text{in}}\|_H^2,$$

pour une certaine constante $C > 0$. L'unicité se démontre en appliquant une méthode similaire à la différence de deux solutions $d := f^1 - f^2$ associées à la même donnée initiale.

Cette méthode est plus robuste, d'une part car l'étape d'existence et celle du retour à l'équilibre sont indépendantes et peuvent être adaptées séparément selon les estimations satisfaites par Λ et \mathcal{Q} avec des modifications mineures (voir les paragraphes suivants), d'autre part car on n'exige pas une vitesse de décroissance spécifique (qui dépend fortement du type d'interactions moléculaires).

Obstacles à la stratégie Les hypothèses faites sur \mathcal{Q} (et donc sur Λ) ne sont satisfaites que dans un unique cas², et toute différence entre les estimations disponibles sur Λ et \mathcal{Q} et celles supposées dans (2.3) ajoute une difficulté technique.

Absence d'autoadjonction. Pour les espaces physiquement intéressants (par exemple, de masse et énergie finie), l'opérateur \mathcal{L} n'est pas autoadjoint et on cherchera plutôt une

2. le cas des potentiels Maxwelliens, sous une hypothèse de cutoff, si le domaine spatial est le tore $\Omega = \mathbb{T}^3$, et que l'espace fonctionnel H est le sous-espace des distributions $L^2(\mathcal{M}^{-1}(v)dx dv)$ dont la partie macroscopique est de moyenne nulle. On renvoie par exemple à [34, 35].

estimation de la forme

$$\langle \mathcal{L}f, f \rangle_H \leq -\lambda \|f\|_H^2 + \text{termes d'ordre inférieur.} \quad (2.5)$$

On devra ensuite construire un produit scalaire équivalent $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H$ pour lequel Λ satisfait

$$\langle\langle \mathcal{L}f, f \rangle\rangle_H \leq -\lambda \|f\|_H^2. \quad (2.6)$$

Une telle estimation est en fait une étape intermédiaire de la stratégie d'élargissement dont nous parlerons à la Section 2.2.3.

De plus, concernant l'hypothèse $\|S_\Lambda(t)\| \leq Ce^{-\lambda t}\|f\|$ avec $C = \lambda = 1$, celle portant sur λ ne change rien à la stratégie mis à part la condition de petitesse sur la donnée initiale (plus λ est petit, plus la condition initiale devra être petite), cependant, si $C > 1$, il existe une norme équivalent $\|\cdot\|$ telle que $\|S_\Lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t}$ (voir la remarque suivant le Théorème 2.5).

Supposons dans le reste de cette section que l'opérateur \mathcal{L} est autoadjoint³ sur H .

Absence de coercivité sur tout l'espace fonctionnel H . L'opérateur \mathcal{L} n'est pas injectif en général (voir Section 2.2.4), donc on ne peut en général espérer qu'une estimation de la forme

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad \langle \mathcal{L}f, f \rangle_H \leq -\lambda \|f\|_H^2. \quad (2.7)$$

L'opérateur de transport $v \cdot \nabla_x$ étant antisymétrique dans les espaces H qui nous intéresseront⁴, on en déduit la même estimation pour Λ :

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad \langle \Lambda f, f \rangle_H \leq -\lambda \|f\|_H^2,$$

ce qui ne nous permet plus de fermer les estimations du paragraphe précédent. En réalité, le terme de transport n'a pas un rôle négligeable et les méthodes d'hypocoercivité permettent d'exploiter l'interaction entre \mathcal{L} et $v \cdot \nabla_x$. Nous en parlerons à la Section 2.2.4.

Absence de trou spectral. Seul le cas des potentiels durs mène à une estimation de la forme (2.6) (voir Section 2.2.4), dans le cas des potentiels mous on a

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad \langle \mathcal{L}f, f \rangle_H \leq -\lambda \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_H^2, \quad (2.8)$$

où l'on rappelle que $\gamma < 0$ est la puissance du potentiel cinétique introduit à la Section 1.4.3. On ne peut donc pas s'attendre à une décroissance exponentielle, cependant en considérant une hiérarchie d'espaces définis par les normes $(f \mapsto \|\langle v \rangle^k f\|_H)_{k \geq 0}$, on peut démontrer par des arguments d'interpolation une décroissance polynomiale du semigroupe S_Λ . Nous en

3. C'est le cas lorsque $H = L^2(\mathcal{M}^{-1}(v)dvdx)$

4. de la forme $L^2(m(v)dvdx)$ pour une certaine fonction de poids $m(v) > 0$.

parlerons à la Section 2.2.4.

Absence de continuité du terme bilinéaire (avec cutoff). En général, l'opérateur \mathcal{Q} n'est pas continu et ne satisfait donc pas d'estimation de la forme (2.3). Cependant, sous l'hypothèse de cutoff angulaire il vérifie

$$\|\langle v \rangle^{-\gamma/2} \mathcal{Q}(f, g)\|_H \lesssim \|f\|_H \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_H + \|g\|_H \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_H,$$

ou, de façon équivalente,

$$\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_H \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_H \left(\|g\|_H \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_H + \|f\|_H \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_H \right),$$

ainsi on peut facilement adapter le schéma itératif pour fermer les estimations en choisissant à la place l'espace défini par la norme

$$\begin{aligned} \|g\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \sup_{t \geq 0} e^{2\lambda t} \|g(t)\|_H^2 + \int_0^\infty e^{2\lambda t} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g(t)\|_H^2 dt, \quad \text{si } \gamma \geq 0, \\ \|g\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \sup_{t \geq 0} \|g(t)\|_H^2 + \int_0^\infty \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g(t)\|_H^2 dt, \quad \text{si } \gamma < 0, \end{aligned}$$

où la constante $\lambda > 0$ est la taille du trou spectral.

Absence de continuité du terme bilinéaire (sans cutoff) : Sans l'hypothèse de cutoff, l'opérateur bilinéaire \mathcal{Q} et l'opérateur linéarisé Λ font intervenir la régularité des arguments de la même façon :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_H &\lesssim \|h\|_{H^*} (\|g\|_H \|f\|_{H^*} + \|f\|_H \|g\|_{H^*}), \\ \langle \mathcal{L}f, f \rangle &\leq -\|f\|_{H^*}^2, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{H^*}$ est une norme anisotrope, comparable à des espaces de Sobolev, compliquée à manipuler mais «optimale», et dont nous parlerons à la Section 2.2.4. Enfin, dans les espaces physiquement intéressants, on ne connaît pas de telles estimations en terme de H et H^* , mais \mathcal{Q} peut cependant être contrôlé en terme d'espaces de Sobolev standard H^\pm :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_H &\lesssim \|h\|_{H^-} (\|f\|_H \|g\|_{H^+} + \|f\|_{H^-} \|g\|_H), \\ \|g\|_{H^-} &\lesssim \|g\|_{H^*} \lesssim \|g\|_{H^+}, \end{aligned}$$

ce qui ne permet cependant pas de fermer les estimations du schéma itératif. Par ailleurs, l'opérateur \mathcal{Q} n'est pas symétrique, en particulier les termes f et g ne jouent pas les mêmes rôles et on peut établir une estimation de la forme

$$\langle \mathcal{Q}(g, f), f \rangle_H \lesssim \|g\|_H \|f\|_{H^*}^2 + \text{termes d'ordre inférieur},$$

ce qui permet au moins de montrer la stabilité du schéma à condition de l'adapter en remplaçant le terme $\mathcal{Q}(f_N, f_N)$ par $\mathcal{Q}(f_N, f_{N+1})$. La convergence peut malgré tout être établie dans un espace plus gros. Cette stratégie a été adoptée dans [47, 45, 117] et dans l'article [44] en collaboration avec Kleber Carrapatoso (voir Section 3.3).

2.2.2 Théorie spectrale et des semigroupes

Nous faisons ici quelques rappels de théorie spectrale et des semigroupes utilisés dans l'article [88] (voir Section 3.1), suivie d'une présentation de la théorie d'élargissement utilisée dans [88, 89, 44] (voir 3.1 à 3.3).

Éléments de théorie spectrale.

On considère un opérateur T fermé et de domaine $D(T)$ dense sur un espace de Banach \mathcal{E} . On notera le demi-plan

$$\Delta_a := \{\Re z > a\}.$$

Commençons par rappeler la notion de spectre et de résolvante.

Définition 1. On définit l'ensemble résolvant $\varrho(T)$ et le spectre $\Sigma(T)$ par

$$\varrho(T) := \left\{ z \in \mathbb{C} : z - T \text{ possède un inverse dans } \mathcal{B}(\mathcal{E}) \right\}, \quad \Sigma(T) := \mathbb{C} - \varrho(T),$$

et sa résolvante \mathcal{R}_L est une application holomorphe définie par

$$\forall z \in \varrho(T), \quad \mathcal{R}_T(z) := (z - T)^{-1}.$$

La résolvante est l'objet central de la théorie spectrale générale. Étudier le spectre revient souvent à trouver des estimations sur la résolvante. Lorsque T est normal (en particulier s'il est autoadjoint), la connaissance (de la géométrie) du spectre apporte déjà énormément d'informations :

$$T \text{ normal} \Rightarrow \|\mathcal{R}_T(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \text{dist}(z; \Sigma(T))^{-1}. \quad (2.9)$$

Le spectre peut être décomposé de plusieurs façons différentes en fonction de la façon dont $z - T$ échoue à être inversible. La décomposition qui nous servira dans ce manuscrit est la décomposition spectre essentiel-spectre discret. Nous référons à [131] pour plus d'informations.

Théorème 2.4. *Considérons une valeur spectrale $\lambda \in \Sigma$ isolée dans le spectre, c'est-à-dire telle que $\Sigma(T) \cap B(\lambda, \delta) = \{\lambda\}$ pour $\delta > 0$ assez petit. On définit son projecteur spectral P ,*

son espace propre algébrique \mathcal{E}_λ et son complémentaire spectral $\mathcal{E}_\lambda^\perp$ par

$$P := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_T(z) dz, \quad \mathcal{E}_\lambda := \text{Im}(P), \quad \mathcal{E}_\lambda^\perp := \text{Im}(\text{Id} - P),$$

où Γ correspond (à un chemin homotope dans $\varrho(T)$) au cercle $C(\lambda; \delta/2)$. Lorsque \mathcal{E}_λ est de dimension finie m , la valeur λ est qualifiée de valeur propre discrète, et on appelle spectre discret $\Sigma_d(T)$ l'ensemble de ces valeurs propres discrètes. De plus, le développement en série de Laurent autour de ce point s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_T(\lambda + h) &= \frac{1}{h} \sum_{n=1}^m \left(\frac{Q}{h}\right)^n + \frac{P}{h} - S \sum_{n=0}^{\infty} (hS)^n, \\ Q &\in \mathcal{B}(\mathcal{E}_\lambda), \quad Q^{m+1} = 0, \\ S &:= (T - \lambda)|_{\mathcal{E}_\lambda^\perp}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_\lambda^\perp), \end{aligned} \quad (2.10)$$

où, afin d'alléger les notations, nous avons noté $\mathcal{B}(\mathcal{E}_\lambda)$ (resp. $\mathcal{B}(\mathcal{E}_\lambda^\perp)$) pour des opérateurs qui sont définis sur tout \mathcal{E} et valent 0 sur $\mathcal{E}_\lambda^\perp$ (resp. \mathcal{E}_λ). En particulier, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) λ est semi-simple, i.e. $\ker(T - \lambda) = \mathcal{E}_\lambda$ (les espaces algébriques et géométriques coïncident),
- (2) le nilpotent est nul, i.e. $Q = 0$,
- (3) le pôle de la résolvante associé à λ est d'ordre 1, i.e. $\mathcal{R}_T(\lambda + h) = \mathcal{O}(1/|h|)$.

En particulier, lorsque T est normal, toute valeur propre discrète est semi-simple par le point (3) et (2.9).

Précisons que lorsque l'opérateur T est normal, les sous-espaces stables \mathcal{E}_λ et $\mathcal{E}_\lambda^\perp$ sont orthogonaux, ce qui motive la notation $\mathcal{E}_\lambda^\perp$ même hors du cadre hilbertien. Cette décomposition $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\lambda \oplus \mathcal{E}_\lambda^\perp$ relativement à T est en un sens canonique. Bien entendu, cette notation est ambiguë lorsque \mathcal{E} est de Hilbert mais T n'est pas normal, nous ferons attention à éviter toute confusion.

Définition 2. On définit le spectre essentiel $\Sigma_{\text{ess}}(T)$ comme étant l'ensemble des autres valeurs spectrales, il est invariant par perturbation compacte :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{ess}}(T) &:= \Sigma(T) - \Sigma_d(T), \\ \forall K \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \text{ compact}, \quad \Sigma_{\text{ess}}(T) &= \Sigma(T + K). \end{aligned}$$

Perturbation de valeurs propres. Un des grands intérêts du projecteur spectral est qu'il permet d'étudier la stabilité des valeurs propres : si $\lambda \in \Sigma_d(T)$ et $T^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} T$ au sens où

$$\Gamma \subset \varrho(T^\varepsilon), \quad \sup_{z \in \Gamma} \|\mathcal{R}_{T^\varepsilon}(z) - \mathcal{R}_T(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

alors le projecteur associé P^ε converge vers P :

$$\|P^\varepsilon - P\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Un lemme dû à Tosio Kato⁵ [131, Section I-4.6] permet de conclure que pour ε assez petit, les projecteurs sont de même rang et donc Γ entoure autant de valeurs propres (comptées avec multiplicité) de T^ε que de T . De plus, resserrer le chemin Γ autour de λ force à considérer des valeurs de ε plus petites, mais la quantité de valeurs propres (avec multiplicité) sera la même, cela signifie que *les valeurs propres perturbées tendent vers λ lorsque ε tend vers 0* (voir Figure 2.2.1).

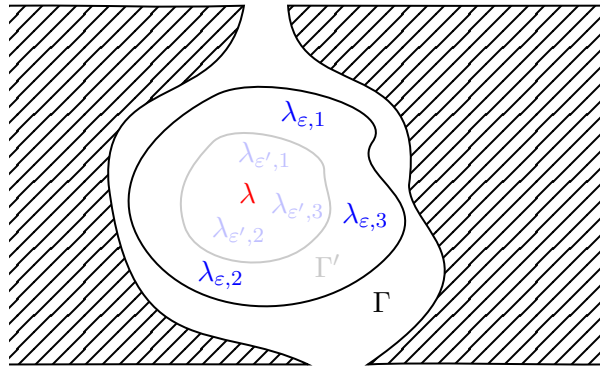


FIGURE 2.2.1 – En rouge la valeur propre λ de T , en bleu celles de T^ε et $T^{\varepsilon'}$ (où $\varepsilon' < \varepsilon$) entourées par deux chemins Γ et Γ' de tailles différentes mais isolant toujours λ du reste de spectre de T .

Plus précisément, le lemme de Kato fournit un isomorphisme $\mathcal{U}^\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ envoyant l'espace propre $\mathcal{E}_\lambda = \text{Im}(P)$ sur $\mathcal{E}^\varepsilon := \text{Im}(P^\varepsilon)$ (la somme des espaces propres associés aux valeurs propres perturbées de T^ε). Grâce à lui, on peut «redresser» l'opérateur $(T^\varepsilon)|_{\mathcal{E}^\varepsilon}$ en un autre défini sur un espace indépendant de ε :

$$\tilde{T}^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} \left((\mathcal{U}^\varepsilon)^{-1} \circ T^\varepsilon \circ \mathcal{U}^\varepsilon \right)_{|\mathcal{E}_\lambda} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_\lambda).$$

L'intérêt de cette matrice est qu'elle permet de raffiner le comportement des valeurs propres perturbées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\Sigma_\Gamma(T^\varepsilon) = \lambda + \varepsilon \Sigma(\tilde{T}^\varepsilon),$$

où $\Sigma_\Gamma(T^\varepsilon)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de T^ε entourées par Γ . On peut montrer que $\tilde{T}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{T}$ pour une certaine matrice \tilde{T} si et seulement si λ est semi-simple. Cette réduction permet ainsi de réitérer le processus précédent en l'appliquant à \tilde{T}^ε pour déterminer un développement limité des valeurs propres perturbées lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

5. 1917-1999

Éléments de théorie des semigroupes.

Contrairement au cas de la résolvante, le semigroupe généré par un opérateur (fermé de domaine dense) n'existe pas toujours. On énonce les théorèmes de Hille-Yosida ((**1**) \Leftrightarrow (**2**)), voir [165, Chapitre 1, Théorème 3.1]) et Lumer-Phillips ((**1**) \Leftrightarrow (**3**)), voir [165, Chapitre 1, Théorème 4.3]) qui caractérisent l'existence du semigroupe S_T en fonction du spectre et d'estimations de la résolvante ou de T .

Théorème 2.5 (Hille-Yosida-Lumer-Phillips). *Soit $\omega \in \mathbb{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes*

- (1) T génère un semigroupe fortement continu satisfaisant $\|S_T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq e^{\omega t}$
- (2) $\Sigma(T) \cap \Delta_\omega = \emptyset$ et $\|\mathcal{R}_T(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq (\Re z - \omega)^{-1}$ où $z \in \Delta_\omega$,
- (3) $\rho(T) \cap \Delta_\omega \neq \emptyset$ et $\|(T - z)f\|_{\mathcal{E}} \geq (z - \omega)\|f\|_{\mathcal{E}}$ où $z > \omega$ et $f \in D(T)$,
- (4) $\rho(T) \cap \Delta_\omega \neq \emptyset$ et $\Re \langle Tf, f \rangle_{\mathcal{E}} \leq \omega \|f\|_{\mathcal{E}}^2$ où $z > \omega$ et $f \in D(T)$ (si \mathcal{E} est de Hilbert).

Une variante de ce théorème permet de considérer des estimations $\|S_T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq Ce^{\omega t}$ où $C \geq 1$, à condition de considérer une norme ou un produit scalaire équivalent (on parle d'hypodissipativité, voir [105, Théorème 2.7]). On identifie ainsi deux quantités; la *borne spectrale* $s(T)$ et la *borne de croissance* $w(T) \geq s(T)$, définies par

$$s(T) := \sup \left\{ \Re \lambda : \lambda \in \Sigma(T) \right\},$$

$$w(T) := \inf \left\{ \omega : \exists C > 0 \text{ t.q. } \|S_T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq Ce^{\omega t} \right\}.$$

Insistons sur le fait qu'on a tout intérêt à avoir une borne de croissance $s(T)$ aussi petite que possible car cela signifie avoir une décroissance (si $w(T) < 0$) plus rapide. En général, l'égalité entre ces deux quantités est fautive, un contreexemple classique pour lequel on a $s(T) = -1$ et $w(T) = 0$ est donné dans [79, IV-2.7] :

$$\mathcal{E} := \mathcal{C}_0([0, +\infty]) \cap L^1(e^x dx), \quad T = \frac{d}{dx},$$

En revanche, le contexte hilbertien est bien plus favorable. En effet, si T est normal, on a que $s(T) = w(T)$, et même $\|S_T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq e^{s(T)t}$ grâce à (2.9) et le Théorème 2.5. Si en revanche T n'est pas autoadjoint mais que \mathcal{E} est tout de même un espace de Hilbert, le théorème de Gerhart-Herbst-Prüss-Greiner [87, 118, 169, 12] nous affirme que borner la résolvante sur Δ_ω suffit à avoir un taux de décroissance $\mathcal{O}(e^{\omega t})$ avec des constantes constructives. Nous renvoyons à [79, V-Théorème 1.11] pour une preuve.

Théorème 2.6 (Gerhart-Herbst-Prüss-Greiner). *Si T génère un semigroupe sur un espace de Hilbert satisfaisant, disons, l'estimation $\|S_T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq Me^{at}$ et si sa résolvante est bornée sur un demi-plan Δ_ω par une constante $K > 0$, alors on a que $\|S_T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq Ce^{\omega t}$ où $C = C(M, K, a, \omega)$ est constructif.*

La preuve de ce théorème repose sur l'identité de Plancherel appliquée à la formule de représentation du semigroupe S_T comme transformée de Laplace inverse de la résolvante (voir [79, Chapitre II, Théorème 1.10]) :

$$S_T(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma+i\mathbb{R}} e^{zt} \mathcal{R}_T(z) dz, \quad s > w(T), \quad (2.11)$$

où cette intégrale est à comprendre comme une limite forte des intégrales sur $\gamma + [-iM, iM]$ lorsque $M \rightarrow +\infty$.

Valeurs propres isolées à droite du spectre d'un générateur. Finissons cette section en discutant de la situation où le spectre du générateur d'un semigroupe fortement continu est contenu dans un demi-plan gauche, à l'exception d'une quantité finie de valeurs propres discrètes semi-simples :

$$\Sigma(T) \cap \Delta_\omega = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \Sigma_d(T).$$

On peut repartir de la représentation intégrale (2.11) puis changer le chemin d'intégration de $\gamma + i\mathbb{R}$ à $\omega + i\mathbb{R}$ à l'aide du théorème des résidus :

$$S_T(t) = \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{zt} \mathcal{R}_T(z); \lambda_j) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\omega+i\mathbb{R}} e^{zt} \mathcal{R}_T(z) dz.$$

Par l'hypothèse de semi-simplicité des valeurs propres, les valeurs $(\lambda_j)_j$ sont des pôles simples de la résolvante, ainsi

$$S_T(t) = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} P_{\lambda_j} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\omega+i\mathbb{R}} e^{zt} \mathcal{R}_T(z) dz.$$

Rappelons que comme le suggère le Théorème 2.4, intégrer la résolvante le long de $\omega + i\mathbb{R}$ correspond à «couper» les valeurs propres $(\lambda_j)_j$ car elles sont à «l'extérieur» du chemin (en le considérant comme un chemin de longueur infinie orienté de $\omega - i\infty$ à $\omega + i\infty$, voir Figure 2.2.2), et donc cette intégrale est à valeur dans $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{E}_{\lambda_j}^\perp$ avec les notations du Théorème 2.4. De plus, si \mathcal{E} est de Hilbert et on exhibe une borne de la résolvante restreinte à $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{E}_{\lambda_j}^\perp$ (ou de façon équivalente par le principe du maximum, si on peut exhiber une borne de la résolvante sur $\Delta_\omega \cap \{|z| \geq R\}$ avec R assez grand), alors on aura par le Théorème 2.6 le comportement asymptotique suivant

$$S_T(t) = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} P_{\lambda_j} + \mathcal{O}(e^{\omega t}).$$

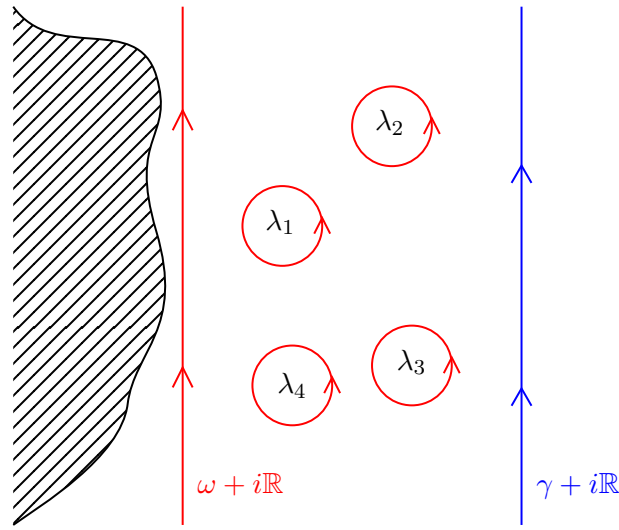


FIGURE 2.2.2 – Décalage du chemin d'intégration

2.2.3 Théorie d'élargissement

La théorie d'élargissement, initiée par Clément Mouhot en 2006 [156] puis développée avec Stéphane Mischler et Maria Gualdani [153, 154, 105] a pour but d'étendre des propriétés quantitatives spectrales et dynamiques d'un opérateur connues dans un espace petit (au sens de l'inclusion) à un espace plus gros. Par exemple, montrer que si un opérateur génère un semigroupe qui décroît comme $Ce^{-\lambda t}$ sur un petit espace, alors ce même opérateur génère un semigroupe qui décroît sur un gros espace comme $Me^{-\lambda t}$, et où M est explicite. En particulier, si l'opérateur est autoadjoint sur le petit espace (une situation très confortable comme nous l'avons souligné à la section précédente), l'étude de l'opérateur dans le gros espace s'en trouve grandement simplifiée.

Dans cette section, on notera le spectre d'un opérateur T fermé de domaine dense considéré dans un espace de Hilbert X par

$$\Sigma_X(T) = \{z \in \mathbb{C} : z - T \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{B}(X)\},$$

et on notera de même l'ensemble résolvant $\varrho_X(T)$, le noyau $\ker_X(T)$, et le projecteur spectral associé $P_{X,\lambda}$ à une valeur propre λ . Afin de présenter la théorie d'élargissement dans une version simplifiée utilisée dans ce manuscrit, on considère dans cette section un opérateur T générant un semigroupe sur deux espaces de Banach E et \mathcal{E} , où $E \subset \mathcal{E}$ continument, et admettant la décomposition

$$T = \mathcal{B} + \mathcal{A},$$

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{\mathcal{B}(E)} + \|S_{\mathcal{B}}(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq Ce^{-at}, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}; E),$$

pour un certain $a > 0$. Notons tout d'abord que d'après la Section 2.2.2, le spectre de \mathcal{B} dans chaque espace est contenu dans un demi-plan gauche :

$$\Sigma_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) \cap \Delta_{-a} = \Sigma_E(\mathcal{B}) \cap \Delta_{-a} = \emptyset, \quad \Delta_{-a} := \{\Re z > -a\}.$$

Factorisation de la résolvante et spectre discret.

Dans [105, 154], les principes de factorisation suivants sont établis ; en désignant par X l'espace \mathcal{E} ou E , on a pour tout $z \in \varrho_X(T) \cap \Delta_{-a}$

$$\mathcal{R}_T(z) = \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(z) + \mathcal{R}_T(z)\mathcal{A}\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(z) = \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(z) + \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(z)\mathcal{A}\mathcal{R}_T(z). \quad (2.12)$$

Une valeur spectrale étant un point pour laquelle la résolvante n'est pas bornée, cette formule de factorisation implique que le spectre de T dans Δ_{-a} est indépendant du choix d'espace E ou \mathcal{E} :

$$\Sigma_{\mathcal{E}}(T) \cap \Delta_{-a} = \Sigma_E(T) \cap \Delta_{-a}.$$

De plus, lorsque le spectre contenu dans Δ_{-a} est discret et fini dans un des deux espaces, les coefficients du développement en série de Laurent de la résolvante autour de chaque valeur propre (2.10) peuvent être identifiés, ainsi les projecteurs spectraux, nilpotents spectraux, ainsi que les espaces propres algébriques et géométriques coïncident :

$$\begin{aligned} \Sigma_X(T) \cap \Delta_{-a} &= \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \Sigma_{d,X}(T), \quad X = \mathcal{E}, E, \\ (Q_{\mathcal{E},\lambda_j})|_E &= Q_{E,\lambda_j}, \quad (P_{\mathcal{E},\lambda_j})|_E = P_{E,\lambda_j}, \quad \text{Im}(P_{\mathcal{E},\lambda_j}) = \text{Im}(P_{E,\lambda_j}), \\ \ker_{\mathcal{E}}(T - \lambda_j) &= \ker_E(T - \lambda_j). \end{aligned}$$

Factorisation de semigroupes.

Sachant que la résolvante est la transformée de Laplace du semigroupe (voir (2.11)), la factorisation (2.12) s'écrit au niveau des semigroupes

$$S_T(t)f_{\text{in}} = S_{\mathcal{B}}(t)f_{\text{in}} + (S_T * \mathcal{A}S_{\mathcal{B}})(t)f_{\text{in}} = S_{\mathcal{B}}(t)f_{\text{in}} + (S_{\mathcal{B}} * \mathcal{A}S_T)(t)f_{\text{in}}, \quad (2.13)$$

où la convolution de semigroupes est définie par

$$(U_1 * U_2)(t) := \int_0^t U_1(t - \tau)U_2(\tau)d\tau.$$

Notons que la formule de factorisation (2.13) n'est rien d'autre que la formule de Duhamel appliquée à l'équation

$$\partial_t f = \mathcal{B}f + \mathcal{A}f, \quad f(0) = f_{\text{in}},$$

qui peut être également formulée sous forme d'un système couplé en posant $f_{\mathcal{E}}(t) = S_{\mathcal{B}}(t)f_{\text{in}}$ et $f_E = f - f_{\mathcal{E}}$:

$$\begin{cases} \partial_t f_E = T f_E + \mathcal{A} f_{\mathcal{E}}, & f_E(0) = 0, \\ \partial_t f_{\mathcal{E}} = \mathcal{B} f_{\mathcal{E}}, & f_{\mathcal{E}}(0) = f_{\text{in}}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Techniques appliquées à un exemple type.

On se place dans un cadre hilbertien en considérant des espaces de la forme

$$E := L^2(m_{\infty} dv) \subset L^2(m dv) =: \mathcal{E},$$

où l'inclusion est dense et continue. Comme mentionné à la Section 2.2.1, on peut être amené à étudier un opérateur qui satisfait une estimation de type coercivité faisant intervenir des termes d'ordres inférieurs (2.5)

$$\begin{aligned} \langle T f, f \rangle_{L^2(m dv)} &\leq -\alpha \|f\|_{L^2(m_1 dv)}^2 + C \|f\|_{L^2(m_0 dv)}^2, \\ \frac{m_0(v)}{m_1(v)} &\xrightarrow{|v| \rightarrow \infty} 0, \quad m_0 \lesssim m_1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

pour certains $\alpha, C > 0$, et où $m \lesssim m_1$ ou bien $m_1 \lesssim m_0$. Dans ce cas, la théorie d'élargissement s'applique ; on pose

$$\mathcal{B} := T - M \mathbf{1}_{|v| \leq R}, \quad \mathcal{A} = M \mathbf{1}_{|v| \leq R},$$

où M et R sont pris suffisamment grands pour que

$$\langle \mathcal{B} f, f \rangle_{L^2(m dv)} \lesssim -\|f\|_{L^2(m_1 dv)}^2.$$

Cette approche est utilisée par exemple dans [105] pour l'équation de Fokker-Planck ou encore [117, 44, 105] pour celle de Boltzmann.

Taux de décroissance quantitatif. En comparant m_1 à m , on peut déterminer un taux de décroissance de $S_{\mathcal{B}}$ et ensuite obtenir un taux de décroissance de S_T grâce à la formule de factorisation de semigroupes (2.13). On s'intéresse à deux cas :

— Si $m \lesssim m_1$, on déduit une inégalité de coercivité classique :

$$\langle \mathcal{B} f, f \rangle_{L^2(m dv)} \leq -a \|f\|_{L^2(m dv)}^2,$$

pour un certain $a > 0$, et donc le taux de décroissance exponentiel $S_{\mathcal{B}}(t) = \mathcal{O}(e^{-at})$ sur $L^2(m dv)$. Si on dispose déjà du taux $S_T(t) = \mathcal{O}(e^{-\lambda t})$ sur le petit espace $L^2(m_{\infty} dv)$, où $\lambda < a$ et $\mathcal{A} : L^2(m dv) \rightarrow L^2(m_{\infty} dv)$ est borné, alors par factorisation des semi-

groupes (2.13)

$$\|S_T(t)\|_{\mathcal{B}(L^2(mdv))} \lesssim e^{-at} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-a\tau} d\tau \lesssim e^{-\lambda t}.$$

Autrement dit, le semigroupe S_T décroît aussi vite sur le gros espace $L^2(mdv)$ que sur le petit $L^2(m_\infty dv)$.

Le plus souvent, l'espace $L^2(mdv)$ est un espace plus naturel d'un point de vue physique. L'espace $L^2(m_\infty dv)$, quant à lui, en est un autre sur lequel T est autoadjoint ; la seule localisation du spectre (c'est-à-dire $-\lambda := s_{L^2(m_\infty dv)}(T)$) donne le taux de décroissance optimal $S_T(t) = \mathcal{O}(e^{-\lambda t})$ sur $L^2(m_\infty dv)$, dont on déduit le taux de décroissance $S_T(t) = \mathcal{O}(e^{-\lambda t})$ sur $L^2(mdv)$, qui est donc optimal car par élargissement, $-\lambda = s_{L^2(mdv)}(T)$.

- Si $m_1 \lesssim m$ mais \mathcal{B} est dissipatif dans $L^2(m_1)$, on peut montrer un taux de décroissance polynomial dans cet espace. En posant pour $\eta > 0$ assez petit

$$\frac{d}{dt} \left\{ \eta t \|S_{\mathcal{B}}(t)f\|_{L^2(m_1 dv)}^2 + \|S_{\mathcal{B}}(t)f\|_{L^2(mdv)}^2 \right\} \lesssim -\|S_{\mathcal{B}}(t)f\|_{L^2(m_1 dv)}^2,$$

ainsi le terme entre accolades est décroissant, d'où

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)f\|_{L^2(m_1 dv)} \lesssim \langle t \rangle^{-1/2} \|f\|_{L^2(mdv)}.$$

En travaillant avec une hiérarchie de poids $(m_k)_k$ pour lesquels on a

$$\langle \mathcal{B}f, f \rangle_{L^2(m_k dv)} \lesssim -\|f\|_{L^2(m_{k+1} dv)}^2,$$

on peut obtenir des taux de décroissance plus rapide en itérant l'argument précédent :

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)f\|_{L^2(m_k dv)} \lesssim \langle t \rangle^{-k/2} \|f\|_{L^2(mdv)}.$$

De façon similaire, si on peut montrer que $\|S_T(t)\mathcal{A}f\|_{L^2(m_k dv)} \lesssim \langle t \rangle^{-k/2} \|f\|_{L^2(m_k dv)}$, alors on obtient le même taux de décroissance par (2.13) (dès que $k > 2$)

$$\begin{aligned} \|S_T(t)f\|_{L^2(m_k dv)} &\lesssim \langle t \rangle^{-k/2} \|f\|_{L^2(mdv)}^2 + \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-k/2} \langle \tau \rangle^{-k/2} d\tau \|f\|_{L^2(mdv)} \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-k/2} \|f\|_{L^2(mdv)}. \end{aligned}$$

Une autre méthode d'interpolation, plus compliquée mais plus facile à adapter aux équations admettant un terme non-linéaire peut être trouvée dans [45, Lemme 3.1] ou notre travail [44, Section 4.1.2].

Notons que dans chacun des deux cas présentés, les orbites du semigroupe s'annulent en temps long : $\|S_\Lambda(t)f\|_{L^2(mdv)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. C'est clair dans le premier cas, dans le second

cela découle de la densité de $L^2(m_1 dv)$ dans $L^2(m dv)$.

Produit scalaire équivalent. Dans chaque cas, on est en mesure de se «débarrasser» du terme d'ordre inférieur dans (2.15) en construisant un produit scalaire $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ équivalent à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(m dv)}$ pour lequel T satisfait une inégalité de type coercivité sans terme d'ordre inférieur :

$$\|f\|^2 := \delta \|f\|_{L^2(m dv)}^2 + \int_0^\infty \|S_T(\tau)f\|_{L^2(m_0 dv)}^2 d\tau,$$

où $\delta > 0$ est un petit paramètre à ajuster plus tard. Cette norme est équivalente à la norme usuelle $\|\cdot\|_{L^2(m dv)}$ si les estimations précédentes permettent de montrer que le terme intégral est contrôlé par $\|f\|_{L^2(m dv)}^2$, ce qui requiert l'étude préliminaire présentée au paragraphe précédent. La coercivité, en notant $f(t) = S_T(t)f$ et en utilisant (2.15), vient de

$$\begin{aligned} \langle\langle Tf(t), f(t) \rangle\rangle &= \delta \langle Tf(t), f(t) \rangle_{L^2(m dv)} + \frac{d}{2dt} \left(\int_0^\infty \|f(t+\tau)\|_{L^2(m_0 dv)}^2 d\tau \right) \\ &\leq -\lambda \delta \|f\|_{L^2(m_1 dv)}^2 + C\delta \|f\|_{L^2(m_0 dv)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} \|f(t+\tau)\|_{L^2(m_0 dv)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Sachant que dans chaque cas $\|f(t)\|_{L^2(m dv)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, le terme intégral se simplifie :

$$\langle\langle Tf(t), f(t) \rangle\rangle \leq -\lambda \delta \|f(t)\|_{L^2(m_1 dv)}^2 + \left(C\delta - \frac{1}{2} \right) \|f(t)\|_{L^2(m_0 dv)}^2 \lesssim -\|f(t)\|_{L^2(m_1 dv)}^2,$$

dès que $C\delta < 1/2$. Notons que le problème des limites hydrodynamiques ne peut pas être traité avec cette approche car elle ne permet pas de distinguer les fluctuations microscopiques des fluctuations macroscopiques autour de l'équilibre (voir [35]).

Nous avons à présent les prérequis de la théorie des opérateurs nécessaires à la présentation des opérateurs de collisions linéarisés \mathcal{L} et Λ .

2.2.4 Propriétés des opérateurs linéarisé homogène \mathcal{L} et inhomogène Λ

Dans cette section, nous présentons les propriétés de l'opérateur linéarisé homogène \mathcal{L} et inhomogène $\Lambda := \mathcal{L} - v \cdot \nabla_x$, introduits au début de la Section 2.2 dont nous aurons besoin dans ce manuscrit, où nous rappelons que \mathcal{L} et l'équilibre de référence \mathcal{M} sont définis comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi &= \mathcal{Q}(\mathcal{M}, \varphi) + \mathcal{Q}(\varphi, \mathcal{M}), \\ \mathcal{M}(v) &= (2\pi)^{-3/2} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Noyau de l'opérateur linéarisé homogène \mathcal{L} .

La première propriété de l'opérateur de collision linéarisé à bien comprendre est son noyau. Nous avons évoqué les *Maxwelliennes infinitésimales* (associées à \mathcal{M}) à la Section 1.6.2 :

$$\psi[\rho, u, \theta] := \left(\rho + u \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3) \right) \mathcal{M},$$

qui s'interprètent comme les fluctuations visibles à l'échelle macroscopique autour d'un gaz proche de l'équilibre thermodynamique global \mathcal{M} au sens suivant :

$$\mathcal{M}_{1+\varepsilon\rho, \varepsilon u, 1+\varepsilon\theta} = \mathcal{M} + \varepsilon\psi[\rho, u, \theta] + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Ce développement injecté dans \mathcal{Q} met en évidence le fait que ces fluctuations annulent \mathcal{L} , ce qui est exactement la version linéarisée du fait que les Maxwelliennes annulent l'opérateur non-linéaire :

$$0 = \mathcal{Q}(\mathcal{M}_{1+\varepsilon\rho, \varepsilon u, 1+\varepsilon\theta}, \mathcal{M}_{1+\varepsilon\rho, u, 1+\varepsilon\theta}) = 0 + \varepsilon\mathcal{L}(\psi[\rho, u, \theta]) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Et ce sont effectivement les seules fonctions annulant \mathcal{L} . Considérons φ telle que $\mathcal{L}\varphi = 0$ et réécrivons la sous la forme attendue : $\varphi = \mathcal{M}\phi$, on a donc

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}\varphi &= \int B(v - v_*, \sigma) (\mathcal{M}'_* \varphi' - \mathcal{M}_* \varphi + \varphi'_* \mathcal{M}' - \varphi_* \mathcal{M}) d\sigma dv_* \\ &= \int B(v - v_*, \sigma) \mathcal{M} \mathcal{M}_* (\phi' + \phi'_* - \phi - \phi_*) d\sigma dv_*, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité $\mathcal{M}\mathcal{M}_* = \mathcal{M}'\mathcal{M}'_*$ due à la propriété de groupe de l'exponentielle et la conservation de l'énergie microscopique (1.7). Ainsi $\mathcal{L}\varphi = 0$ si et seulement si ϕ est une combinaison linéaire de $1, v, |v|^2$, c'est-à-dire que φ est une Maxwellienne infinitésimale. Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple à [52, 90].

Trou spectral de l'opérateur homogène \mathcal{L} .

Connaissant le noyau de \mathcal{L} , la prochaine question naturelle à considérer est «quelles sont les propriétés de \mathcal{L} sur l'orthogonal de son noyau?». Parler d'orthogonal sous-entend la présence d'une structure hilbertienne qui va définir cet orthogonal, or, comme nous l'avons vu à la Section 2.2.3, si \mathcal{L} est autoadjoint dans un certain espace alors cette décomposition coïncide avec la décomposition canonique induite par les projecteurs spectraux dans n'importe quel espace où la théorie d'élargissement s'applique. C'est une bonne nouvelle car les espaces de Hilbert «naturels» d'un point de vue physique sont de la forme $L^2(\langle v \rangle^{2+3/2+0} dv)$ car ils s'injectent dans $L^1(\langle v \rangle^{2+0} dv)$, sachant que $L^1(\langle v \rangle^2 dv)$ est optimal au sens où il représente les fluctuations de masse et d'énergie finie. Cependant, l'espace naturel d'un

point de vue mathématique est $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ au sens suivant :

1. la forme de Dirichlet de \mathcal{L} dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ est la linéarisation de la fonctionnelle de dissipation d'entropie introduite à la Section 1.5.2 :

$$-D[\mathcal{M} + \varepsilon f] = \varepsilon^2 \langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \leq 0,$$

ce qui implique que \mathcal{L} est dissipatif dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$,

2. \mathcal{L} est autoadjoint dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}f, g \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} &= \int (f'_* \mathcal{M}' - f_* \mathcal{M} + f' \mathcal{M}'_* - f \mathcal{M}'_*) g \mathcal{M}^{-1} d\zeta \\ &= \int f (g'_* \mathcal{M}' - \mathcal{M} g_* + \mathcal{M}'_* g' - \mathcal{M}'_* g) \mathcal{M}^{-1} d\zeta \\ &= \langle f, \mathcal{L}g \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}, \end{aligned}$$

où nous rappelons la notation $d\zeta = B(v - v_*, \sigma) d\sigma dv_* dv$, et nous avons utilisé une fois de plus les changements de variables $(v, v_*) \leftrightarrow (v', v'_*)$, $v \leftrightarrow v_*$ ainsi que l'identité $\mathcal{M} \mathcal{M}'_* = \mathcal{M}' \mathcal{M}'_*$,

3. le noyau de \mathcal{L} , constitué des Maxwelliennes infinitésimales, et son image

$$\left\{ f \in L^2(\mathcal{M}^{-1}dv) : \int f(1, v, |v|^2) dv = 0 \right\}$$

sont orthogonaux dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$.

L'espace $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$, qualifié d'*espace gaussien*, est donc idéal pour étudier rigoureusement l'opérateur de collision linéarisé \mathcal{L} . Dans un tel cadre, les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour $\lambda > 0$ grâce au Théorème 2.5 et (2.9) :

1. \mathcal{L} est continument inversible sur $\ker(\mathcal{L})^\perp$ et $\|\mathcal{L}^{-1}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathcal{M}^{-1}dv))} \leq \lambda^{-1}$,
2. \mathcal{L} admet un *trou spectral* de taille λ , c'est-à-dire $\Sigma(\mathcal{L}) \subset (-\infty, -\lambda] \cup \{0\}$,
3. $\langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \leq -\lambda \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2$ pour tout $f \perp \ker(\mathcal{L})$,
4. $S_{\mathcal{L}}(t) = \Pi + \mathcal{O}(e^{-\lambda t})$, où Π est la projection orthogonale sur $\ker(\mathcal{L})$.

La question du trou spectral est ainsi une version linéarisée de la conjecture de Cercignani (voir Section 1.5.2) : la partie d'une solution dans $\ker(\mathcal{L})^\perp$, correspondant aux fluctuations statistiques autour de l'équilibre \mathcal{M} sont invisibles à l'échelle macroscopique, s'atténuent exponentiellement vite.

Les travaux de Hilbert [120] en 1912 dans le cas des sphères dures ($\gamma = 1$) étendus par Grad [100] en 1963 aux potentiels durs ($0 \leq \gamma \leq 1$) sous l'hypothèse de cutoff (1.9) permettent de démontrer le second point en écrivant \mathcal{L} comme la somme d'une partie locale et non-locale. On introduit la *décomposition de Hilbert-Grad* qui est valide pour toute la

gamme de potentiels $\gamma \in (-3, 1]$ sous l'hypothèse de cutoff :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\nu(v) + K, \\ \nu(v) &= \int \mathcal{M}_* B(v - v_*, \sigma) d\sigma dv_* = \|b\|_{L^1(\mathbb{S}^2)} |\cdot|^\gamma * \mathcal{M}, \\ K &:= \mathcal{L} + \nu(v).\end{aligned}\tag{2.16}$$

La partie locale est l'opérateur de multiplication par la *fréquence de collisions* $\nu(v)$, qui est une fonction continue satisfaisant pour certaines constantes positives $\nu_0, \nu_1 > 0$

$$\nu_0 \langle v \rangle^\gamma \leq \nu(v) \leq \nu_1 \langle v \rangle^\gamma,$$

et la partie non-locale K est compacte dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ et fait gagner de l'intégrabilité :

$$K \in \mathcal{B}\left(L^2(\mathcal{M}^{-1}dv); L^\infty(\mathcal{M}^{-1}dv)\right),\tag{2.17}$$

$$\forall \beta \in \mathbb{N}, \quad K \in \mathcal{B}\left(L^\infty(\mathcal{M}^{-1}\langle v \rangle^\beta dv); L^\infty(\mathcal{M}^{-1}\langle v \rangle^{\beta+1} dv)\right).\tag{2.18}$$

Potentiels durs avec cutoff. Dans le cas des potentiels durs, l'invariance du spectre essentiel par perturbation compacte (Théorème 2.4) implique ainsi que le spectre de \mathcal{L} est constitué de l'image de $-\nu(v)$, à savoir $(-\infty, -\nu_0]$, et de valeurs propres discrètes isolées et négatives, dont 0, ainsi \mathcal{L} admet un trou spectral (voir Figures 2.2.3 et 2.2.4). Cet argument non-constructif ne permet pas d'avoir une estimation explicite de la taille du trou spectral et donc de la vitesse de convergence vers l'équilibre thermodynamique. Cependant, en 2005, Baranger et Mouhot [22] obtinrent une estimation explicite pour λ à l'aide d'arguments géométriques et physiques (plutôt que de la décomposition de Hilbert-Grad) les ramenant au cas Maxwellien ($\gamma = 0$) déjà étudié par Bobylev [26].

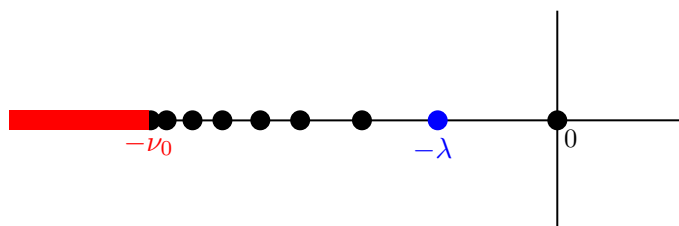
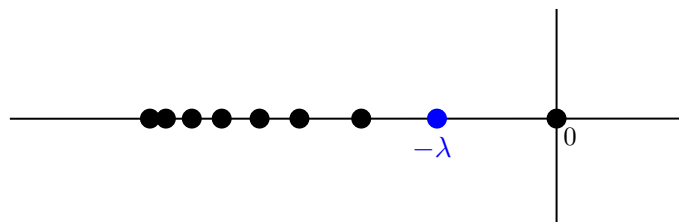
Pour obtenir l'estimation de coercivité «forte» permettant de fermer les estimations dans la Section 2.2.1 (voir paragraphe *Absence de continuité du terme bilinéaire*)

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad \langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \leq -\lambda' \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2,\tag{2.19}$$

il suffit d'interpoler l'estimation de coercivité venant du trou spectral avec l'estimation donnée par les bornes sur les deux parties de la décomposition de Hilbert-Grad :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} &\leq -\lambda \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2, \\ \langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} &\leq -\nu_0 \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2 + C \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2,\end{aligned}$$

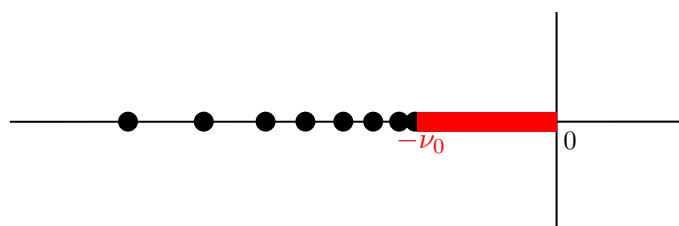
ce qui nous donne $\lambda' := \frac{\nu_0 \lambda}{\lambda + C}$.

FIGURE 2.2.3 – Structure du spectre pour des potentiels strictement durs ($\gamma > 0$)FIGURE 2.2.4 – Structure du spectre pour des potentiels Maxwelliens ($\gamma = 0$)

Potentiels mous avec cutoff. Dans le cas des potentiels mous ($\gamma < 0$), le spectre essentiel consiste en l'intervalle $[-\nu_1, 0)$, il n'y a donc pas de trou spectral (voir Figure 2.2.5). Ainsi, l'opérateur \mathcal{L} n'est pas continument inversible sur l'orthogonal de son noyau et on ne peut donc pas avoir de décroissance exponentielle de $S_{\mathcal{L}}$ sur ce sous-espace. On peut néanmoins prouver une «coercivité faible» similaire à (2.19) :

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad \langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \leq -\lambda \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2.$$

Cette estimation a été établie par des arguments non-constructifs par Golse et Poupaud [93] dans le cas $-2 < \gamma < 0$, Degond et Lucquin [55] dans le cas $-3 < \gamma < 0$, puis rendue explicite par Mouhot dans [156].

FIGURE 2.2.5 – Structure du spectre pour des potentiels mous ($\gamma < 0$)

Bien que l'on n'ait pas de retour à l'équilibre exponentiellement rapide, on peut prouver un retour à l'équilibre à vitesse polynomiale en travaillant dans une hiérarchie d'espaces à poids $L^2(\mathcal{M}^{-1}\langle v \rangle^k dv)$, pour obtenir une estimation de la forme

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad \|S_{\mathcal{L}}(t)f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}\langle v \rangle^k dv)} \leq C_{k,\ell} \langle t \rangle^{-\gamma\ell/2} \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}\langle v \rangle^{k+\ell} dv)}.$$

Sans cutoff. Dans le cas sans cutoff, la décomposition de Hilbert-Grad (2.16) n'a plus de sens car b n'est plus intégrable. Une autre approche fut adoptée par Pao [164] en 1974 qui à l'aide d'outils pseudo-différentiels prouva que lorsque les particules constituant le gaz se repoussent avec une force d^{-p} avec $p > 3$ (et donc $\gamma + 2s > 0$), le spectre est discret, et en particulier l'opérateur admet un trou spectral. Cette étude ne fit pas consensus, dans [135], Klaus jugea l'approche de Pao particulièrement technique et certains de ses arguments contestables. En 2007, Mouhot et Strain étendirent ces résultats [158] en prouvant que si $\gamma + 2s \geq 0$, alors l'opérateur \mathcal{L} admet un trou spectral et plus précisément qu'il admet une estimation de coercivité forte :

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad \langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \leq -\lambda_\varepsilon \| \langle v \rangle^{\gamma/2+s-\varepsilon} f \|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2,$$

où $\lambda_\varepsilon > 0$ est constructif pour $\varepsilon > 0$, mais pas pour $\varepsilon = 0$. Cette condition $\gamma + 2s \geq 0$ est en fait équivalente à l'existence d'un trou spectral dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ et l'implication réciproque fut démontrée par Gressman et Strain en 2011 [103].

Effet régularisant de l'opérateur homogène \mathcal{L} et perte de dérivées.

Comme mentionné à la Section 1.4.3, la partie angulaire $b(\cos \theta)$ du noyau de collisions présente une singularité pour les collisions rasantes $\theta \approx 0$, ce qui procure à l'opérateur de collision une expression similaire (en utilisant l'identité $\sqrt{2}|v - v'| = \sin(\theta/2)|v - v_*|$, voir Figure 1.4.1) à la formulation intégrale du laplacien fractionnaire :

$$\begin{aligned} Q(G, F)(v) &\approx \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} |v - v_*|^{\gamma+2s+2} \frac{G'_* F' - G_* F}{|v - v'|^{2+2s}} dv_* d\sigma, \\ -(-\Delta_v)^s F(v) &\approx \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(v') - F(v)}{|v - v'|^{3+2s}} dv'. \end{aligned}$$

Estimations sous-elliptiques. Ce lien a d'abord été étudié au niveau de la fonctionnelle de dissipation d'entropie $D[F]$ par Lions [144] en 1998, Villani [190] en 1999 et sa collaboration avec Alexandre, Desvillettes et Wennberg [1] en 2000 dans lequel sont développés des outils très utiles à la théorie sans cutoff et l'estimation suivante est démontrée :

$$\forall R > 0, \quad \| \sqrt{f} \|_{H^s(\{|v| \leq R\})}^2 \leq C_{f,R} \left(D(f) + \|f\|_{L^1(\langle v \rangle^2 dv)}^2 \right),$$

où $C_{f,R}$ dépend de f via sa masse et son entropie de façon explicite.

Dans l'article [156] mentionné au paragraphe précédent, Mouhot montra une propriété analogue au niveau du linéarisé :

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad R > 0, \quad \langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \leq -\lambda_R \|f\|_{H^s(\{|v| \leq R\}; \mathcal{M}^{-1}dv)}^2.$$

En particulier, combiné au théorème de Rellich-Kondrakov, cela fournit une preuve alter-

native du résultat de Pao : lorsque $\gamma + 2s > 0$, le spectre de \mathcal{L} est discret.

Normes anisotropes. Bien que les estimations du paragraphes précédent suffisent à montrer l'effet régularisant de la fonctionnelle de dissipation d'entropie $D[F]$ et de sa version linéarisée $f \mapsto \langle \mathcal{L}f, f \rangle$, elles ne fournissent qu'une borne inférieure. Dans les séries de travaux d'Alexandre, Morimoto, Ukai, Xu et Yang [5, 3, 4, 6, 7], et de Gressman et Strain [104, 103, 178], les auteurs choisirent d'étudier l'équation de Boltzmann à l'aide d'une norme «naturelle et optimale» $\|\cdot\|_*$, au sens où la norme de l'espace ambiant $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ et la norme $\|\cdot\|_*$ suffisent à estimer \mathcal{L} et \mathcal{Q} :

$$\forall f \perp \ker(\mathcal{L}), \quad \langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \approx -\|f\|_*^2, \quad (2.20)$$

$$\langle \mathcal{Q}(f, f), f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \|f\|_*^2. \quad (2.21)$$

Ces séries de travaux définissent, en notant $\mathfrak{f} := \mathcal{M}^{-1/2}f$, des normes de types Gagliardo, la première en fonction du noyau de collision :

$$\begin{aligned} \|f\|_*^2 &:= \|\langle v \rangle^{\gamma/2+s} f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2 + \int B(v-v_*, \sigma) \mathcal{M}_* (\mathfrak{f}' - \mathfrak{f})^2 d\sigma dv dv_*, \\ &\approx \|\langle v \rangle^{\gamma/2+s} f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2 + \int_{0 \leq \theta \leq \pi/2} |v-v_*|^{\gamma+2s} \mathcal{M}_* \left(\frac{\mathfrak{f}' - \mathfrak{f}}{|v' - v|^{1+s}} \right)^2 d\sigma dv dv_*, \end{aligned}$$

et la seconde à l'aide de la métrique δ induite par la la métrique euclidienne sur le paraboloïde $\{(v, |v|^2/2) : v \in \mathbb{R}^3\}$.

$$\|f\|_*^2 := \|\langle v \rangle^{\gamma/2+s} f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2 + \int_{|v-v'|\leq 1} (\langle v \rangle \langle v' \rangle)^{\gamma/2+s+1/2} \frac{(\mathfrak{f}' - \mathfrak{f})^2}{\delta(v, v')^{3+2s}} dv dv'.$$

Cette norme est qualifiée d'anisotrope car les différentes directions des dérivées $\nabla_v f$ ne sont pas toutes mesurées avec le même poids ; à v fixé, celles dans la direction v ne sont mesurées qu'avec un poids $\langle v \rangle^{\gamma/2}$ tandis que celles dans les directions orthogonales à v sont mesurées avec un poids $\langle v \rangle^{\gamma/2+s}$. Pour illustrer cette remarque, nous présentons la norme anisotrope associée à l'équation de Landau (correspondant formellement à $s = 1$) qui est explicite :

$$\begin{aligned} \|f\|_* &:= \|\langle v \rangle^{\gamma/2+1} f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \\ &\quad + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} \mathbf{P}(v) \nabla_v f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} + \|\langle v \rangle^{\gamma/2+1} \mathbf{P}^\perp(v) \nabla_v f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{P}(v) = |v|^{-2}v \otimes v$ est la projection orthogonale de \mathbb{R}^3 sur $\mathbb{R}v$. Nous mentionnons l'article d'Alexandre, Hérau et Li [2] dans lequel les auteurs ont étudié \mathcal{L} comme un opérateur pseudodifférentiel et établi une estimation de son symbole mettant en évidence cet effet de régularisation anisotrope.

Il semble maintenant évident qu'il est impossible d'estimer \mathcal{L} et \mathcal{Q} de façon aussi

confortable que (2.20)-(2.21) uniquement à l'aide d'espace de Sobolev isotropes, cependant ces séries d'articles ont établi les bornes attendues :

$$\|\langle v \rangle^{\gamma/2+s} f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2 + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{H^s(\mathcal{M}^{-1}dv)} \lesssim \|f\|_* \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2+s} f\|_{H^s(\mathcal{M}^{-1}dv)},$$

ce qui complique la fermeture d'estimations du schéma itératif de la Section 2.2.1. De même, une estimation de l'opérateur bilinéaire \mathcal{Q} à l'aide d'espaces isotropes sera de la forme (voir [113, Théorème 1.1])

$$\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2(\langle v \rangle^k dv)} \|\langle v \rangle^{w_1} g\|_{H^a(dv)} \|\langle v \rangle^{w_2} h\|_{H^b(dv)}, \quad (2.22)$$

pour un certain k , avec $w_1 + w_2 = \gamma + 2s$, $a + b = 2s$. Il est ainsi impossible, à l'aide de ces estimations isotropes, de contrôler \mathcal{Q} uniquement à l'aide de la forme de Dirichlet de \mathcal{L} . Utiliser une norme anisotrope présente ainsi cet avantage au prix de manipulations plus délicates.

Hypocoercivité de l'opérateur inhomogène $\Lambda = \mathcal{L} - v \cdot \nabla_x$.

Supposons pour simplifier la présentation qu'on est dans le cas où \mathcal{L} admet un trou spectral (lorsque $\gamma + 2s \geq 0$, voir les paragraphes précédents). On a vu que l'opérateur homogène satisfait une inégalité de coercivité sur l'orthogonal de son noyau :

$$\langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \leq -\lambda \|f - \Pi f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}^2,$$

où Π désigne la projection $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ -orthogonale sur $\ker(\mathcal{L})$. Dans le cas de l'équation linéarisée de Boltzmann homogène, la partie macroscopique Πf est indépendante du temps, et la partie microscopique $f - \Pi f$ est contrôlée par l'inégalité ci-dessus, d'où

$$\|S_{\mathcal{L}}(t)f - \Pi f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)} \leq e^{-\lambda t} \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}.$$

Dans le cas de l'équation inhomogène, l'opérateur Λ est lui aussi coercif sur $\ker(\mathcal{L})^\perp$ car le terme de transport $v \cdot \nabla_x$ est anti-symétrique :

$$\langle \Lambda f, f \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dx dv)} \leq -\lambda \|f - \Pi f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dx dv)}^2.$$

Cependant, la partie macroscopique Πf n'est pas annulée par Λ et n'est donc a priori pas indépendante du temps, donc l'estimation précédente permet seulement de déduire la borne $\|S_{\Lambda}(t)f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dx dv)} \leq \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dx dv)}$.

Le terme de transport n'est pas anti-symétrique pour tout produit scalaire ; la théorie d'hypocoercivité consiste en la construction d'un produit scalaire $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ équivalent au produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dx dv)}$ permettant de contrôler Πf et ainsi fermer les estima-

tions. Autrement dit, on cherche à construire un produit scalaire pour lequel l'opérateur Λ est coercif. Il existe deux approches principales ; une «méthode H^1 » introduite par Hérau et Nier [116] ainsi que par Eckmann et Hairer [75], puis développée par Nier et Helffer [114], Villani [193], puis Mouhot et Neumann [157], et une «méthode L^2 » introduite par Hérau [115] puis développée par Dolbeault, Mouhot et Schmeiser [71, 72] et Guo [110]. Nous renvoyons à [122, 193] pour une introduction générale aux méthodes d'hypocoercivité.

En s'inspirant des méthodes d'énergie non-linéaires développées par Guo [107, 106, 108], elles mêmes basées sur les «13 moments de Grad» [98], Gressman et Strain [103, Section 8.2] ont construit une norme équivalente $\|\cdot\| \approx \|\cdot\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dvdx)}$ permettant de contrôler le gradient de la partie macroscopique :

$$\langle \Lambda f, f \rangle \lesssim -\|\nabla_x \Pi f\|^2 - \|(\text{Id} - \Pi) f\|^2.$$

Cette estimation ne permet pas de contrôler la norme L^2 de la partie macroscopique Πf , cependant, dans le cas du tore $\Omega = \mathbb{T}^3$ et pour des solutions dont la partie macroscopique Πf est de moyenne nulle, l'inégalité de Poincaré $\|g - \int_{\mathbb{T}^3} g dx\|_{L^2} \lesssim \|\nabla_x g\|_{L^2}$ permet de fermer les estimations :

$$\langle \Lambda f, f \rangle \lesssim -\|\nabla_x \Pi f\|^2 - \|(\text{Id} - \Pi) f\|^2 \lesssim -\|f\|^2.$$

On peut également obtenir une version fréquentielle en x de cette estimation grâce à l'étude menée par Duan [74, Lemme 4.1] ; pour une norme équivalente $\|\cdot\| \approx \|\cdot\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)}$

$$\Re \langle (\mathcal{L} - iv \cdot \xi) \widehat{f}(\xi), \widehat{f}(\xi) \rangle \leq -\kappa \min\{1, |\xi|^2\} \|\widehat{f}(\xi)\|^2,$$

pour un certain $\kappa > 0$, où $\widehat{f}(\xi)$ désigne la transformée de Fourier de f par rapport à la variable x . Grâce à cette estimation, on est en mesure de montrer que les solutions décroissent dans l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^3$ grâce à la dispersion, malgré l'absence de trou spectral (voir Figure 3.1.1) :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dvdx)}^2 &\lesssim \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\kappa t |\xi|^2} \|\widehat{f}(\xi)\|^2 d\xi + e^{-\kappa t} \int_{|\xi| \geq 1} \|\widehat{f}(\xi)\|^2 d\xi \\ &\lesssim t^{-3/2} \|f\|_{L_x^1 L_v^2(\mathcal{M}^{-1}dvdx)}^2 + e^{-\kappa t} \|f\|_{L^2(\mathcal{M}^{-1}dvdx)}^2 \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-3/2} \|f\|_{L_x^1 L_v^2(\mathcal{M}^{-1}dvdx) \cap L^2(\mathcal{M}^{-1}dvdx)}, \end{aligned}$$

pour un certain $\kappa > 0$, où on a utilisé le changement de variable $t^{1/2}\xi \rightarrow \xi$ et le fait que la norme L^∞ dans l'espace de Fourier est bornée par la norme L^1 dans l'espace physique.

Théorie d'élargissement pour Boltzmann. Afin de développer pour l'équation de Boltzmann une théorie d'élargissement, il faut trouver un découpage $\mathcal{L} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$ comme

expliqué à la Section 2.2.3. En restant dans un cadre L^2 par rapport à la variable v , on peut adopter la stratégie présentée dans le paragraphe «Techniques appliquées à un exemple type», le point de départ sera alors une estimation (2.15). Pour développer une théorie dans L^1 , il faudra trouver un opérateur «régularisant» \mathcal{A} qui fournisse aussi un gain d'intégrabilité, c'est-à-dire que $\mathcal{A} : L^1(mdv) \rightarrow L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ soit borné. C'est ce qu'ont fait Gualdani, Mischler et Mouhot dans le cadre des sphères dures [105]. Ils ont adapté la décomposition de Hilbert-Grad (2.16) qui est déjà d'une forme proche de celle nécessaire : l'opérateur de multiplication par $-\nu$ vérifie les propriétés de coercivité, et K celles de «régularisation» (2.17)-(2.18). Ils ont modifié K pour avoir à la place un opérateur \mathcal{A} à noyau \mathcal{C}_c^∞ , le reste est alors de la forme $\mathcal{B} = -\nu + \text{pert.}$. Ainsi, l'opérateur de régularisation $\mathcal{A} : L^1(mdv) \rightarrow L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ est clairement borné pour n'importe quel poids raisonnable m , en particulier $m(v) = \langle v \rangle^k$, et ils ont montré que le terme noté «pert.» est petit relativement à ν dans les espaces fonctionnels qu'ils considèrent.

Notons que le découpage de l'opérateur homogène induit celui de l'opérateur inhomogène : $\Lambda = (\mathcal{B} - v \cdot \nabla_x) + \mathcal{A}$. La formule de Duhamel appliquée à cette décomposition fait intervenir l'opérateur $\mathcal{A}S_{\mathcal{B}-v \cdot \nabla_x}(t)$ qui est régularisant en x grâce à l'effet combiné du gain de régularité en v fourni par l'opérateur \mathcal{A} et des lemmes de moyenne (voir [105, Section 4.8]). Cela permet aux auteurs de travailler dans un large gamme d'espace de Sobolev, dont $W_v^{\sigma,p}W_x^{s,q}(mdxdv)$, contrairement à notre travail [89] qui est restreint à $L_v^p H_x^s(mdxdv)$ afin de se reposer sur des travaux antérieurs menés dans des espaces de cette forme [24, 86].

2.2.5 Théorie de Cauchy existante

Présentons les principaux résultats d'existence près de l'équilibre pour l'équation de Boltzmann.

Avec cutoff. En travaillant près de l'équilibre, Grad construisit en 1965 [101] les premières solutions spatialement inhomogènes en temps court. Ukai donna dans les années 1970 une nouvelle impulsion à la théorie de Cauchy et établit, dans le cas de potentiels durs, l'existence de solutions globales près de l'équilibre dans $L_v^\infty H_x^s(\langle v \rangle^k \mathcal{M}^{-1}dx dv)$, d'abord dans le tore en 1974 [186], puis dans l'espace entier en 1976 [187], en se basant sur des études spectrales de l'équation linéarisée [186, 77, 189] (mentionnons également [175]). Le cas des potentiels mous fut traité en 1980 par Caffisch [36], et en 1982 par Asano et Ukai [189] (uniquement pour $\gamma \in (-1, 0)$, mais son approche fut étendu à toute la gamme $\gamma \in (-3, 0)$ par Sun et Wu en 2021 [201] puis Deng en 2022 [57]). Ces résultats ont été retrouvés plus tard à l'aide de méthodes d'énergie dans des espaces de la forme $L_v^2 H_x^s(\mathcal{M}^{-1}dv dx)$ par Kawashima [133], Liu, Yang et Yu [146], Guo [108] et Strain [179, 180], ainsi que Duan [73].

En 2017, Gualdani, Mischler et Mouhot ont, dans le prolongement de [156], relaxé les condition d'intégrabilité des résultats précédents et construit des solutions dans des espaces

de la forme $W_v^{\ell,p} W_x^{s,q} (\langle v \rangle^k dv dx)$ dans le cas des sphères dures, puis le cas des potentiels mous a été étudié par Cao [39].

Sans cutoff. Le premier résultat d'existence de solution près de l'équilibre dans le cas sans cutoff est dû à Ukai [188] ; il montra l'existence de solutions locales pour des données initiales analytiques en (x, v) ayant une décroissance gaussienne à l'aide du théorème de Cauchy-Kowalewski. Entre 2011 et 2012, Gressman et Strain [104, 103, 178] et Alexandre, Morimoto, Ukai, Xu, Yang [5, 3, 6] construisirent les premières solutions globales dans des espaces de la forme $H_{x,v}^s (\langle v \rangle^k \mathcal{M}^{-1} dx dv)$ en travaillant avec les normes anisotropes de la Section 2.2.4. Sohinger étendit ces résultats avec Strain à certains espaces de Besov en 2014 [176], et Fang s'affranchit de certaines hypothèses techniques de régularité et décroissance en 2022 [195]. Mentionnons également les travaux de Deng [56] qui travailla avec une norme anisotrope définie à partir de l'étude pseudo-différentielle de [2].

Des données initiales ayant une décroissance polynomiale furent considérées suite à l'impulsion donnée par [105] et grâce aux estimations non-linéaires (telles que (2.22)) établies dans [113]. Lorsque le domaine spatial est le tore, le cas des potentiels durs fut traité dans [117, 9], et celui des potentiels mous dans [40]. Nous avons abordé le cas de l'espace entier pour des potentiels mous dans [44], voir Sections 3.3 et 3.4.

2.3 Limites hydrodynamiques

On s'intéresse à dériver de façon quantitative le modèle de Navier-Stokes incompressible

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \mu \Delta_x u, & \nabla_x \cdot u = 0, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta = \kappa \Delta_x \theta, & \nabla_x (\rho + \theta) = 0, \end{cases}$$

associé aux conditions initiales (en notant \mathbb{P} le projecteur de Leray sur les champs incompressibles)

$$u|_{t=0} = \mathbb{P} \left(\int f_{\text{in}}(v) v dv \right), \quad \rho|_{t=0} = -\theta|_{t=0} = \frac{1}{2} \int f_{\text{in}}(v) (|v|^2 - 5) dv,$$

à partir de celui de Boltzmann remis à l'échelle

$$\varepsilon \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon + \mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \quad f|_{t=0} = f_{\text{in}},$$

dans l'asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$, et on s'intéresse spécifiquement à la convergence forte de solutions fortes de ces deux modèles. La théorie de Bardos-Golse-Levermore (voir Théorème 2.2) réduit ce problème à deux enjeux :

- (1) Construire des solutions fortes à l'équation de Boltzmann.
- (2) Montrer que ces solutions admettent une certaine limite en un sens fort.

(2bis) Quantifier ce taux de convergence.

Dans cette section, nous présentons comment aborder ce problème via les formulations intégrales des équations, puis nous présentons les résultats phares de cette problématique, en insistant sur ceux qui ont inspiré notre travail [89] présenté à la Section 3.2.

2.3.1 Comparaison des formulations intégrales

Une possibilité est de comparer les formulations intégrales des deux équations ; celle de Boltzmann :

$$f^\varepsilon(t) = U^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \Psi^\varepsilon(f^\varepsilon, f^\varepsilon),$$

$$U^\varepsilon(t) := \exp\left(\frac{t}{\varepsilon^2}(\mathcal{L} - \varepsilon v \cdot \nabla_x)\right), \quad \Psi^\varepsilon(g, g) := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U^\varepsilon(t - \tau) \mathcal{Q}(g(\tau), g(\tau)) d\tau$$

avec celle de Navier-Stokes-Fourier, écrite sous la forme d'une Maxwellienne infinitésimale f :

$$f(t, x, v) = \left(\rho(t, x) + u(t, x) \cdot v + \frac{1}{2} (|v|^2 - 3) \theta(t, x) \right) \mathcal{M}(v),$$

afin d'avoir une formulation compatible :

$$f(t) = U(t)f_{\text{in}} + \Psi(f, f),$$

où les opérateurs U et Ψ sont définis par

$$\begin{aligned} U(t)f(x, v) &= \left(e^{\kappa t \Delta_x} \rho(x) \right) \times \mathcal{M}(v) \\ &\quad + \left(e^{\mu t \Delta_x} u(x) \right) \cdot v \mathcal{M}(v) \\ &\quad + \left(e^{\kappa t \Delta_x} \theta(x) \right) \times \frac{1}{2} (|v|^2 - 3) \mathcal{M}(v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(f, f)(t, x, v) &= \int e^{\kappa(t-\tau)\Delta_x} \nabla_x \cdot \left(u(\tau, x) \rho(\tau, x) \right) d\tau \times \mathcal{M}(v) \\ &\quad + \int e^{\mu(t-\tau)\Delta_x} \nabla_x \cdot \mathbb{P} \left(u(\tau, x) \otimes u(\tau, x) \right) d\tau \cdot v \mathcal{M}(v) \\ &\quad + \int e^{\kappa(t-\tau)\Delta_x} \nabla_x \cdot \left(u(\tau, x) \theta(\tau, x) \right) d\tau \times \frac{1}{2} (|v|^2 - 3) \mathcal{M}(v). \end{aligned}$$

Il s'agit alors de montrer la convergence du terme linéaire $U^\varepsilon f_{\text{in}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} U f_{\text{in}}$ et du terme de Duhamel $\Psi^\varepsilon(f^\varepsilon, f^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(f, f)$. On peut pour cela découper le semigroupe en plusieurs morceaux identifiés dans les études spectrales de Ellis, Pinsky et Ukai [77, 186, 187] qui ont été étendues à un cadre fonctionnel plus général dans nos travaux [88] (voir Section 3.1) :

$$U^\varepsilon = U_{\text{NSFI}}^\varepsilon + U_{\text{ondes}}^\varepsilon + U_{\text{cinét.}}^\varepsilon.$$

induisant ainsi le découpage de la formulation intégrale :

$$\begin{aligned} U^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \Psi^\varepsilon(f^\varepsilon, f^\varepsilon)(t) &= U_{\text{NSFI}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_{\text{NSFI}}^\varepsilon(t-\tau)\mathcal{Q}(f^\varepsilon(\tau), f^\varepsilon(\tau))d\tau \\ &\quad + U_{\text{ondes}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_{\text{ondes}}^\varepsilon(t-\tau)\mathcal{Q}(f^\varepsilon(\tau), f^\varepsilon(\tau))d\tau \\ &\quad + U_{\text{cinét.}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_{\text{cinét.}}^\varepsilon(t-\tau)\mathcal{Q}(f^\varepsilon(\tau), f^\varepsilon(\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Les travaux d'Ellis, Pinsky et Ukai [77, 186, 187] ont permis à Bardos et Ukai [24] puis à Gallagher et Tristani [86] d'étudier le comportement asymptotique de chaque morceau lorsque $t \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$, et en particulier de maîtriser chacun des trois morceaux du terme singulier $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U^\varepsilon(t-\tau) \dots d\tau$.

- D'après [24, 86] basé sur l'étude des modes hydrodynamiques [77], le morceau $U_{\text{NSFI}}^\varepsilon$, associé au modèle de Navier-Stokes-Fourier incompressible, est tel que

$$U_{\text{NSFI}}^\varepsilon(t) = U(t) + \varepsilon \nabla_x \cdot U^{(1)}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad U\mathcal{Q} = 0,$$

ainsi la partie correspondante de la formulation intégrale satisfait

$$\begin{aligned} U_{\text{NSFI}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_{\text{NSFI}}^\varepsilon(t-\tau)\mathcal{Q}(f^\varepsilon(\tau), f^\varepsilon(\tau))d\tau \\ = U(t)f_{\text{in}} + \nabla_x \cdot \int_0^t U^{(1)}\mathcal{Q}(f^\varepsilon(\tau), f^\varepsilon(\tau))d\tau + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

- D'après [24, 86] basé sur [77], le morceau $U_{\text{ondes}}^\varepsilon$, associé au modèle des ondes, satisfait des estimations de dispersion grâce auxquelles on a

$$U_{\text{ondes}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_{\text{ondes}}^\varepsilon(t-\tau)\mathcal{Q}(f^\varepsilon(\tau), f^\varepsilon(\tau))d\tau = \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{t}\right\}\right).$$

- Les résultats de [186, 187] impliquent que la partie cinétique $U_{\text{cinét.}}^\varepsilon$ décroît exponentiellement vite avec un taux $\mathcal{O}(e^{-\sigma t/\varepsilon^2})$, ainsi

$$U_{\text{cinét.}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U_{\text{cinét.}}^\varepsilon(t-\tau)\mathcal{Q}(f^\varepsilon(\tau), f^\varepsilon(\tau))d\tau = \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(e^{-\sigma t/\varepsilon^2}).$$

Les termes $\mathcal{O}(\min\{1, \varepsilon/t\})$ et $\mathcal{O}(e^{-\sigma t/\varepsilon^2})$ représentent des couches initiales, correspondant respectivement aux ondes dans f^ε et à la partie «purement cinétique» de f^ε .

Présentons à présent des travaux concernant la convergence de solutions fortes de l'équation de Boltzmann vers des solutions de Navier-Stokes, et particulièrement [35, 86] qui constituent un point de départ de notre travail [89] présenté à la Section 3.2.

2.3.2 Approche de Bardos-Ukai [24] et Gallagher-Tristani [86]

Bardos et Ukai [24] montrent en 1991 la convergence des solutions construites par Ukai dans [187] dans l'espace $L_v^\infty H_x^s(\langle v \rangle^k \mathcal{M}^{-1} dv dx)$. Ils établissent des bornes uniformes en ε pour U^ε et Ψ^ε à l'aide de l'étude spectrale menée dans [77, 187], leur permettant ainsi de montrer que de petites données initiales f_{in} génèrent des solutions globales et bornées uniformément en ε à l'équation

$$f^\varepsilon(t) = U^\varepsilon(t)f_{\text{in}} + \Psi(f^\varepsilon, f^\varepsilon)(t).$$

Pour justifier la convergence forte de f^ε vers une limite f , ils prouvent que l'opérateur U^ε (resp. Ψ^ε) converge vers U (resp. Ψ) et que la suite $(\Psi^\varepsilon(f, f))_\varepsilon$ est compacte à l'aide du théorème d'Arzelà-Ascoli.

Gallagher et Tristani [86] choisissent en 2020 de construire la solution f^ε en se reposant sur l'existence de solution pour le modèle limite (c'est-à-dire sur l'existence de f), et améliorent le résultat de Bardos et Ukai sur plusieurs points.

- Elles se débarrassent de la condition de petitesse sur la donnée initiale, la remplaçant par une condition de petitesse sur ε , et montrent que le temps d'existence de la solution f^ε de Boltzmann est minoré par celui de la solution de Navier-Stokes f .
- Elles obtiennent une vitesse de convergence de f^ε vers f de l'ordre de $\varepsilon^{1/2}$ lorsque la donnée initiale est suffisamment régulière.

Pour cela, elles construisent et montrent la convergence de f^ε de façon indirecte en prenant comme inconnue non pas f^ε mais l'erreur d'approximation entre f^ε et f :

$$u^\varepsilon(t) := f^\varepsilon(t) - f(t) - U^\varepsilon(t)f_{\text{in}} - U_{\text{cinét.}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}},$$

c'est-à-dire la solution de Boltzmann f^ε à laquelle on a retranché sa limite a priori f , la couche initiale $U^\varepsilon(t)f_{\text{in}}$ correspondant aux ondes générées par la partie de Πf_{in} qui est compressible et ne satisfait pas la relation de Boussinesq de, et la couche initiale $U_{\text{cinét.}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}}$ générée par $f_{\text{in}} - \Pi f_{\text{in}}$. Elles isolent ainsi la partie de $f^\varepsilon - f$ susceptible de tendre vers 0 uniformément en temps. L'équation satisfaite par cette différence est de la forme

$$f_{\text{err.}}^\varepsilon = \mathcal{S}^\varepsilon + \Phi^\varepsilon f_{\text{err.}}^\varepsilon + \Psi^\varepsilon(f_{\text{err.}}^\varepsilon, f_{\text{err.}}^\varepsilon),$$

où Φ^ε est un opérateur linéaire et \mathcal{S}^ε est un terme source, tous deux dépendant des termes retranchés à la solution f^ε . Le terme source tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, et l'opérateur linéaire Φ^ε a une petite norme dans un espace adapté (ce qui permet de ne pas supposer la donnée initiale petite). Cette réduction permet alors à Gallagher et Tristani de montrer l'existence d'une solution u^ε de taille comparable à \mathcal{S}^ε , déduisant ainsi à la fois l'existence et l'unicité de f^ε et sa convergence vers f .

2.3.3 Approche de Briant-Merinho-Mouhot [35]

Rappelons que dans [105], les auteurs ont montré que l'opérateur linéarisé est décomposé comme $\mathcal{L} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$, où la partie dissipative \mathcal{B} génère un semigroupe qui décroît comme $\mathcal{O}(e^{-\lambda t})$ sur $L^2(\langle v \rangle^k dv)$ pour un certain $\lambda > 0$, et la partie \mathcal{A} est dite «régularisante» au sens où $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(L^2(\langle v \rangle^k dv); L^2(\mathcal{M}^{-1} dv))$.

En 2019, Marc Briant, Sara Merino et Clément Mouhot [35] ont montré que les solutions construites dans [105] dans l'espace $L_v^2 H_x^s(\langle v \rangle^k dv)$ étaient uniformément bornées en ε et donc faiblement compactes. Pour cela, ils ont adopté une stratégie d'élargissement utilisant un système d'équations couplées comme (2.14) plutôt qu'une stratégie de factorisation de semigroupes qui ne ferait pas de distinction entre la partie microscopique de U^ε et sa partie macroscopique, ce qui est nécessaire pour contrôler le terme $\frac{1}{\varepsilon} U^\varepsilon \mathcal{Q}$. Ils ont ainsi considéré le découpage $f^\varepsilon = f_{\text{pol.}}^\varepsilon + f_{\text{gau.}}^\varepsilon \in L_v^2 H_x^s(\langle v \rangle^k dv dx) + L_v^2 H_x^s(\mathcal{M}^{-1} dv dx)$ évoluant selon le système d'équations couplées

$$\begin{aligned} \partial_t f_{\text{pol.}}^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) f_{\text{pol.}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f_{\text{pol.}}^\varepsilon, f_{\text{pol.}}^\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f_{\text{pol.}}^\varepsilon, f_{\text{gau.}}^\varepsilon), & f_{\text{pol.}}^\varepsilon(0) &= f_{\text{in}}, \\ \partial_t f_{\text{gau.}}^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{L} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) f_{\text{gau.}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f_{\text{gau.}}^\varepsilon, f_{\text{gau.}}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A} f_{\text{pol.}}^\varepsilon, & f^\varepsilon(0) &= 0. \end{aligned}$$

Un tel découpage permet de se ramener à certains travaux menés dans $L^2(\mathcal{M}^{-1} dv)$, à condition de savoir y intégrer le terme de couplage $\frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A} f_{\text{pol.}}^\varepsilon$. Le terme singulier $\frac{1}{\varepsilon} U^\varepsilon$ (ou plutôt l'interaction entre $\frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{L} - \varepsilon v \cdot \nabla_x)$ et $\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}$ dans ce contexte différentiel plutôt qu'intégral) put alors être contrôlé à l'aide des résultats d'hypocoercivité de Briant [34] dans $H^k(\mathcal{M}^{-1} dx dv)$.

Notons que cette méthode est assez flexible car la donnée initiale f_{in} pourrait être découpée autrement. Dans [89], nous avons choisi d'assigner à $f_{\text{gau.}}^\varepsilon$ la partie macroscopique de f_{in} (qui est bien dans $L^2(\mathcal{M}^{-1} dv)$ car elle appartient alors à $\ker(\mathcal{L})$).

2.3.4 Autres approches

Mentionnons également les travaux de De Masi, Esposito et Lebowitz [54] qui, dans la continuité de [38, 37, 136] pour l'équation d'Euler, montrèrent qu'étant donnée une solution forte u de Navier-Stokes sur $[0, T]$, il existe des solutions F^ε à l'équation de Boltzmann (dans le tore $\Omega = \mathbb{T}^3$, pour des potentiels durs $\gamma \in [0, 1]$ avec cutoff) telles que

$$\|\mathcal{M}_{1, \varepsilon u, 1} - F^\varepsilon\|_{L_{t,v}^\infty H_x^2(\langle v \rangle^{4+0} dv)} \leq C\varepsilon^2.$$

Guo, quant à lui, s'est intéressé dans [109] aux termes dans le développement de Hilbert

$$F^\varepsilon = \mathcal{M} + \varepsilon f^{(1)} + \dots + \varepsilon^{n-1} f^{(n)} + \varepsilon^n f^{(n), \varepsilon}.$$

pour toute la gamme de potentiels $\gamma \in (-3, 1]$ sous l'hypothèse de cutoff, ainsi que pour l'équation de Landau (correspondant au cas $\gamma = -3$). Il a montré qu'en prescrivant les champs hydrodynamiques des termes $f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$ et en imposant une condition de petitesse sur ceux de $f^{(1)}$ (les conditions initiales de Navier-Stokes-Fourier), il existe une solution F^ε de la forme ci-dessus dont les termes $f^{(k)}$ et $f^{(n),\varepsilon}$ sont bornés dans $L_v^2 H_x^s(\mathcal{M}^{-1}dv)$ uniformément en temps et en ε . Une conséquence est que le taux optimal de convergence de f^ε vers la solution de Navier-Stokes-Fourier est d'ordre ε .

Dans le cas sans cutoff, Jiang, Xu et Zhao [129] ont construit et montré la convergence de solutions à l'équation de Boltzmann pour toute la gamme de potentiels sans hypothèse de cutoff dans des espaces de types $L_v^2 H_x^s(\mathcal{M}^{-1}dv)$ dans l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Une autre approche, basée sur des techniques d'hypocoercivité, a permis à Briant dans [34] de montrer la convergence de solutions de Boltzmann vers des solutions de Navier-Stokes dans des espaces de type $H_{x,v}^s(\mathcal{M}^{-1}dv)$ à l'aide de techniques d'hypocoercivité lui permettant d'obtenir des estimations uniformes en ε , et de l'étude spectrale [77] pour montrer que la convergence est forte.

Nous mentionnons ici des travaux similaires. Dans [11], Bertrand Lods, Ricardo Alonso et Isabelle Tristani montrent que l'équation de Boltzmann inélastique (pour laquelle les collisions entre particules ne conservent pas l'énergie) donne à la limite un système hydrodynamique de type Navier-Stokes-Fourier avec un terme de forçage dû à la dissipation d'énergie lors des collisions inélastiques. Mohamad Rachid a montré en collaboration avec Kleber Carrapatoso et Isabelle Tristani [173, 46] la convergence des solutions de Landau (sous le même scaling que celui utilisé pour Boltzmann) vers des solutions de Navier-Stokes-Fourier.

Remarquons que dans plusieurs de ces résultats, la (durée de) régularité de la solution de Boltzmann est conditionnée à celle de sa limite hydrodynamique. En un sens, «le pire qui puisse arriver» est au niveau hydrodynamique, comme le suggère la série de travaux de Cyril Imbert en collaboration avec Luis Sylvestre et Clément Mouhot [124, 125, 123, 126, 127] : étant données des bornes uniformes en temps sur la densité de masse, vitesse et énergie, la solution de l'équation de Boltzmann est lisse et ses dérivées admettent des bornes explicites (voir [125]). En particulier, la solution ne peut pas exploser sans que ses champs hydrodynamiques n'exploient.

2.4 Conclusion

Les travaux fondateurs de Hilbert et Grad ont montré que le cadre mathématique idéal pour développer une théorie près de l'équilibre \mathcal{M} était celui des espaces de la forme $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$, et les premiers résultats de limites hydrodynamiques ont été démontrés dans ce cadre fonctionnel. Cependant, le cadre physique idéal serait plutôt de la forme $L^1(\langle v \rangle^2 dv)$ car il correspond au fait que la densité de masse, de vitesse et d'énergie

soient finis. L'extension aux espaces $L^p(\langle v \rangle^k dv)$ de la théorie de Cauchy près de l'équilibre menée par Gualdani, Mischler et Mouhot constitue un premier pas, et les estimations uniformes en ε de Briant, Merino et Mouhot [35] impliquant ainsi une convergence faible⁶ vers une solution de Navier-Stokes-Fourier, en constitue un second. Nous nous sommes intéressés à la question de la convergence forte de ces solutions.

Nous présentons dans le Chapitre 3 deux travaux menés dans cette direction, un premier généralisant l'étude spectrale [77, 187] aux espaces $L^2(\mathcal{M}^{-1} dx dv)$, et un second dérivant les équations de Navier-Stokes-Fourier depuis celle de Boltzmann dans des espaces de la forme $L^p(\langle v \rangle^k dv)$.

6. le long d'une sous suite

Chapitre 3

Les travaux présentés dans ce manuscrit

3.1 Étude spectrale pour des poids polynomiaux

L'étude du spectre de l'opérateur linéarisé $\mathcal{L} - v \cdot \nabla_x$ est un vieux sujet d'intérêt, cependant les premières études n'étaient pas rigoureuses, notamment dû à de mauvais choix de définition de spectre essentiel comme l'expliqua Nicolaenko durant un séminaire au Courant Institute en 1972 [159]. Il présenta la première étude rigoureuse de l'existence de relations de dispersion (valeurs propres de $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ en fonction de ξ) pour les sphères dures ($\gamma = 1$), puis Ellis et Pinsky étudièrent en 1975 [77] leur comportement asymptotique lorsque $\xi \rightarrow 0$ pour toute la gamme de potentiels durs ($\gamma \in [0, 1]$) dans le but de quantifier les approximations hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann linéarisée. Ukai quant à lui s'intéressa en 1974 à l'existence d'un trou spectral afin de construire des solutions fortes globales dans le tore $\Omega = \mathbb{T}^3$ [186], puis adapta ce résultat à l'espace entier en 1986 ce qui lui permit, avec les résultats de [77], de construire des solutions globales dans l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^3$ [187].

L'approche adoptée dans [77] pour étudier les valeurs propres de $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ consiste en l'étude des relations de dispersion en réécrivant

$$(\mathcal{L} - iv \cdot \xi)f = \lambda f \Leftrightarrow \mathcal{D}(\lambda, \xi)\Pi f = 0, \quad \mathcal{D}(\lambda, \xi) \in \mathcal{B}(\ker \mathcal{L}),$$

pour ξ suffisamment petit, où Π est la projection $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ -orthogonale sur $\ker(\mathcal{L})$. La partie microscopique de f est exprimée en fonction de Πf comme $(\text{Id} - \Pi)f = \widetilde{\mathcal{D}}(\lambda, \xi)\Pi f$ pour un certain opérateur $\widetilde{\mathcal{D}}(\lambda, \xi)$. Cependant leurs résultats sont démontrés dans l'espace gaussien $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$. Pour démontrer les Théorèmes 3.1 et 3.2 présentés ci dessous, nous avons choisi d'adopter une approche centrée sur la résolvante $\mathcal{R}_{\mathcal{L} - iv \cdot \xi}$ et la théorie perturbative à la Kato car elles sont compatibles avec la théorie d'élargissement de Gualdani-

Mischler-Mouhot, nous permettant ainsi d'étendre ces résultats aux espaces $L^2(\langle v \rangle^k dv)$. Notons qu'appliquer la théorie d'élargissement à la décomposition du spectre de $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^3$ n'aurait pas permis d'obtenir les développements en puissance de $|\xi|$.

Notre but est de s'approcher le plus possible de l'espace optimal $L^1(\langle v \rangle^2 dv dx)$ correspondant à la condition d'avoir une masse et énergie finie. Nous avons donc étendu les résultats de [186, 77] à un espace à poids polynomial $L^2(\langle v \rangle^k dv dx)$ afin de disposer de la structure hilbertienne. On rappelle la notation

$$\Delta_a = \{\Re z > a\}.$$

3.1.1 Présentation et commentaires des résultats

Le premier théorème concerne la localisation du spectre et le comportement des petites valeurs propres lorsque $\xi \rightarrow 0$, justifiant la décomposition de U^ε présenté à la Section 2.3 dont le terme $U_{\text{NSFI}}^\varepsilon$ correspond à $\lambda_{\text{inc.}}$ et $\lambda_{\text{Bouss.}}$, et le terme $U_{\text{ondes}}^\varepsilon$ à $\lambda_{\pm\text{onde}}$.

Théorème 3.1 (issu de [88]). *Il existe $r, a, b, k > 0$ tels que, dans l'espace $L^2(\langle v \rangle^k dv)$, on ait*

$$\begin{aligned} |\xi| \leq r &\Rightarrow \Sigma(\mathcal{L} - iv \cdot \xi) \cap \Delta_{-a} = \left\{ \lambda_{\text{inc.}}(|\xi|), \lambda_{\text{Bouss.}}(|\xi|), \lambda_{\pm\text{onde}}(|\xi|) \right\}, \\ |\xi| \geq r &\Rightarrow \Sigma(\mathcal{L} - iv \cdot \xi) \cap \Delta_{-b} = \emptyset, \end{aligned}$$

où $\lambda_{\text{inc.}}$ est une valeur propre double et $\lambda_{\text{Bouss.}}, \lambda_{\pm\text{onde}}$ sont simples. Ces valeurs propres sont analytiques en $|\xi|$ et admettent les développements suivants à l'ordre 2 :

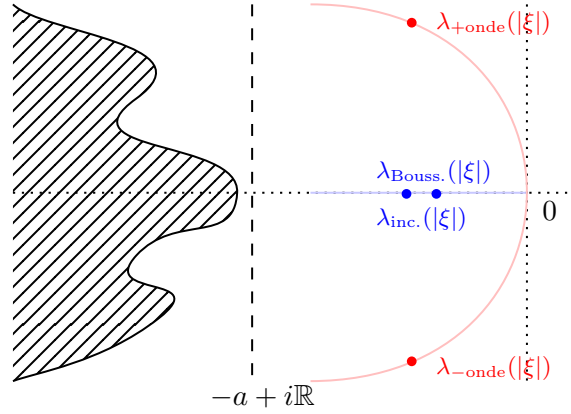
$$\begin{aligned} \lambda_{\text{Bouss.}}(|\xi|) &= -\kappa|\xi|^2 + \mathcal{O}(|\xi|^3), \\ \lambda_{\text{inc.}}(|\xi|) &= -\mu|\xi|^2 + \mathcal{O}(|\xi|^3), \\ \lambda_{\pm\text{onde}}(|\xi|) &= \pm ic|\xi| - \beta|\xi|^2 + \mathcal{O}(|\xi|^3), \quad \beta > 0, \end{aligned}$$

où on rappelle que μ et κ sont les constantes de viscosité et conductivité thermique associées au gaz représenté par la Maxwellienne \mathcal{M} . Les projecteurs spectraux associés $\mathcal{P}_\star(\xi)$ (avec la notation $\star = \text{Bouss.}, \text{inc.}, \pm\text{onde}$) admettent les développements

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\star(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^n \mathcal{P}_\star^{(n)}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} := \frac{\xi}{|\xi|}, \\ \mathcal{P}_\star^{(n)} &\in \mathcal{B}\left(L^2(\langle v \rangle^k dv); L^2(\mathcal{M}^{-1} dv)\right), \end{aligned}$$

et les projecteurs sont à l'ordre 0 des projections sur les espaces suivants :

$$\text{Vect}\left(\left(\frac{1}{2}(5 - |v|^2)\right)\mathcal{M}\right), \quad \star = \text{Bouss.},$$

FIGURE 3.1.1 – Spectre de $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ pour $|\xi| \leq r$.

$$\text{Vect} \left(\left(\frac{1}{2}(-1 + |v|^2) \pm \tilde{\xi} \cdot v \right) \mathcal{M} \right), \quad \star = \pm \text{onde},$$

$$\{c \cdot v \mathcal{M} : c \perp \tilde{\xi}\}, \quad \star = \text{inc.}$$

Les semigroupes partiels présentés à la Section 2.3 sont ainsi définis comme

$$U_{\text{NSFI}}^\varepsilon(t) = e^{t\lambda_{\text{Bouss.}}(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \mathcal{P}_{\text{Bouss.}}(\varepsilon D) + e^{t\lambda_{\text{inc.}}(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \mathcal{P}_{\text{inc.}}(\varepsilon D),$$

$$U_{\text{ondes}}^\varepsilon(t) = e^{t\lambda_{\text{ondes}}(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \mathcal{P}_{\text{ondes}}(\varepsilon D).$$

En notant $g = (\rho_g + u_g \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3)\theta_g) \mathcal{M} + g^\perp$, où $g^\perp = g - \Pi g$ est la partie macroscopique de g , cela signifie que, dans l'espace physique, les projecteurs spectraux associées $\star = \text{inc.}, \text{Bouss.}$ sont à l'ordre 0 des projecteurs sur les espaces dans lesquels évoluent les champs incompressibles et les couples densité-température satisfaisant la relation de Boussinesq, et les valeurs propres correspondent aux termes de diffusions associés :

$$\mathcal{P}_{\text{inc.}}^{(0)} g(x, v) = (\mathbb{P}u_g(x)) \cdot v \mathcal{M}, \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \lambda_{\text{inc.}}(\varepsilon D) = -\mu \Delta_x + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$\mathcal{P}_{\text{Bouss.}}^{(0)} g(x, v) = \left(\frac{2}{5} \rho_g(x) - \frac{5}{3} \theta_g(x) \right) \times \left(1 - \frac{1}{2}(|v|^2 - 3) \right) \mathcal{M}(v),$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \lambda_{\text{Bouss.}}(\varepsilon D) = -\kappa \Delta_x + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

tandis que les projecteurs et valeurs propres associés à $\star = \pm \text{onde}$ donnent

$$\mathcal{P}_{\pm \text{onde}}^{(0)} g(x, v) = \frac{2}{5}(\rho_g + \theta_g) \times \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3) \right) \mathcal{M}(v)$$

$$\pm (\text{Id} - \mathbb{P}) u_g(x) \cdot v \mathcal{M}(v).$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \lambda_{\pm \text{onde}}(\varepsilon D_x) = \pm \frac{ic}{\varepsilon} |D_x| + \mathcal{O}(1).$$

Remarquons que le scaling $\tau = 1$ utilisé à la Section 1.6.2 pour dériver l'équation des

ondes donnerait $\varepsilon^{-1}\lambda_{\pm\text{onde}}(\varepsilon D) = \pm ic|D_x| + \mathcal{O}(\varepsilon)$ et $\varepsilon^{-1}\lambda_{\text{inc.}}(\varepsilon D) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, ce qui fournit une justification «spectrale» des scalings utilisés.

Le prochain théorème justifie l'estimation du terme noté $U_{\text{cinét.}}^\varepsilon$ dans la Section 2.3.

Théorème 3.2 (issu de [88]). *Il existe $\gamma > 0$ tel que le semigroupe généré par $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ admette le comportement asymptotique suivant (uniforme en $\xi \in \mathbb{R}^3$ et $t \geq 0$) :*

$$S_{\mathcal{L}-iv \cdot \xi}(t) = \sum_{\star} e^{t\lambda_{\star}(|\xi|)} \mathcal{P}_{\star}(\xi) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}),$$

où on considère que les projecteurs et valeurs propres sont à support dans $\{|\xi| \leq r\}$.

Sous le scaling diffusif donnant Navier-Stokes incompressible, l'estimation du Théorème 3.2 devient

$$S_{\mathcal{L}-i\varepsilon v \cdot \xi}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) = \sum_{\star} e^{t\lambda_{\star}(\varepsilon|\xi|/\varepsilon^2)} \mathcal{P}_{\star}(\varepsilon\xi) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t/\varepsilon^2}),$$

Le premier terme correspond ainsi à la partie hydrodynamique qui restera dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, et le second à la partie purement cinétique qui disparaîtra.

Notons également que ce résultat se substitue à l'étude de l'hypocoercivité de $\mathcal{L} - v \cdot \nabla_x$ (voir Section 2.2.4) car elle décrit le comportement de la partie (presque) macroscopique de $S_{\mathcal{L}-v \cdot \nabla_x}(t)f$, c'est d'ailleurs l'approche utilisée par Ukai dans [186] qui montra l'existence d'un trou spectral dans le tore.

3.1.2 Guide de lecture

Nous décrivons la stratégie adoptée dans l'article [88] pour démontrer les Théorèmes 3.1-3.2. Pour simplifier la discussion, on désignera par $a, b > 0$ la taille d'un trou spectral qui peut être amené à être réduit d'une étape à une autre, de même k désignera un paramètre suffisamment grand.

Section 1 de [88]. Nous commençons pas montrer que l'opérateur $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ rentre bien dans le cadre de la théorie d'élargissement ; le **Lemme 2.2** explique que l'opérateur s'écrit

$$\mathcal{L} - iv \cdot \xi = (\mathcal{B} - iv \cdot \xi) + \mathcal{A}, \tag{3.1}$$

où l'opérateur $\mathcal{B} - iv \cdot \xi$ satisfait une estimation de coercivité uniformément en ξ , et \mathcal{A} est l'application «régularisante» permettant de passer du «gros» au «petit» espace durant les stratégies de factorisation :

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{B} - iv \cdot \xi)f, f \rangle_{\mathcal{H}} &\leq -a\|f\|_{\mathcal{H}}^2, \\ \mathcal{A} : L^2(\langle v \rangle^k dv) &\rightarrow L^2(\mathcal{M}^{-1} dv), \end{aligned}$$

où $\mathcal{H} = L^2(\langle v \rangle^k dv)$ ou $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$. La décomposition $\mathcal{L} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$, introduite dans [105], est en fait une adaptation délicate de la décomposition de Hilbert-Grad $\mathcal{L} = -\nu + K$. Dans l'espace $L^2(\langle v \rangle^k dv)$, l'opérateur K n'a plus les mêmes bonnes propriétés (compacité, autoadjonction, gain de régularité...), les auteurs ont alors défini

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= -\nu + \text{pert.}, \\ \mathcal{A} &= K - \text{pert.} = \text{opérateur à noyau } \mathcal{C}_c^\infty,\end{aligned}$$

où la perturbation «pert.» doit être suffisamment petite de sorte à ce \mathcal{B} soit encore dissipatif, ce qui force à considérer k suffisamment grand. Il est clair que \mathcal{A} est borné de $L^2(\langle v \rangle^k dv)$ dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$.

Il est également démontré que la multiplication par v est relativement bornée uniformément en $\xi \in \mathbb{R}^3$:

$$\|vf\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|(\mathcal{L} - iv \cdot \xi)f\|_{\mathcal{H}} + \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

Cette propriété permet de montrer que $(z, \xi) \mapsto \mathcal{R}_{\mathcal{L} - iv \cdot \xi}(z)$ est analytique (**Proposition 1**). Ce n'est vrai que pour le modèle des sphères dures car $\nu(v) \approx 1 + |v| \geq |v|$, ce qui constitue une des limites du travail [88].

Section 2 de [88]. Dans cette section, nous montrons pour de petites valeurs de ξ l'existence de valeurs propres dans un demi-plan droit, et pour les autres valeurs de ξ nous montrons leur absence dans un autre demi-plan droit. Plus précisément, la **Proposition 2** localise les valeurs propres : quelque soit $r > 0$

$$|\xi| \leq r \Rightarrow \Sigma(\mathcal{L} - iv \cdot \xi) \cap \Delta_{-a} \subset \left([-a, 0] + i[-T_r, T_r] \right) \cap \Sigma_d(\mathcal{L} - iv \cdot \xi),$$

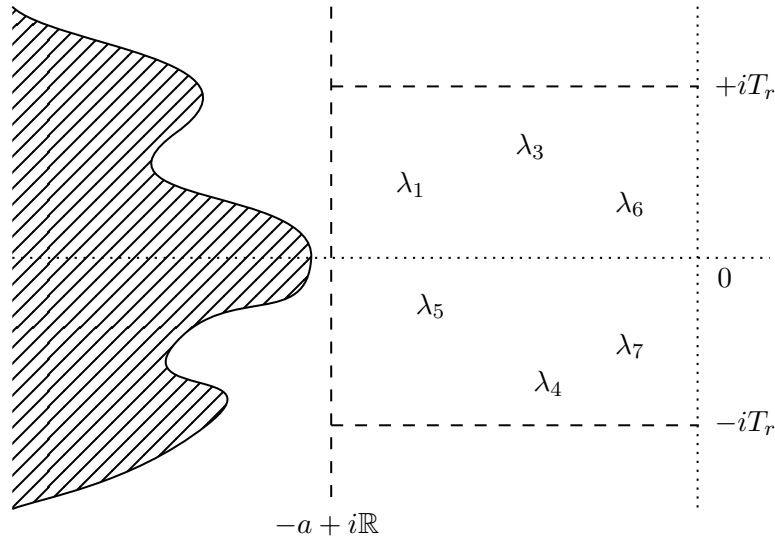
ainsi, dans le demi-plan Δ_{-a} , le spectre de $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ n'est constitué que de valeurs propres discrètes de parties réelles négatives et confinées dans un rectangle. De plus, nous montrons que ces valeurs propres ainsi que les projecteurs spectraux et espaces propres ne dépendent pas de l'espace fonctionnel choisi $L^2(\langle v \rangle^k dv)$ ou $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$, permettant désormais de travailler dans un cadre unifié. Notons bien que pour le moment, nous ne savons pas combien de valeurs propres se trouvent dans ce demi-plan.

Le **Lemme 2.4** montre la propriété analogue pour les hautes fréquences ; quelque soit $r > 0$, il existe un $b_r > 0$ tel que

$$|\xi| \geq r \Rightarrow \Sigma(\mathcal{L} - iv \cdot \xi) \cap \Delta_{-b_r} = \emptyset,$$

encore une fois pour n'importe quel choix d'espace $L^2(\langle v \rangle^k dv)$ ou $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$.

Localiser le spectre revient à montrer que la résolvante est bornée. Pour cela, on a utilisé les techniques de factorisation de la résolvante de la théorie d'élargissement afin d'exploiter les estimations d'Ukai [186] de la résolvante dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ et ainsi estimer

FIGURE 3.1.2 – Localisation du spectre pour $|\xi| \leq r$

la résolvante dans $L^2(\langle v \rangle^k dv)$.

Section 3 de [88]. On a établi que le demi-plan Δ_{-a} contient des valeurs propres discrètes de $\Sigma(\mathcal{L} - iv \cdot \xi)$ encadrées par un rectangle de bord $\Gamma = [-a, 0] + i[-T_r, T_r]$ lorsque $|\xi| \leq r$. Notons le projecteur spectral associé à ces valeurs propres $\mathcal{P}(\xi)$ et définissons $\mathcal{N}(\xi)$ l'espace propre algébrique associé :

$$\mathcal{P}(\xi) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_{\mathcal{L} - iv \cdot \xi}(z) dz, \quad \mathcal{N}(\xi) := \text{Im}(\mathcal{P}(\xi)).$$

Cette section est dédiée à l'étude de ces valeurs propres ; comptage et développement en puissance de $|\xi|$ des valeurs propres, projecteurs spectraux et vecteurs propres. Cette section est une application du processus de réduction de Kato présenté à la Section 2.2.2 (voir «Perturbation de valeurs propres»). Pour cela, on établit l'analyticité des objets mis en jeu (projecteurs spectraux, isomorphisme entre $\ker(\mathcal{L})$ et $\mathcal{N}(\xi)$).

Le **Lemme 3.1** (resp. **3.2**) prouve l'analyticité en $|\xi|$ de $\mathcal{P}(\xi)$ (resp. de l'isomorphisme $\mathcal{U}(\xi)$ envoyant $\ker(\mathcal{L})$ sur $\mathcal{N}(\xi)$) et détermine un développement limité à l'ordre 1.

Le **Lemme 3.3** définit l'opérateur réduit qui est donc une matrice de $\ker(\mathcal{L})$ dans lui même :

$$\tilde{\mathcal{L}}(\xi) := \frac{1}{|\xi|} \mathcal{U}(\xi)^{-1} (\mathcal{L} - iv \cdot \xi) \mathcal{U}(\xi)|_{\ker(\mathcal{L})}, \quad (3.2)$$

qui, rappelons le, permet d'obtenir un développement limité des valeurs propres étudiées lorsque $\xi \rightarrow 0$ car elles sont liées à l'opérateur réduit par la relation

$$\Sigma(\mathcal{L} - iv \cdot \xi) \cap \Delta_{-a} = |\xi| \Sigma(\tilde{\mathcal{L}}(\xi)).$$

On montre également qu'elle est analytique en $|\xi|$ et on détermine son développement limité à l'ordre 1.

Pour cela, on considère sa représentation intégrale

$$\tilde{\mathcal{L}}(\xi) = \frac{1}{|\xi|} \mathcal{U}(\xi)^{-1} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_{\mathcal{L}-iv \cdot \xi}(z) dz \right) \mathcal{U}(\xi)|_{\ker(\mathcal{L})},$$

qui se comporte bien lorsque $\xi \rightarrow 0$ grâce au développement en série entière de la Proposition 1, qui nous ramène à manipuler la résolvante en $\xi = 0$, c'est-à-dire la résolvante de \mathcal{L} . Sachant que l'on peut travailler dans l'espace que l'on souhaite $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ ou $L^2(\langle v \rangle^k dv)$ par le **Proposition 2**, on utilise le fait que \mathcal{L} est autoadjoint dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ et donc que la valeur propre 0 de \mathcal{L} est semi-simple (dans chaque espace grâce à la Proposition 2).

Le **Lemme 3.4** précise la structure de la matrice $\tilde{\mathcal{L}}(\xi)$ afin de se ramener par la suite à un problème de perturbation de valeurs propres simples. D'après le lemme, la matrice s'écrit

$$\tilde{\mathcal{L}}(\xi) = \begin{pmatrix} |\xi|^{-1} \lambda_{\text{inc.}}(\xi) & 0 \\ 0 & A(\xi) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

dans la somme d'espaces stables

$$\left\{ u \cdot v \mathcal{M} : u \perp \xi \right\} \oplus \left\{ \left(\rho + \alpha \xi \cdot v + \frac{1}{2} (|v|^2 - 3) \theta \right) \mathcal{M} : \rho, \alpha, \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

et fournit un développement à l'ordre 1 de $\tilde{\mathcal{L}}(\xi)$.

Pour démontrer que la matrice s'écrit ainsi, on utilise le fait que \mathcal{L} est invariante par isométrie. Ainsi, pour toute matrice $O \in \mathcal{M}_{3 \times E}(\mathbb{R})$ orthogonale, on a

$$O^{-1}(\mathcal{L} - iv \cdot \xi)O = \mathcal{L} - iv \cdot (O\xi),$$

et cette propriété est ainsi léguée à $\mathcal{P}(\xi)$ puis à $\mathcal{U}(\xi)$. Ces propriétés combinées avec les symétries des fonctions de $\ker(\mathcal{L})$ permettent de montrer l'écriture (3.3).

Éléments de preuve du Théorème 3.1 (Théorème 1.1 de [88]). Grâce au développement de $\tilde{\mathcal{L}}(\xi)$ à l'ordre 1, on détermine le développement de $A(\xi)$:

$$A(\xi) = i \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + |\xi| A^{(1)}(\tilde{\xi}) + \mathcal{O}(|\xi|^2), \quad \tilde{\xi} := \frac{\xi}{|\xi|},$$

écrit dans la base $\{e_{\text{-onde}}^{(0)}(\tilde{\xi}), e_{\text{Bouss.}}^{(0)}(\tilde{\xi}), e_{\text{+onde}}^{(0)}(\tilde{\xi})\}$, où $A(\tilde{\xi})$ est une matrice définie négative pour le produit scalaire de $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$. Ce développement nous permet de déduire à l'aide de la théorie perturbative classique pour les matrices que $A(\xi)$ admet des valeurs propres

simples analytiques ayant des développements à l'ordre 1 de la forme

$$ijc - \beta_j |\xi| + \mathcal{O}(|\xi|^2), \quad j = 0, \pm 1, \quad \beta_j > 0.$$

De même, on déduit l'existence et l'analyticité des projecteurs spectraux. On conclut la preuve du théorème en utilisant (3.2) afin d'exprimer $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ en fonction de $\tilde{\mathcal{L}}(\xi)$ que l'on vient d'étudier.

 l ments de preuve du Théorème 3.2 (Théorème 1.2 de [88]). Une conséquence de la preuve du Théorème 3.1 est que pour $|\xi| \leq r$, les valeurs propres dans Δ_{-a} sont semi-simples, donc la partie du semigroupe $S_{\mathcal{L}-iv \cdot \xi}$ qu'elles génèrent (i.e. la partie dans $\mathcal{N}(\xi)$), est simplement

$$S_{\mathcal{L}-iv \cdot \xi}(t) = \sum_{\star} e^{t \lambda_{\star}(|\xi|)} \mathcal{P}_{\star}(\xi), \quad \text{sur } \mathcal{N}(\xi).$$

Le terme restant à étudier est la partie du semigroupe sur l'espace complémentaire canonique $\mathcal{N}(\xi)^{\perp} := \text{Im}(\text{Id} - \mathcal{P}(\xi))$, qui est donc généré par $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ restreint à $\mathcal{N}(\xi)^{\perp}$. Par le Théorème 2.6, il suffit donc de borner la résolvante restreinte à cet espace uniformément en $|\xi| \leq r$, ce qui fournira un taux de décroissance du semigroupe en $\mathcal{O}(e^{-at})$.

Lorsque $|\xi| \geq r$, on a vu que $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ ne possédait pas de spectre sur Δ_{-b} , il faudra donc estimer la résolvante sur ce demi-plan uniformément en $|\xi| \geq r$ pour déduire que le semigroupe décroit comme $\mathcal{O}(e^{-bt})$ sur tout l'espace.

Pour obtenir ces bornes, on utilise à nouveau les estimations de Ukai dans $L^2(\mathcal{M}^{-1}dv)$ et la technique de factorisation issue de la théorie d'élargissement appliquée à la décomposition de Gualdani-Mischler-Mouhot (3.1) afin d'obtenir des estimations dans $L^2(\langle v \rangle^k dv)$.

3.2 Limite hydrodynamique avec donnée initiale générale

Comme nous l'avons dit dans la Section 2.3, nous nous intéressons à la convergence forte de solutions de Boltzmann vers celles de Navier-Stokes-Fourier lorsque la donnée initiale est dans un espace de la forme $L_v^p H_x^s(\langle v \rangle^k dx dv)$. Pour cela, nous nous sommes basés sur deux stratégies présentées à la Section 2.3.

- La stratégie de Gallagher-Tristani [86] permettant d'obtenir un taux de convergence explicite, de considérer des données initiales de taille arbitraire, et de minorer le premier temps d'explosion de la solution de Boltzmann par celui de la solution de Navier-Stokes.
- La stratégie de Briant-Merino-Mouhot [35] permettant de considérer des données initiales avec des poids polynomiaux en considérant un système d'équations couplées, la première posée sous forme différentielle dans un espace polynomial et étudiée à l'aide d'une méthode d'énergie, la seconde étant l'équation de Boltzmann dans un

espace gaussien usuel plus un terme de couplage, étudiée à l'aide de machinerie préexistante [24, 86]. Contrairement à [35] qui étudie cette seconde équation sous forme différentielle avec les outils développés dans [34], nous l'étudions sous forme intégrale avec ceux développés dans [24, 86].

3.2.1 Présentation et commentaires des résultats

Le théorème suivant est énoncé en dimension $d = 2, 3$, dans le tore $\Omega = \mathbb{T}^d$ ou l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^d$, et dans le cas des sphères dures ($\gamma = 1$). Considérons $p \in [1, \infty]$, $s > d/2$, et des paramètres $k, \ell > 0$ suffisamment grands ($k > 3$ suffit pour $p = 1$).

Théorème 3.3 (issu de [89]). *Soit $f_{\text{in}} \in L_v^p H_x^s (\langle v \rangle^k dv dx)$, et f la solution bornée sur $[0, T)$ de (1.2) (avec $T = \infty$ si la solution est globale) issue de la partie de f_{in} dans $\ker(\mathcal{L})$ dont le champ de vitesse est incompressible et le couple densité-température satisfait la relation de Boussinesq. Pour ε assez petit, l'équation de Boltzmann*

$$\varepsilon \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon + \mathcal{Q}(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \quad f^\varepsilon|_{t=0} = f_{\text{in}}, \quad (3.4)$$

admet une unique solution

$$f^\varepsilon \in \mathcal{C} \left([0, T); L_v^p H_x^s (\langle v \rangle^k dv dx) \right) \cap L^p \left([0, T); L_v^p H_x^s (\langle v \rangle^{k+1/p} dv dx) \right), \\ f^\varepsilon = f + f_{\text{ondes}}^\varepsilon + f_{\text{cinét.}}^\varepsilon + f_{\text{err.}}^\varepsilon,$$

où les trois derniers termes tendent vers 0 en les sens suivants :

- La couche initiale $f_{\text{ondes}}^\varepsilon$ correspond aux ondes acoustiques, où $(f_{\text{ondes}}^\varepsilon)_{t=0}$ est la partie de f_{in} dans $\ker(\mathcal{L})$ dont le champ de vitesse est compressible et le couple densité-température ne satisfait pas la relation de Boussinesq. Dans le cas de l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^d$, elle vérifie

$$\forall t \in [0, T), \quad q > \frac{2}{d-1}, \quad \int_0^t \|f_{\text{onde}}^\varepsilon(\tau)\|_{L^\infty(\mathcal{M}^{-1}\langle v \rangle^2 dx dv)}^q d\tau \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (3.5)$$

plus précisément, lorsque la partie macroscopique est intégrable par rapport à la variable x :

$$\|f_{\text{onde}}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathcal{M}^{-1}\langle v \rangle^2 dx dv)} \lesssim \min \left\{ 1, \left(\frac{\varepsilon}{t} \right)^{-\frac{d-1}{2}} \right\} \|f_{\text{ondes}}^\varepsilon(0)\|_{(H_x^s \cap L_x^1) L_v^2(\mathcal{M}^{-1} dx dv)}. \quad (3.6)$$

Dans le cas du tore $\Omega = \mathbb{T}^d$, on suppose que $(f_{\text{ondes}}^\varepsilon)_{t=0}$ est nul (ce qui implique que $f_{\text{ondes}}^\varepsilon$ l'est aussi).

- La couche initiale $f_{\text{cinét.}}^\varepsilon$ correspond à la partie « purement cinétique », où $(f_{\text{cinét.}}^\varepsilon)|_{t=0}$

est la partie microscopique de f_{in} , c'est-à-dire $f_{\text{in}} - \Pi f_{\text{in}}$. Elle décroît comme

$$\|f_{\text{cinét.}}^\varepsilon(t)\|_{L_v^p H_x^s(\langle v \rangle^k dx dv)} \lesssim e^{-\omega t/\varepsilon^2} \|f_{\text{in}} - \Pi f_{\text{in}}\|_{L_v^p H_x^s(\langle v \rangle^k dx dv)},$$

où $\omega > 0$ est indépendant de f_{in} , et on rappelle que $f_{\text{in}} - \Pi f_{\text{in}}$ est la partie microscopique de f_{in} (orthogonale à $\ker(\mathcal{L})$).

— Le terme d'erreur $f_{\text{err.}}^\varepsilon$ tend vers zéro uniformément :

$$\sup_{0 \leq t < T} \|f_{\text{err.}}^\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathcal{M}^{-1}\langle v \rangle^\alpha dx dv)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Détaillons un peu ce résultat en fonction du choix du domaine Ω :

— Dans le cas du tore $\Omega = \mathbb{T}^d$, nous supposons que la partie macroscopique Πf_{in} de la donnée initiale est de moyenne nulle. Ceci est une condition de compatibilité entre les lois de conservation et le retour à l'équilibre :

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3} f_{\text{in}}(x, v) \varphi(v) dv dx = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3} f(t, x, v) \varphi(v) dv dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \varphi(v) = 1, v, |v|^2.$$

— Dans le cas de l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^d$, la dispersion fait que les ondes $f_{\text{ondes}}^\varepsilon$ «s'étalent», ce qui se traduit par une estimation en norme L_x^∞ d'ordre $\mathcal{O}\left(t^{-\frac{d-1}{2}}\right)$. De plus, l'échelle de temps choisie pour dériver le modèle de Navier-Stokes est plus longue que celle permettant de dériver le modèle des ondes, ces dernières évoluent ainsi plus vite d'un facteur ε^{-1} , d'où l'estimation (3.6). Ce mode de convergence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ est nécessaire dans la démonstration, cependant, dans le cas du tore $\Omega = \mathbb{T}^d$, les ondes n'ont pas la place nécessaire pour «s'étaler». On fait donc l'hypothèse que la partie macroscopique Πf_{in} de la donnée initiale est incompressible et satisfait la relation de Boussinesq afin de se débarrasser de ces ondes.

— Dans le cas de l'espace entier bidimensionnel $\Omega = \mathbb{R}^2$, on suppose que la partie macroscopique Πf_{in} de la donnée initiale est dans $L_x^1 L_v^2(dx dv)$, cette hypothèse technique permet de montrer une estimation de dispersion pour les ondes.

Concernant le taux de convergence de $f_{\text{err.}}^\varepsilon$, lorsque la partie macroscopique Πf_{in} de la condition initiale est suffisamment régulière (par exemple H^{s+1}), nous parvenons à montrer un taux de convergence de $\varepsilon^{1/2}$, cependant si la partie macroscopique Πf_{in} de la donnée initiale est incompressible et satisfait la relation de Boussinesq, alors la convergence est optimale d'ordre ε .

3.2.2 Guide de lecture

Pour simplifier la présentation, nous nous plaçons dans le cadre $p = 2$ et $d = 3$. Nous noterons les espaces

$$\mathcal{E} := L_v^2 H_x^s \left(\langle v \rangle^k dv \right), \quad E := L_v^\infty H_x^s \left(\langle v \rangle^\ell \mathcal{M}^{-1} dv \right),$$

pour certains paramètres $k, \ell > 0$.

Réduction du problème. Commençons par expliquer comment l'équation (3.4) est reformulée sous la forme que l'on manipule dans l'article. Le point de départ est la réécriture introduite par Briant, Merino et Mouhot [35]. On considère le découpage de l'inconnue $f^\varepsilon = f_{\text{pol.}}^\varepsilon + f_{\text{gau.}}^\varepsilon \in \mathcal{E} + E$ évoluant selon le système d'équations couplées (l'opérateur \mathcal{Q} est symétrisé ici)

$$\begin{aligned} \partial_t f_{\text{pol.}}^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) f_{\text{pol.}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f_{\text{pol.}}^\varepsilon, f_{\text{pol.}}^\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f_{\text{pol.}}^\varepsilon, f_{\text{gau.}}^\varepsilon), & f_{\text{pol.}}^\varepsilon(0) &= f_{\text{in}} - \Pi f_{\text{in}}, \\ \partial_t f_{\text{gau.}}^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{L} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) f_{\text{gau.}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f_{\text{gau.}}^\varepsilon, f_{\text{gau.}}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A} f_{\text{pol.}}^\varepsilon, & f_{\text{gau.}}^\varepsilon(0) &= \Pi f_{\text{in}}. \end{aligned}$$

On rappelle que $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ est le découpage de Gualdani-Mischler-Mouhot présenté à la Section 2.2.4.

Contrairement à [35] qui ont attribué à $f_{\text{gau.}}^\varepsilon$ une donnée initiale nulle $f_{\text{gau.}}^\varepsilon(0) = 0$, nous lui avons attribué la partie macroscopique $f_{\text{gau.}}^\varepsilon(0) = \Pi f_{\text{in}}$ de f_{in} afin que l'équation pour $f_{\text{gau.}}^\varepsilon$ soit la même que celle considérée dans [24, 86] (modulo le terme de couplage $\frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A} f_{\text{pol.}}^\varepsilon$).

La première équation sera traitée comme dans [35] avec une méthode d'énergie présentée dans la Section 2.2.1. En effet, les opérateurs $\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x$ et \mathcal{Q} satisfont les estimations présentées dans cette section :

$$\left\langle \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) f, f \right\rangle_\varepsilon \leq -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \|\langle v \rangle^{1/2} f\|_\varepsilon^2, \quad \sigma > 0, \quad (3.7)$$

$$\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_\varepsilon \lesssim \|\langle v \rangle^{1/2} h\|_\varepsilon \left(\|\langle v \rangle^{1/2} f\|_\varepsilon \|g\|_\varepsilon + \|\langle v \rangle^{1/2} g\|_\varepsilon \|f\|_\varepsilon \right), \quad (3.8)$$

et l'équation sur $f_{\text{pol.}}^\varepsilon$ sera étudiée dans l'espace défini par la norme

$$\|h\|_{\mathcal{X}}^2 := \sup_{0 \leq t < T} \left\{ e^{2\sigma t/\varepsilon^2} \|h(t)\|_{\mathcal{X}}^2 \right\} + \int_0^T e^{2\sigma t/\varepsilon^2} \|\langle v \rangle^{1/2} h(t)\|_{\mathcal{X}}^2 dt.$$

La seconde équation sera étudiée, comme dans [86], sous forme intégrale :

$$f_{\text{gau.}}^\varepsilon(t) = U^\varepsilon(t) \Pi f_{\text{in}} + \Psi^\varepsilon(f_{\text{gau.}}^\varepsilon, f_{\text{gau.}}^\varepsilon)(t) + \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} f_{\text{pol.}}^\varepsilon(t).$$

Comme dans [86], nous cherchons également à travailler sur l'équation satisfaite par $f^\varepsilon - f$ à laquelle on aura retranché les termes susceptibles de ne pas tendre vers 0 uniformément en temps (les couches initiales associées aux ondes et à la «partie cinétique»). À la différence de [86], nous avons un terme de couplage en plus $\frac{1}{\varepsilon^2}U^\varepsilon * \mathcal{A}f_{\text{pol.}}^\varepsilon(t)$ qui est borné uniformément en ε (car $\|\mathcal{A}f_{\text{pol.}}^\varepsilon(t)\|_E \leq e^{-\sigma t/\varepsilon^2} \|f_{\text{pol.}}^\varepsilon\|_{\mathcal{X}}$) mais qui ne converge a priori pas uniformément en temps. On pourra cependant le découper de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2}U^\varepsilon * \mathcal{A}f_{\text{pol.}}^\varepsilon &= \mathcal{T}_1^\varepsilon f_{\text{pol.}}^\varepsilon + \mathcal{T}_\infty^\varepsilon f_{\text{pol.}}^\varepsilon, \\ \|\mathcal{T}_q^\varepsilon f_{\text{pol.}}^\varepsilon\|_{L_t^q E} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

L'inconnue que l'on considèrera est alors définie comme (voir Section 1.6.2 pour la définition de $U_{\text{ondes}}^\varepsilon$)

$$f_{\text{err.}}^\varepsilon := f_{\text{gau.}}^\varepsilon - f - U_{\text{ondes}}^\varepsilon(t)f_{\text{in}} - \mathcal{T}_1^\varepsilon f_{\text{pol.}}^\varepsilon(t),$$

et donc l'équation intégrale pour $f_{\text{gau.}}^\varepsilon$ se réécrit en terme de $f_{\text{err.}}^\varepsilon$ comme

$$f_{\text{err.}}^\varepsilon = \mathcal{S}^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon] + \Phi^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]f_{\text{err.}}^\varepsilon + \Psi^\varepsilon(f_{\text{err.}}^\varepsilon, f_{\text{err.}}^\varepsilon).$$

Ici, $\mathcal{S}^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]$ est un terme source qui convergera vers 0, et $\Phi^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]$ est un opérateur linéaire dont la norme est arbitrairement petite (pour $\varepsilon \ll 1$ et $\lambda \gg 1$) dans $X := \mathcal{C}_b([0, T]; E)$ muni de la norme

$$\|g\|_X := \sup_{0 \leq t < T} \left\{ e^{-\lambda \int_0^t \|f(\tau)\|_E^2 d\tau} \|g(t)\|_E \right\},$$

qui est équivalente à la norme usuelle $L_t^\infty E$ et est conçue pour que la norme de f apparaissant dans l'estimation de Φ^ε soit d'ordre $\lambda^{-1/3}$.

On considère ainsi le système d'équations

$$\begin{aligned} \partial_t f_{\text{pol.}}^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^2}(\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) f_{\text{pol.}}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f_{\text{pol.}}^\varepsilon, f_{\text{pol.}}^\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} \mathcal{Q}(f_{\text{pol.}}^\varepsilon, f_{\text{gau.}}^\varepsilon), \quad f_{\text{pol.}}^\varepsilon(0) = f_{\text{in}} - \Pi f_{\text{in}}, \\ f_{\text{err.}}^\varepsilon &= \mathcal{S}^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon] + \Phi^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]f_{\text{err.}}^\varepsilon + \Psi^\varepsilon(f_{\text{err.}}^\varepsilon, f_{\text{err.}}^\varepsilon). \end{aligned}$$

Section 2 de [89]. Cette section est dédiée à l'étude de l'équation satisfaite par $f_{\text{pol.}}^\varepsilon$. Le **Lemme 2.1** montre l'estimation de coercivité (3.7) et le **Lemme 2.4** l'estimation de continuité (3.8), ce qui nous mène à montrer dans le **Lemme 2.6** que les solutions de l'équation

$$\partial_t g = \frac{1}{\varepsilon^2}(\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) g + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(h_1, h_1) + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(h_1, h_2),$$

où h_1 et h_2 sont deux données dans \mathcal{X} , satisfont l'estimation

$$\|g\|_{\mathcal{X}} \leq C\varepsilon (\|h_1\|_{\mathcal{X}} + \|h_2\|_{\mathcal{X}}) + \|g(0)\|_{\mathcal{X}},$$

ainsi qu'une estimation de stabilité similaire. Les résultats énoncés par ce lemme sont exactement ceux nécessaires pour montrer la stabilité et la convergence du schéma itératif construisant les solutions $(f_{\text{err.}}^\varepsilon, f_{\text{pol.}}^\varepsilon)$.

Soulignons le fait que le facteur ε dans le membre de droite permet de se libérer, en le supposant assez petit, de la condition de petitesse sur la donnée initiale nécessaire pour la stabilité et convergence du schéma itératif (voir Section 2.2.1).

Section 3 de [89]. Dans cette section, on s'intéresse au comportement de U^ε sur l'espace \mathcal{E} lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela permettra plus tard d'étudier les propriétés du découpage du terme de couplage $\frac{1}{\varepsilon}U^\varepsilon * \mathcal{A}f_{\text{pol.}}^\varepsilon = \mathcal{T}_1^\varepsilon f_{\text{pol.}}^\varepsilon + \mathcal{T}_\infty^\varepsilon f_{\text{pol.}}^\varepsilon$, et en particulier la convergence de $\mathcal{S}^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]$ (resp. la petitesse de la norme de l'opérateur $\Phi^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]$) qui dépend de $f_{\text{pol.}}^\varepsilon$ à travers $\mathcal{T}_1^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]$ et $\mathcal{T}_\infty^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]$ (resp. $\mathcal{T}_1^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]$).

Le premier résultat principal est le **Lemme 3.7** :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\star(\varepsilon D) &= \mathcal{P}_\star^{(0)}(D) + \varepsilon \nabla_x \cdot \mathcal{P}_\star^{(1)}(\varepsilon D), \\ \|\mathcal{P}_\star^{(0)}(D)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E}; E)} + \|\mathcal{P}_\star^{(1)}(\varepsilon D)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E}; E)} &\leq C, \end{aligned}$$

où $\star = \text{Bouss.}, \text{ondes}, \text{NSFI}$ avec les notations de la Section 2.3. L'étude spectrale [77, 187] implique que ce résultat est vrai dans $\mathcal{B}(L_v^2 H_x^s(\mathcal{M}^{-1} dv dx))$, il est étendu à $\mathcal{B}(E)$ dans [24] par un argument de bootstrap permis par la décomposition de Hilbert-Grad (2.16) et du gain de régularité (2.17)-(2.18) fourni par sa partie non-locale, puis étendu par les **Lemmes 3.4-3.7** à $\mathcal{B}(\mathcal{E}; E)$ grâce à un argument similaire appliqué à la décomposition de Gualdani-Mischler-Mouhot (3.1).

Le second résultat principal de cette section est le **Lemme 3.10** selon lequel

$$\|U_{\text{hydro.}}^\varepsilon (\text{Id} - \Pi) f_{\text{in}}\|_X + \|U_{\text{cinét.}}^\varepsilon \Pi f_{\text{in}}\|_X \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

où on rappelle le lien entre les différents semigroupes partiels :

$$U_{\text{hydro.}}^\varepsilon := U_{\text{Bouss.}}^\varepsilon + U_{\text{ondes}}^\varepsilon + U_{\text{NSFI}}^\varepsilon, \quad U_{\text{cinét.}}^\varepsilon := U^\varepsilon - U_{\text{hydro.}}^\varepsilon.$$

Ces deux résultats permettront à terme de montrer que \mathcal{S}^ε tend vers 0 dans X .

Section 4 de [89]. Dans cette section, nous établissons les résultats nécessaires à l'étude de l'équation sur $f_{\text{err.}}^\varepsilon$, c'est-à-dire montrer que Ψ^ε est borné sur $X \times X$ (**Lemme 4.2**), que l'opérateur $\Phi^\varepsilon[f_{\text{pol.}}^\varepsilon]$ est contractant (**Lemme 4.9**), mais aussi que \mathcal{S}^ε tend vers 0 dans l'espace X (**Lemme 4.10**).

Les lemmes clés de cette section et nécessaires à démontrer les Lemmes 4.9 et 4.10 sont

les **Lemmes 4.7** et **4.8** qui montrent que si g est solution de

$$\partial_t g = \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) g + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(h_1, h_1) + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{Q}(h_1, h_2), \quad g(0) = (\text{Id} - \Pi) f_{\text{in}},$$

où h_1 et h_2 sont deux données dans \mathcal{X} , alors les termes du découpage de $\frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A}g$ satisfont

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_1^\varepsilon g(t)\|_E &\lesssim e^{-\omega t/\varepsilon^2} \|g\|_{\mathcal{X}}, \\ \|\mathcal{T}_\infty^\varepsilon g\|_X &\lesssim \varepsilon \|h_1\|_{\mathcal{X}} (\|h_1\|_{\mathcal{X}} + \|h_2\|_X) + \|U_{\text{hydro}}^\varepsilon (\text{Id} - \Pi) f_{\text{in}}\|_X, \end{aligned}$$

pour un certain $\omega > 0$. Le Lemme 4.7 est rapidement prouvé car la définition de $\mathcal{T}_1^\varepsilon$ fait intervenir $U_{\text{cinét.}}^\varepsilon$ et $S^\varepsilon(t) := \exp(\varepsilon^{-2}(\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x)) = \mathcal{O}(e^{-\sigma t/\varepsilon^2})$, tous deux satisfaisant une estimation de cette forme. La preuve du Lemme 4.8 consiste en réécrire g à l'aide la formule de Duhamel

$$g(t) = S^\varepsilon(t)g(0) + \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon * \mathcal{Q}(h_1, h_1)(t) + \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon * \mathcal{Q}(h_1, h_2)(t),$$

puis de convoler cette expression avec $\frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon \mathcal{A}$ pour obtenir

$$\frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A}g(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A}S^\varepsilon(t)g(0) + \dots \quad (3.9)$$

Le premier terme du membre de droite intervient dans la formule de factorisation de semigroupes (2.13) appliquée à la décomposition de Gualdani-Mischler-Mouhot

$$\frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{L} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{B} - \varepsilon v \cdot \nabla_x) + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A},$$

ou plus précisément dans sa réécriture

$$\frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A}S^\varepsilon = U^\varepsilon - S^\varepsilon. \quad (3.10)$$

On injecte alors (3.10) dans (3.9) de sorte à ne plus avoir de terme avec ε^{-2} en facteur mais uniquement S^ε et U^ε dont le comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ est bien compris grâce aux sections précédentes. Le terme $\mathcal{T}_\infty^\varepsilon$ est défini comme $\frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A}g - \mathcal{T}_1^\varepsilon g$ et fait donc intervenir $U_{\text{hydro}}^\varepsilon$, d'où la présence de ce terme dans l'estimation de $\mathcal{T}_\infty^\varepsilon$.

Section 5 de [89]. Cette dernière section met en place le schéma itératif inspiré de celui présenté à la Section 2.2.1, montrant ainsi l'existence et l'unicité de solutions à l'équation de Boltzmann.

3.3 Boltzmann avec potentiels mous dans \mathbb{R}^3 (sans cutoff)

Nous présentons dans cette section le résultat d'existence et unicité pour l'équation de Boltzmann dans le cas de potentiels mous ($\gamma < 0$), dans l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^3$ et sans hypothèse de cutoff angulaire établi en collaboration avec Kleber Carrapatoso dans [44]. Le cas avec cutoff est également traité dans ce travail mais est présenté dans une section séparée (Section 3.4) afin de clarifier la présentation.

3.3.1 Présentation et commentaires des résultats

Le théorème que nous allons présenter est valable dans le cas des potentiels (faiblement) mous et d'une singularité angulaire quelconque :

$$-\frac{3}{2} < \gamma < 0, \quad \gamma + 2s \leq 0, \quad 0 < s < 1.$$

Avant d'énoncer le résultat, nous devons introduire quelques notations. Étant donné un poids polynomial $m(v) = \langle v \rangle^k$ où $k > 0$ est suffisamment grand, nous définissons pour tout espace fonctionnel $(B, \|\cdot\|_B)$ son analogue pondéré $B(m)$ via sa norme $\|f\|_{B(m)} := \|mf\|_B$. Nous considérerons l'espace d'énergie suivant :

$$\|f\|_{\mathbf{X}(m)}^2 := \|f\|_{L_{x,v}^2(m)}^2 + \|\langle v \rangle^{-6s} \nabla_x^3 f\|_{L_{x,v}^2(m)}^2,$$

ainsi que l'espace de dissipation qui lui est associé :

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 &:= \|f\|_{L_{x,H_v^{s,*}}^2(m)}^2 + \|\langle v \rangle^{-6s} \nabla_x^3 f\|_{L_{x,H_v^{s,*}}^2(m)}^2, \\ \|f\|_{H_v^{s,*}(m)}^2 &:= \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 + \int b(\cos \theta) \mathcal{M}_* \langle v_* \rangle^\gamma (\mathfrak{f}' - \mathfrak{f})^2 d\zeta, \quad \mathfrak{f} := m \langle v \rangle^{\gamma/2} f, \end{aligned}$$

où on rappelle que $d\zeta(\sigma, v, v_*) = B(v - v_*, \sigma) d\sigma dv_* dv$. Cette norme $H^{s,*}(m)$, introduite dans [117] et inspirée de la série de travaux [5, 3, 4, 6, 7], est comparable aux espaces de Sobolev usuels (voir [117, Lemme 2.1]) :

$$\|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{H_v^s(m)} \lesssim \|f\|_{H_v^{s,*}(m)} \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2+s} f\|_{H_v^s(m)}.$$

Le résultat démontré dans [44] est le suivant.

Théorème 3.4 (issu de [44]). *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que toute donnée initiale $f_{\text{in}} \in \mathbf{X}(m)$ vérifiant $\|f_{\text{in}}\|_{\mathbf{X}(m)} \leq \varepsilon_0$ génère une unique solution globale f à l'équation*

$$\partial_t f = \Lambda f + \mathcal{Q}(f, f),$$

satisfaisant l'estimation d'énergie

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|_{\mathbf{X}(m)}^2 + \int_0^\infty \left(\|(\text{Id} - \Pi)f(t)\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 + \|\nabla_x \Pi f(t)\|_{H_x^2 L_v^2}^2 \right) dt \\ \lesssim \|f_{\text{in}}\|_{\mathbf{X}(m)}^2. \end{aligned}$$

Le résultat ci-dessus est incomplet car il ne couvre que les potentiels vérifiant $\gamma > -3/2$ et n'indique pas le taux de convergence vers 0. Nous discutons de cela dans la Section 3.5.

3.3.2 Guide de lecture

Nous commençons par présenter la stratégie adoptée dans cet article ainsi que les difficultés causées par Λ et \mathcal{Q} qui dictent dans quels espaces fonctionnels nous devons travailler, puis nous détaillerons l'organisation de l'article.

Présentation de la stratégie.

Comme dans [35] et notre travail présenté en Section 3.2, nous avons choisi de considérer la solution f de l'équation de Boltzmann

$$\partial_t f = \Lambda f + \mathcal{Q}(f, f)$$

sous la forme $f = h + g$, où $h(t) \in \mathbf{X}(m)$ a une décroissance polynomiale et $g(t) \in \mathbf{E}$ une décroissance gaussienne, et ces deux parties évoluent selon le système d'équations couplées

$$\begin{aligned} \partial_t h &= \mathcal{B}h + \mathcal{Q}(h, h) + \mathcal{Q}(g, h) + \mathcal{Q}(h, g), \quad h(0) = f_{\text{in}}, \\ \partial_t g &= \Lambda g + \mathcal{Q}(g, g) + \mathcal{A}h, \quad g(0) = 0, \end{aligned}$$

où l'opérateur linéarisé $\Lambda = \mathcal{B} + \mathcal{A}$ a été découpé en une partie dissipative \mathcal{B} et une partie «régularisante» $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbf{X}(m); \mathbf{E})$ définie par $\mathcal{A}g(v) = \chi(v)g(v)$ pour une certaine fonction lisse $M\mathbf{1}_{|v| \leq R} \leq \chi \leq M\mathbf{1}_{|v| \leq 2R}$ et $M, R > 0$ des constantes. L'existence d'une solution à ce système est prouvée à l'aide d'un schéma itératif construisant une suite de solutions approchées $(h_N, g_N)_{N=0}^\infty$:

$$\begin{aligned} \partial_t h_{N+1} &= \mathcal{B}h_{N+1} + \mathcal{Q}(h_N, h_{N+1}) + \mathcal{Q}(g_N, h_{N+1}) + \mathcal{Q}(h_{N+1}, g_N), \quad h_{N+1}(0) = f_{\text{in}}, \\ \partial_t g_{N+1} &= \Lambda g_{N+1} + \mathcal{Q}(g_N, g_{N+1}) + \mathcal{A}h_N, \quad g_{N+1}(0) = 0. \end{aligned}$$

Le choix du terme $\mathcal{Q}(h_N, h_{N+1})$ plutôt que $\mathcal{Q}(h_N, h_N)$ n'est pas anodin et nous le motivons dans le paragraphe suivant. Comme présenté à la Section 2.2.1, afin de montrer la stabilité et la convergence du schéma, les enjeux principaux sont d'identifier quelle quantité est dissipée par la partie linéaire de chaque équation (\mathcal{B} pour la première, Λ pour la seconde), et d'estimer la partie non-linéaire à l'aide de cette quantité et de l'énergie de la solution.

Contraintes liées à la partie polynomiale. Dans cet article, nous avons choisi de travailler avec l'espace de Sobolev anisotrope $H^{s,*}(m)$ présenté à la Section 2.2.4 car il est naturel dans le sens où \mathcal{L} dissipe la norme qui lui est associée (voir [44, Propositions 2.2 et 3.1]) :

$$\langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L_v^2(m)} \approx -\|f\|_{H_v^{s,*}(m)}^2 + \text{t.o.i.} \quad (3.11)$$

Ainsi, en considérant M et R suffisamment grands, les termes d'ordres inférieurs («t.o.i») sont absorbés à l'aide de \mathcal{A} :

$$\langle \mathcal{L} - \mathcal{A}f, f \rangle_{L_v^2(m)} \approx -\|f\|_{H_v^{s,*}(m)}^2.$$

L'estimation de dissipation (3.11) vient de la partie $\mathcal{Q}(\mu, f)$ de \mathcal{L} , et de manière plus générale, les termes de la forme $\mathcal{Q}(g, f)$ sont contrôlés par (voir [44, Proposition 2.2])

$$\langle \mathcal{Q}(g, f), f \rangle_{L_v^2(m)} \lesssim \|f\|_{H_v^{s,*}(m)}^2 \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} + \|g\|_{H_v^{s,*}(m)} \|f\|_{H_v^{s,*}(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}, \quad (3.12)$$

pour $\ell > 0$ assez grand (indépendamment de k). Concernant les expressions générales $\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{L^2(m)}$, il est plus compliqué de les borner à l'aide de la norme $H^{s,*}(m)$. On se repose alors sur les estimations établies par He [113, Théorème 1.1] en terme d'espaces de Sobolev usuels, donc moins précises car oubliant la structure anisotrope de \mathcal{Q} , mais permettant de démontrer (voir [44, Proposition 2.2])

$$\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{L_v^2(m)} \lesssim \|h\|_{H_v^{s,*}(m)} \left(\|f\|_{H_v^{s,*}(m)} \|g\|_{L_v^2(m)} + \|\langle v \rangle^{2s} g\|_{H_v^{s,*}(m)} \|f\|_{L_v^2(m)} \right). \quad (3.13)$$

L'influence du terme $\langle v \rangle^{2s}$ dans le membre de droite sur la stratégie sera abordée plus tard dans ce paragraphe. Les estimations spatialement inhomogènes sont déduites des deux précédentes à l'aide des injections de Sobolev. Pour les termes de la forme $\langle \mathcal{Q}(g, f), f \rangle_{\mathbf{X}(m)}$, on a (voir [44, Proposition 2.5])

$$\langle \mathcal{Q}(g, f), f \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|f\|_{\mathbf{X}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}^*(m)}. \quad (3.14)$$

Pour établir cette estimation, on est amené à considérer des expressions de la forme

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{Q}(g, \nabla_x^a f), \nabla_x^a f \rangle_{L_{x,v}^2(m)}, \quad a = 0, 3, \\ & \langle \mathcal{Q}(\nabla_x^a g, \nabla_x^{3-a} f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_{x,v}^2(m)}, \quad a = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Les premières sont contrôlées à l'aide de (3.12). Les secondes sont contrôlées à l'aide de (3.13) et le poids supplémentaire $\langle v \rangle^{2s}$ est absorbé par le poids $\langle v \rangle^{-6s}$ dans la définition de la norme $\mathbf{X}(m)$, ce qui permet de fermer les estimations et ainsi ne faire intervenir que les normes $\mathbf{X}(m)$ et $\mathbf{X}^*(m)$ dans (3.14). Pour les expressions plus générales $\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{\mathbf{X}(m)}$,

on montre (voir [44, Proposition 2.6])

$$\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}(m)} \|\langle v \rangle^{2s} g\|_{\mathbf{X}^*(m)}). \quad (3.15)$$

Le terme $\|\langle v \rangle^{2s} g\|_{\mathbf{X}^*(m)}$ dans l'estimation ci-dessus n'est pas contrôlé par la dissipation à cause du poids supplémentaire $\langle v \rangle^{2s}$, ce qui empêche de fermer les estimations d'énergie dans $\mathbf{X}(m)$, c'est pourquoi le schéma itératif est défini avec le terme $\mathcal{Q}(h_N, h_{N+1})$ dans l'équation pour h_{N+1} plutôt que $\mathcal{Q}(h_N, h_N)$.

Contraintes liées à la partie gaussienne. L'espace fonctionnel choisi pour l'étude de la partie gaussienne g est le même que celui des travaux de Gressman et Strain [103, 178]. En se basant sur ces travaux, eux mêmes inspirés de l'étude d'hypocoercivité de Duan [74], nous utilisons un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}}$ équivalent au produit scalaire usuel et tel que

$$\langle \Lambda f, f \rangle_{\mathbf{E}} \lesssim -\|f\|_{\mathbf{E}^*}^2, \quad (3.16)$$

où l'espace d'énergie gaussien est défini comme

$$\|f\|_{\mathbf{E}}^2 := \|f\|_{H_x^3 L_v^2(\mathcal{M}^{-1/2})}^2,$$

et la quantité dissipée

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathbf{E}^*}^2 &:= \|(\text{Id} - \Pi)f\|_{H_x^3 E_v^*}^2 + \|\nabla_x \Pi f\|_{H_x^2 L_v^2}^2, \\ \|f\|_{\mathbf{E}^*}^2 &:= \|\langle v \rangle^{\gamma/2+s} f\|_{L_v^2(\mathcal{M}^{-1/2})}^2 + \int b(\cos \theta) |v - v|^\gamma \mathcal{M}_*(\mathfrak{f}' - \mathfrak{f})^2 d\zeta, \quad \mathfrak{f} := \mathcal{M}^{-1/2} f. \end{aligned}$$

La quantité dissipée $\|f\|_{\mathbf{E}^*}$ contrôle les dérivées mais pas la norme L_x^2 de la partie macroscopique Πf , ce qui est à l'origine de deux difficultés :

- Les estimations de \mathcal{Q} doivent se faire en évitant de faire intervenir cette norme. En particulier, au moment d'établir les estimations inhomogènes, la norme $\|g\|_{L_x^\infty E_v^*}$ ne doit pas être contrôlée avec les mêmes injections de Sobolev que dans l'espace polynomial $\mathbf{X}(m)$. Quitte à travailler dans H_x^3 , on peut utiliser l'inégalité suivante valable pour tout $\varphi \in H^3(\mathbb{R}^3)$:

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|\nabla_x \varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}.$$

L'estimation non-linéaire prouvée dans l'espace gaussien est (voir [44, Proposition 2.7])

$$\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \|h\|_{\mathbf{E}^*} (\|f\|_{\mathbf{E}} \|g\|_{\mathbf{E}^*} + \|f\|_{\mathbf{E}^*} \|g\|_{\mathbf{E}}).$$

- Pour s'assurer que g est global, il faut qu'au moment de l'estimation d'énergie, le

terme de couplage $\mathcal{A}h$ produise un terme intégrable en temps :

$$\int_0^\infty \langle \mathcal{A}h(t), g(t) \rangle_{\mathbf{E}} dt < \infty.$$

Cependant, la dissipation (3.16) ne permet pas de montrer que $t \mapsto \|g(t)\|_{\mathbf{E}}^2$ est dans L_t^2 mais seulement L_t^∞ , il faut donc montrer l'intégrabilité en temps de h . Or, \mathcal{A} étant une multiplication par une fonction \mathcal{C}_c^∞ et donc $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbf{X}(m_0); \mathbf{E})$ où $m(v) = \langle v \rangle^{k_0}$ pour un k_0 quelconque, on a en fait

$$\int_0^\infty \langle \mathcal{A}h(t), g(t) \rangle_{\mathbf{E}} dt \lesssim \|g\|_{L_t^\infty \mathbf{E}} \|h\|_{L_t^1 \mathbf{X}(m_0)}.$$

Afin de justifier que $h \in L_t^1 \mathbf{X}(m_0)$, on utilise un argument d'interpolation (voir Section 2.2.3) permis par les estimations dans les espaces $\mathbf{X}(m)$ et $\mathbf{X}(m_0)$ et menant au taux de décroissance de la partie polynomiale

$$\|h(t)\|_{\mathbf{X}(m_0)} \lesssim \langle t \rangle^{-\frac{k-k_0}{|\gamma|}} \|f_{\text{in}}\|_{\mathbf{X}(m)}.$$

Organisation de l'article.

Section 2 de [44]. Cette section a pour but d'établir diverses estimations de l'opérateur de collisions \mathcal{Q} , d'une part pour contrôler les termes non-linéaires du système d'équations couplées, d'autre part pour montrer les inégalités de coercivité de \mathcal{L} dans l'espace polynomial $\mathbf{X}(m)$.

Après avoir rappelé l'estimation de \mathcal{Q} issue de [6, Théorème 1.2] dans $L_v^2(\mathcal{M}^{-1/2})$ (**Lemme 2.1**), nous nous tournons vers celles dans l'espace polynomial $L_v^2(m)$. Celles-ci sont démontrées en combinant l'estimation [113, Théorème 1.1] (**Lemme 2.3**) dans L_v^2 en terme d'espaces de Sobolev isotropes :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{L_v^2} &\lesssim \|h\|_{L^2(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{H^a(\langle v \rangle^{w_1})} \|h\|_{H^b(\langle v \rangle^{w_2})}, \\ w_1 + w_2 &= \gamma + 2s, \quad a + b = 2s, \end{aligned}$$

pour un ℓ assez grand, avec celle du commutateur (**Lemme 2.4**) :

$$\begin{aligned} &|\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{L_v^2(m)} - \langle \mathcal{Q}(f, mg), mh \rangle_{L_v^2}| \\ &\lesssim \|h\|_{H_v^{s,*}(m)} \left(\|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|f\|_{H_v^{s,*}(m)} + \|g\|_{H_v^{s,*}(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \right), \end{aligned}$$

pour un ℓ assez grand (indépendamment de k). Cette estimation repose sur une réécriture tirée de l'article [9], dans lequel des potentiels durs sont considérés, adaptée aux potentiels mous. Ces deux inégalités permettent d'établir le contrôle de l'opérateur \mathcal{Q} dans $L_v^2(m)$ (**Proposition 2.2**). L'estimation inhomogène dans l'espace gaussien \mathbf{E} pour le produit

scalaire équivalent $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathbf{E}}$ est ensuite déduite (**Proposition 2.7**) :

$$\langle\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle\rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \|h\|_{\mathbf{E}} (\|f\|_{\mathbf{E}} \|g\|_{\mathbf{E}^*} + \|f\|_{\mathbf{E}^*} \|g\|_{\mathbf{E}}), \quad (3.17)$$

de même pour les estimations dans l'espace polynomial $\mathbf{X}(m)$ (**Propositions 2.5** et **2.6**) :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q}(g, f), f \rangle_{\mathbf{X}(m)} &\lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|f\|_{\mathbf{X}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}^*(m)}, \\ \langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{\mathbf{X}(m)} &\lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|\langle v \rangle^{2s} g\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|f\|_{\mathbf{X}(m)}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

ainsi que des estimations adaptées au cas où certains arguments de \mathcal{Q} ont une décroissance gaussienne.

Section 3 de [44]. Dans cette section, nous rappelons l'estimation d'hypocoercivité de Λ dans l'espace gaussien \mathbf{E} , puis prouvons la coercivité (faible) de \mathcal{B} dans l'espace polynomial $\mathbf{X}(m)$. Pour cette dernière, nous découpons la partie angulaire $b(\cos \theta)$ du noyau de collisions afin d'isoler la partie venant des collisions rasantes :

$$b(\cos \theta) = b(\cos \theta) \mathbf{1}_{\theta \geq \delta} + b(\cos \theta) \mathbf{1}_{\theta \leq \delta} =: b_{\delta}^c(\cos \theta) + b_{\delta}(\cos \theta),$$

induisant ainsi le découpage de l'opérateur linéarisé :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\delta}^c + \mathcal{L}_{\delta}.$$

La première partie est estimée dans le **Lemme 3.2**, la seconde dans le **Lemme 3.3**, et en combinant les estimations montrées dans ces lemmes, on établit la **Proposition 3.1** :

$$\langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L_v^2(m)} \lesssim -\|f\|_{H_v^{s,*}(m)}^2 + \text{t.o.i.}$$

On en déduit ensuite la **Proposition 3.5**; il s'agit d'une estimation de type coercivité pour $\mathcal{B} = \mathcal{L} - v \cdot \nabla_x - \mathcal{A}$ reposant sur l'absorption des termes d'ordre inférieur («t.o.i.») grâce à l'opérateur \mathcal{A} :

$$\langle \mathcal{B}f, f \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim -\|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2.$$

L'hypocoercivité de Λ est rappelée dans la **Proposition 3.4** :

$$\langle\langle \Lambda f, f \rangle\rangle_{\mathbf{E}} \lesssim -\|f\|_{\mathbf{E}^*}^2.$$

Section 4 de [44]. Cette section montre la stabilité du schéma itératif ainsi que sa convergence, puis montre l'unicité de la solution construite. La stabilité est montrée, grâce

aux estimations des sections précédentes, dans les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned}\|h\|_{\mathcal{X}(m)}^2 &:= \sup_{t \geq 0} \|h(t)\|_{\mathbf{X}(m)}^2 + \int_0^\infty \|h(t)\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 dt, \\ \|h\|_{\mathcal{Y}(m_0)}^2 &:= \sup_{t \geq 0} \langle t \rangle^{2\theta} \|h(t)\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2 + \int_0^\infty \langle t \rangle^{2\theta} \|h(t)\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 dt, \\ \|g\|_{\mathcal{E}}^2 &:= \sup_{t \geq 0} \|g(t)\|_{\mathbf{E}}^2 + \int_0^\infty \|g(t)\|_{\mathbf{E}^*}^2 dt,\end{aligned}$$

avec $m_0(v) = \langle v \rangle^{k_0}$, où k_0 est suffisamment petit par rapport à k_0 pour être en mesure de montrer la décroissance d'ordre $\langle t \rangle^{-\theta}$ dans $\mathbf{X}(m_0)$, pour un certain $\theta > 1/2$. La convergence, quant à elle, est démontrée dans les espaces $\mathcal{X}(m\langle v \rangle^{-2s})$, $\mathcal{Y}(m\langle v \rangle^{-2s})$ et \mathcal{E} afin de pouvoir encaisser le terme $\langle v \rangle^{2s}$ dans (3.18), faisant ainsi apparaître les trois normes $\mathcal{X}(m)$, $\mathcal{Y}(m_0)$ et \mathcal{E} qui ont été bornées à l'étape de stabilité.

3.4 Boltzmann avec potentiels mous dans \mathbb{R}^3 (avec cutoff)

Nous présentons dans cette section le résultat d'existence et unicité pour l'équation de Boltzmann dans le cas de potentiels mous ($\gamma < 0$), dans l'espace entier $\Omega = \mathbb{R}^3$ avec hypothèse de cutoff angulaire établi en collaboration avec Kleber Carrapatoso dans [44]. Le cas sans cutoff est également traité dans ce travail mais est présenté dans une section séparée (Section 3.3) afin de clarifier la présentation.

3.4.1 Présentation et commentaires des résultats

Le théorème que nous allons présenter est valable dans le cas des potentiels (faiblement) mous $\gamma \in (-3/2, 0)$ sous l'hypothèse de troncature angulaire $b \in L^\infty$. Avant d'énoncer le résultat, nous devons introduire quelques notations. Nous fixons un premier poids polynomial $m(v) = \langle v \rangle^k$ avec $k > 0$ assez grand et $m_1(v) = \langle v \rangle^{k_1}$ où k_1 est assez grand par rapport à k . On dénotera par $\mathbf{X}(m)$ l'espace

$$\mathbf{X}(m) := H_x^2 L_v^2(m).$$

Le résultat démontré dans [44] est le suivant.

Théorème 3.5 (issu de [44]). *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que toute donnée initiale f_{in} vérifiant la condition $\|f_{\text{in}}\|_{\mathbf{X}(m_1) \cap L_v^2 L_x^1(m_1)} \leq \varepsilon_0$ génère une unique solution globale $f \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathbf{X}(m))$ à l'équation*

$$\partial_t f = \Lambda f + \mathcal{Q}(f, f),$$

satisfaisant l'estimation de décroissance

$$\|f(t)\|_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|f_{\text{in}}\|_{\mathbf{X}(m_1) \cap L_v^2 L_x^1(m_1)}.$$

3.4.2 Guide de lecture

Section 2 de [44]. Dans cette section, nous montrons l'estimation homogène duale de l'opérateur de collisions \mathcal{Q} dans $L_v^2(m)$ (**Lemme 2.9**) :

$$\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{L_v^2(m)} \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)} \left(\|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{L_v^2(m)} + \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|f\|_{L_v^2(m)} \right),$$

avec $\ell > 0$ suffisamment grand (indépendamment de k), dont nous déduisons les estimations inhomogènes fortes (**Proposition 2.8**)

$$\|\mathcal{Q}(f, g)\|_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{\mathbf{X}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_{\mathbf{X}(m)} \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)}, \quad (3.19)$$

$$\|\mathcal{Q}(f, g)\|_{L_x^1 L_v^2(m)} \lesssim \|\langle v \rangle^\gamma f\|_{L_{x,v}^2(m)} \|g\|_{L_{x,v}^2(\langle v \rangle^\ell)} + \|\langle v \rangle^\gamma g\|_{L_{x,v}^2(m)} \|f\|_{L_{x,v}^2(\langle v \rangle^\ell)}, \quad (3.20)$$

avec $\ell > 0$ suffisamment grand (indépendamment de k).

Section 3 de [44]. Le but de cette section est d'établir le taux de décroissance du semigroupe $S_\Lambda(t)$ généré par Λ grâce à une stratégie d'élargissement, exploitant l'étude de la dispersion dans l'espace gaussien $L_{x,v}^2(\mathcal{M}^{-1/2})$ menée dans [178]. Nous commençons par montrer l'estimation de type coercivité pour \mathcal{L} (**Lemme 3.2**) :

$$\langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L_v^2(m)} \lesssim -\|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 + \text{t.o.i.}$$

Nous en déduisons le taux de décroissance du semigroupe généré par $\mathcal{B} = \mathcal{L} - v \cdot \nabla_x - \mathcal{A}$, avec $\mathcal{A}g(v) = \chi(v)g(v)$ où χ est une fonction lisse vérifiant $M\mathbf{1}_{|v| \leq R} \leq \chi \leq M\mathbf{1}_{|v| \leq 2R}$ pour M et R assez grands, en utilisant un argument d'interpolation comme présenté à la Section 2.2.3 (**Proposition 3.5**) :

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)f\|_{L_v^2 L_x^1(m)} \lesssim \langle t \rangle^{-N/|\gamma|} \|\langle v \rangle^N f\|_{L_v^2 L_x^1(m)}.$$

Ce taux de décroissance permet de déduire celui de $S_\Lambda(t)$ dans l'espace polynomial $\mathbf{X}(m)$ à partir de celui dans l'espace gaussien $L_{x,v}^2(\mathcal{M}^{-1/2})$ puis le taux de décroissance de $S_\Lambda(t)$ dans l'espace polynomial :

$$\|S_\Lambda(t)f\|_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|f\|_{\mathbf{X}(m_1) \cap L_v^2 L_x^1(m_1)}, \quad (3.21)$$

pour $\ell > 0$ assez grand.

Section 5 de [44]. Il est montré dans cette section que la donnée initiale f_{in} génère une solution globale avec un taux de décroissance d'ordre $\langle t \rangle^{-3/4}$. En combinant les deux estimations (3.19) et (3.20), on obtient

$$\|\mathcal{Q}(f, f)\|_{\mathbf{X}(m_1) \cap L_v^2 L_x^1(m_1)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}(m)}^2,$$

ce qui, combiné avec l'estimation de décroissance (3.21), donne

$$\|S_\Lambda(t)\mathcal{Q}(f, f)\|_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|f\|_{\mathbf{X}(m)}^2.$$

L'existence d'une unique solution globale découle alors du théorème de point fixe de Banach appliqué à

$$f \mapsto \left(t \mapsto S_\Lambda(t)f_{\text{in}} + \int_0^t S_\Lambda(\tau)\mathcal{Q}(f(\tau), f(\tau))d\tau \right)$$

dans une petite boule centrée en 0 de l'espace fonctionnel

$$\left\{ f \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathbf{X}(m)) : f(0) = f_{\text{in}}, \sup_{t \geq 0} \langle t \rangle^{3/4} \|f(t)\|_{\mathbf{X}(m)} < \infty \right\}.$$

3.5 Améliorations possibles et perspectives

Limites hydrodynamiques depuis d'autres modèles cinétiques. Il serait intéressant d'étendre les résultats de [88, 89] présentés dans les Sections 3.1 et 3.2 à d'autres modèles cinétiques, dont l'équation de Boltzmann pour $\gamma \in (-3, 1)$. Chacun de ces travaux repose sur l'hypothèse que $f \mapsto vf$ soit \mathcal{L} -borné, ce qui constitue l'obstruction principale à de telles généralisations car elle restreint au modèle des sphères dures ($\gamma = 1$). L'équation de Landau pour certains potentiels tombe dans ce cadre et admet déjà une étude spectrale dans l'espace gaussien [202], cependant d'autres modèles cinétiques requièrent plus de travail.

Une première étape sera de traiter le cas de l'équation de Boltzmann pour des potentiels durs $\gamma \in [0, 1)$, de sorte à adapter la stratégie lorsque $f \mapsto vf$ n'est pas \mathcal{L} -borné (mais \mathcal{L} admet quand même un trou spectral). En effet, seule l'existence de développements limités de la résolvante est utilisée pour prouver l'existence et le développement asymptotique des valeurs propres. On pourra adapter la preuve de [88] en s'inspirant des techniques de factorisation de [185, Lemmes 2.16 à 2.18].

Une deuxième étape sera de considérer d'autres modèles cinétiques dont la version linéarisée est de la forme

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{L}f,$$

où \mathcal{L} admet une décomposition $\mathcal{L} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses de Gualdani-Mischler-Mouhot (voir Section 2.2.4), admet un trou spectral, en pour lequel 0 est une valeur propre discrète semi-simple. C'est le cas par exemple pour certaines instances des équations de Boltzmann et Landau [202], et ou Fokker-Planck [105]. On commencera par étudier le spectre de $\mathcal{L} - v \cdot \nabla_x$ (soit dans l'espace polynomial comme dans [88], soit dans l'espace gaussien pour ensuite n'étendre que quelques propriétés à un espace polynomial comme dans [89]).

Il serait également intéressant d'étudier la dérivation des équations de Navier-Stokes-

Fourier dans le cas de potentiels mous ($\gamma \in (-3, 0)$) pour lesquels une étude spectrale a déjà été menée par Asano et Ukai dans l'espace gaussien [189]. Rappelons que pour ces potentiels, l'opérateur \mathcal{L} n'admet pas de trou spectral, ce qui force à jongler entre plusieurs espaces afin d'avoir un taux de décroissance explicite (voir Section 2.2.3).

Étude spectrale dans $L_x^2 L_v^p(\langle v \rangle^k dx dv)$. L'étude spectrale [88] est en fait valide dans des espaces de la forme $L_x^2 L_v^p(\langle v \rangle^k dx dv)$. En effet, l'opérateur \mathcal{A} est utilisé de la même façon que s'il agissait comme une troncature en vitesse $f \mapsto \chi f$ (où χ serait une fonction bornée à support compact), or il s'agit d'un opérateur à noyau lisse à support compact. Le Théorème 3.1 est donc valable dans les espaces $L_x^2 L_v^p(\langle v \rangle^k dx dv)$ car la structure hilbertienne de $L^2(\langle v \rangle^2 dv)$ n'est utilisée nulle part. La preuve du Théorème 3.2 peut être adaptée à l'espace $L_x^2 L_v^p(\langle v \rangle^k dx dv)$ à condition de remplacer l'utilisation du Théorème 2.6 par des estimations d'intégrabilité de la résolvante sur $-b + i\mathbb{R}$. Dans notre travail [89] présenté à la Section 3.2, une large gamme d'espaces sont traités en exploitant les propriétés régularisantes de \mathcal{A} ainsi qu'une technique de bootstrap inspirée de [24].

Potentiels mous généraux $\gamma \in (-3, -2s]$ Les résultats présentés dans les Sections 3.3 et 3.4 sont limités aux potentiels faiblement mous $\gamma \in (-3/2, -2s)$ et sera étendu à la gamme entière de potentiels mous $\gamma \in (-3, -2s]$. L'hypothèse $\gamma \in (-3/2, -2s]$ permet de rester dans le cadre L^2 en vitesse sans nécessiter de régularité en vitesse.

Taux de décroissance dans l'espace entier pour les potentiels mous sans cutoff.

Afin de compléter le Théorème 3.4, nous souhaiterions montrer que le taux de décroissance de la solution construite est de l'ordre de $\langle t \rangle^{-3/4}$. Comme dans la preuve d'existence pour le cas avec cutoff (voir Section 3.4), il faut montrer $\|\mathcal{Q}(f(t), f(t))\|_{L_{x,v}^2(m) \cap L_v^2 L_x^1(m)} \lesssim \langle t \rangle^{-3/2}$. Or, les estimations établies impliquent seulement $\mathcal{Q}(f(t), f(t)) \in L_x^2 H_v^{-s}(m \langle v \rangle^{-\gamma/2-s})$, il reste donc à montrer que le flot de l'équation régularise suffisamment la solution. Notons cependant que l'estimation d'énergie présentée dans le Théorème 3.4 contient une forme intégrale de dispersion

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\|_{L_{x,v}^2(m)}^2 + \int_0^\infty \|\nabla_x f(t)\|_{L_x^2 H_v^{s,*}(m)}^2 dt \lesssim \|f_{\text{in}}\|_{\mathbf{X}(m)}^2,$$

qui est similaire à celle satisfaite par les solutions de l'équation de la chaleur, de Navier-Stokes, ou de Boltzmann dans l'espace entier (voir par exemple [187, 178]). Nous la précisons en $\|f(t)\|_{\mathbf{X}(m_0)} \lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|f_0\|_{L_v^2 L_x^1(m) \cap \mathbf{X}(m)}$ où $m_0 = \langle v \rangle^{k_0}$ avec k_0 suffisamment petit par rapport à k .

Estimations générales de \mathcal{Q} à l'aide d'une norme isotrope. Au moment d'établir l'estimation (3.15), nous nous reposons sur celle de He [113, Théorème 1.1], ce qui est

la raison pour laquelle l'estimation ainsi établie ne permet pas de fermer les estimations, contrairement à son analogue dans l'espace gaussien (3.17). Il serait intéressant de chercher à prouver un contrôle de la forme

$$\langle \mathcal{Q}(f, g), h \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|f\|_{\mathbf{X}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}^*(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(m)}),$$

ce qui devrait simplifier l'étude de l'équation dans $\mathbf{X}(m)$.

Limite hydrodynamique de Boltzmann quantique. Une variante de l'équation de Boltzmann existe lorsque le gaz considéré est dilué, mais également soumis au principe d'exclusion de Pauli (deux particules du système ne peuvent pas se trouver dans le même état). Ainsi, l'équation de *Boltzmann-Fermi-Dirac* ou *Boltzmann quantique* s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t F + v \cdot \nabla_x &= \mathcal{Q}_\delta(F), \\ \mathcal{Q}(F) &= \int |v - v_*| (F'_* F' (1 - \delta F) (1 - \delta F_*) - F F_* (1 - \delta F') (1 - \delta F'_*)) \, d\sigma dv_*, \end{aligned}$$

où $\delta \approx (\text{cte. de Planck})^3$. Dans [70], Dolbeault a montré, d'une part que l'on retrouve parmi ses équilibres $\mathcal{M}_\delta := \frac{\mathcal{M}}{1 + \delta \mathcal{M}}$, d'autre part que les solutions de l'équation de Boltzmann quantique convergent vers celles de Boltzmann classique lorsque $\delta \rightarrow 0$. De plus, il a été prouvé récemment par Jiang, Xiong et Zhou [128] que, à δ fixé, la même procédure de scaling et linéarisation qu'à la Section 1.6.2 mène à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ aux équations de Navier-Stokes-Fourier incompressible :

$$\begin{cases} \partial_t u_\delta + u_\delta \cdot \nabla_x u_\delta = \mu_\delta \Delta_x u_\delta, & \nabla_x \cdot u_\delta = 0, \\ \partial_t \theta_\delta + u_\delta \cdot \nabla_x \theta_\delta = \kappa_\delta \Delta_x \theta_\delta, & \nabla_x (\theta_\delta + \rho_\delta) = 0, \end{cases}$$

pour certaines constantes $\mu_\delta, \kappa_\delta > 0$ dépendant de \mathcal{Q}_δ et de l'équilibre \mathcal{M}_δ . Avec Bertrand Lods, nous allons mener une étude spectrale de l'équation linéarisée de Boltzmann quantique à la manière de notre travail [88] (voir Section 3.1), uniformément en δ afin de mieux comprendre les liens entre les équations de Boltzmann quantique/classique et Navier-Stokes classique/«quantique». En particulier, nous espérons trouver un scaling $\delta = \delta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ fournissant à la limite un modèle hydrodynamique de type Navier-Stokes-Fourier incompressible avec terme de forçage, similairement à [11].

Effet tunnel dans des équations cinétiques à basse température et avec champs magnétique. L'effet tunnel peut se résumer comme «théoriquement, une particule quantique peut traverser les murs». Mathématiquement cela signifie qu'il existe des solutions de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t \psi + H_\hbar \psi = 0,$$

où $0 < h \ll 1$ est la constante de Planck et $H_h \psi$ la densité d'énergie de la particule, qui peut être transportée d'un côté d'une barrière de potentiel à l'autre côté, éventuellement en un temps très long. On retrouve de manière remarquable cet effet sur des distributions de particules classiques modélisées par l'équation de Kramers-Fokker-Planck grâce à l'effet couplé de la diffusion et du transport :

$$h\partial_t f - hv \cdot V(x) \cdot \nabla_v f = (-h\nabla_v + v) \cdot (h\nabla_v + v)f,$$

un modèle qui décrit par exemple l'évolution à basse température d'une densité de particules que l'on note $f = f(t, x, v)$.

Pour ces deux types d'équations, l'effet tunnel se cache dans le bas du spectre des opérateurs sous-jacents. En notant $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux premières valeurs propres non nulles, il existe des solutions représentant une particule se déplaçant d'un point à un autre de l'espace en un temps de l'ordre de $(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}$, en oscillant dans le cas quantique et de manière définitive dans le cas classique.

Avec Frédéric Hérau et Nicolas Raymond, nous souhaitons étudier l'effet tunnel pour des équations cinétiques de la forme

$$h\partial_t f + hv \cdot \nabla_x f + \mathcal{F}_h f + \mathcal{Q}_h f = 0.$$

Ici, les opérateurs linéaires \mathcal{F}_h et \mathcal{Q}_h , indexés par la température $0 < h \ll 1$, modélisent respectivement les forces et les collisions subies par les particules. Un autre exemple est la dynamique stellaire, où cette fois f est la densité de présence des corps célestes. On s'intéressera aux cas où la force considérée est induite par un champ électrique et un champ magnétique, tous deux fixés : $\mathcal{F}_h = h(E(x) + v \wedge B(x)) \cdot \nabla_v$. On considèrera également le cas où les collisions ne sont pas locales en vitesse, c'est-à-dire données par un autre opérateur que la diffusion de Fokker-Planck ; on s'intéressera ainsi au cas où \mathcal{L}_h est un opérateur de type relaxation linéaire, Boltzmann, Landau ou encore Fokker-Planck fractionnaire.

Dans chaque cas, on s'attend à retrouver un effet tunnel lorsque E et B ont des puits de potentiel, que l'on étudiera précisément via les outils semi-classiques et cinétiques.

Deuxième partie

Travaux menés durant la thèse

Chapitre 4

Spectral study of the linearized Boltzmann operator in L^2 spaces with polynomial and Gaussian weights.

**SPECTRAL STUDY OF THE LINEARIZED BOLTZMANN
OPERATOR IN L^2 SPACES WITH POLYNOMIAL AND
GAUSSIAN WEIGHTS.**

PIERRE GERVAIS

ABSTRACT. The spectrum structure of the linearized Boltzmann operator has been a subject of interest for over fifty years and has been inspected in the space $L^2(\mathbb{R}^d, \exp(|v|^2/4))$ by B. Nicolaenko [25] in the case of hard spheres, then generalized to hard and Maxwellian potentials by R. Ellis and M. Pinsky [12], and S. Ukai proved the existence of a spectral gap for large frequencies [30]. The aim of this paper is to extend to the spaces $L^2(\mathbb{R}^d, (1 + |v|)^k)$ the spectral studies from [12, 30]. More precisely, we look at the Fourier transform in the space variable of the inhomogeneous operator and consider the dual Fourier variable as a fixed parameter. We then perform a precise study of this operator for small frequencies (by seeing it as a perturbation of the homogeneous one) and also for large frequencies from spectral and semigroup point of views. Our approach is based on Kato's perturbation theory for linear operators [20] as well as enlargement arguments from [24, 17].

1. INTRODUCTION

1.1. **The model.** Consider a rarefied gas whose average number of particles located at position $x \in \Omega$, traveling at velocity $v \in \mathbb{R}^d$ at time $t \geq 0$ is given by $F(t, x, v)$, where $\Omega = \mathbb{T}^d$ or \mathbb{R}^d , and $d \geq 2$. Assume furthermore that the particles are uncorrelated, and that they undergo hard sphere collisions where the energy and momentum are conserved. Finally, we assume these binary collisions are the only interactions between particles. Under these conditions, this density satisfies the *Boltzmann equation*

$$(B) \quad \partial_t F + v \cdot \nabla_x F = Q(F, F),$$

which is a transport equation whose source term takes into account the binary collisions between the particles. The operator Q is called the *Boltzmann operator* or *collision operator* and is an integral bilinear operator defined as

$$Q(F, G)(v) := \int_{\mathbb{R}_{v_*}^d} \int_{\mathbb{S}_\sigma^{d-1}} |v - v_*| (F'G'_* - FG_*) dv_* d\sigma$$

where we used the standard notations

– v and v_* for the velocities of two particles before the collision,

Date: July 22, 2022.

– v' and v'_* for their velocities after the collision, given by

$$v' := \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2}\sigma, \quad v'_* := \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2}\sigma,$$

– $F' := F(v')$, $G'_* := G(v'_*)$ and $G_* := G(v_*)$.

1.1.1. *Equilibria.* The (global) Maxwellian distributions, which write

$$M_{\rho,\theta,u}(v) := \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v - u|^2}{2\theta}\right)$$

for some $\rho, \theta > 0$ and $u \in \mathbb{R}^d$ can be shown to be equilibria of (B). We will denote in this paper the normal centered distribution ($\rho = 1, u = 0, \theta = 1$) by M .

1.1.2. *Hydrodynamic limits.* By choosing a system of reference values for length, time and velocity (see for example [15, 27]), we get a dimensionless version of the equation:

$$\varepsilon \partial_t F^\varepsilon + v \cdot \nabla_x F^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Q(F^\varepsilon, F^\varepsilon),$$

where ε is the Knudsen number and corresponds to the mean free path, that is to say the average distance traveled by a particle between two collisions. Performing the linearization $F^\varepsilon =: M + \varepsilon f^\varepsilon$, the equation rewrites in terms of f^ε as

$$(1.1) \quad \varepsilon \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L} f^\varepsilon + Q(f^\varepsilon, f^\varepsilon),$$

where $\mathcal{L}h := Q(M, h) + Q(h, M)$. Letting ε go to zero, we expect to get the dynamics of a fluid as the amount of collisions will then go to infinity. This issue of unifying the mesoscopic and macroscopic points of view goes back to Hilbert, and several formal methods have been suggested by Hilbert [19], Chapman, Enskog and Grad [16]. These were made rigorous by C. Bardos, F. Golse and D. Levermore in [6, 5] by proving that if the (renormalized) solution of (1.1) and its first moments converge in some weak sense, then the limiting moments are (Leray) solutions to the incompressible Navier-Stokes-Fourier system.

To derive hydrodynamic equations from (1.1), one thus needs to solve the latter for any $\varepsilon \ll 1$ and prove the convergence of the solution when ε goes to zero. In [7], the authors rewrite (1.1) in integral form:

$$(1.2) \quad f^\varepsilon(t) = S^\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) f^\varepsilon(0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t S^\varepsilon\left(\frac{t-t'}{\varepsilon^2}\right) Q(f^\varepsilon(t'), f^\varepsilon(t')) dt',$$

$$S^\varepsilon(t) := \exp(t(\mathcal{L} - \varepsilon v \cdot \nabla_x)),$$

construct smooth solutions in $L_v^\infty H_x^s(M^{-1/2}(1 + |v|^k))$ with $s > d/2$, and prove their convergence as ε goes to zero. In [14], the authors prove a converse result in the same functional space ; as long as a solution f^0 to the incompressible Navier-Stokes-Fourier system exists, a solution f^ε to (1.2) exists for ε small enough and f^ε converges to f^0 . Both papers rely on the spectral study led by [12, 30] of the inhomogeneous linearized Boltzmann operator in $L_v^2 H_x^s(M^{-1/2})$ which dictates the asymptotic of S^ε and $\varepsilon^{-1} S^\varepsilon Q$. The theory of hydrodynamic limits for smooth solutions of the Boltzmann equation was partially extended to a larger class of Sobolev

spaces with polynomial weights during the last decade: a Cauchy theory close to equilibrium was developed in [17] and their weak compactness with respect to ε was shown in [9]. The strong convergence could not be deduced as in [7, 14] since the spectral decomposition from [12] was not known to hold in the case of polynomial weights. This paper aims at providing such a generalization.

1.2. Statement of the main results. Let us define some notations used in the statement of Theorem 1 and 2. We denote $L^2(m)$ the L^2 Hilbert space associated with the measure $m^2(v)dv$. $\mathcal{B}(X, Y)$ is the space of bounded linear operators from a Banach space X to another one Y . For a linear operator Λ , we denote by $\Sigma(\Lambda)$ its spectrum. If it generates a strongly continuous semigroup, we denote it by S_Λ , and $\Pi_{\Lambda, \lambda}$ is the spectral projector associated with an eigenvalue $\lambda \in \Sigma_d(\Lambda)$, where $\Sigma_d(\Lambda)$ is the discrete spectrum of Λ . Finally, we write $\Delta_a := \{\Re z > a\}$.

We will show that, similarly to the results in [12, 30], when considered as a closed operator in $L^2(M^{-1/2})$ or $L^2(\langle v \rangle^k)$, the semigroup generated by $\mathcal{L} - iv \cdot \xi$ has exponential decay in time (for large frequencies ξ), and splits (for small frequencies ξ) into a first part corresponding to its rightmost eigenvalues, and a remainder that decays exponentially in time. We also give some information on the regularity and asymptotics of the eigenvalues and eigenfunctions for $|\xi| \ll 1$.

Theorem 1. *There exists $k_* > 2$ such that for any fixed $k > k_*$, denoting the spaces $E := L^2(M^{-1/2})$, $\mathbf{E}(k) := L^2(\langle v \rangle^k)$, the operator $\mathcal{L}_\xi := \mathcal{L} - iv \cdot \xi$ is closed in both spaces $\mathbf{E}(k)$ and E for any $\xi \in \mathbb{R}^d$. Furthermore, the following holds:*

(1) - Spectral gaps and expansion of the eigenvalues. *For $\mathbf{r} > 0$ small enough, there exist $\mathbf{a}, \mathbf{b} > 0$ such that, in both spaces,*

$$(1.3) \quad \Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}} = \{\lambda_{-1}(|\xi|), \dots, \lambda_2(|\xi|)\} \subset \Sigma_d(\mathcal{L}_\xi), \quad |\xi| \leq \mathbf{r},$$

$$(1.4) \quad \Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{b}} = \emptyset, \quad |\xi| \geq \mathbf{r},$$

where the eigenvalues λ_j expand as an absolutely converging power series

$$(1.5) \quad \lambda_j(|\xi|) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_j^{(n)} |\xi|^n,$$

with $\lambda_{\pm 1}^{(1)} = \pm i\sqrt{1 + 2/d}$, $\lambda_j^{(1)} = 0$ for $j = 0, 2$, and $\lambda_j^{(2)} < 0$ for $j = -1, \dots, 2$.

(2) - Spectral decomposition and expansion of the projectors. *Denoting the set $U := \{\xi \in \mathbb{R}^d : 0 < |\xi| \leq \mathbf{r}\}$, there exist projectors $\mathcal{P}_j(\xi) \in \mathcal{B}(\mathbf{E}(k), E)$ for any $\xi \in U$ and $j = -1, \dots, 2$, that expand as a power series*

$$(1.6) \quad \mathcal{P}_j(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^n \mathcal{P}_j^{(n)}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} := \frac{\xi}{|\xi|},$$

where the convergence is normal in $\mathcal{B}(\mathbf{E}(k), E)$, uniformly in $\xi \in U$.

For $j = 0, \pm 1$, $\mathcal{P}_j^{(0)}(\tilde{\xi})$ is a projection onto $\mathbb{C}e_j^{(0)}(\tilde{\xi})$, with

$$(1.7) \quad e_0^{(0)}(\tilde{\xi}) = \left(1 - \frac{1}{2}(|v|^2 - d)\right)M,$$

$$(1.8) \quad e_{\pm 1}^{(0)}(\tilde{\xi}) = \left(1 \pm \tilde{\xi} \cdot v + \frac{1}{d}(|v|^2 - d)\right)M,$$

and $\mathcal{P}_2^{(0)}(\tilde{\xi})$ is a projection on $\{c \cdot vM \mid c \cdot \tilde{\xi} = 0\}$, which is spanned by

$$(1.9) \quad e_{2,\ell}^{(0)}(\tilde{\xi}) = C_\ell(\tilde{\xi}) \cdot vM, \quad \ell = 1, \dots, d-1,$$

where $(\tilde{\xi}, C_1(\tilde{\xi}), \dots, C_{d-1}(\tilde{\xi}))$ can be assumed to be any fixed orthonormal basis of \mathbb{R}^d . Furthermore, they satisfy

$$(1.10) \quad \mathcal{L}_\xi \mathcal{P}_j(\xi) = \lambda_j(|\xi|) \mathcal{P}_j(\xi),$$

$$(1.11) \quad \mathcal{P}_j(\xi) \mathcal{P}_\ell(\xi) = 0, \quad j \neq \ell,$$

$$(1.12) \quad \sum_{j=-1}^2 \mathcal{P}_j^{(0)}(\tilde{\xi}) = \Pi_{\mathcal{L},0}, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

(3) - Expression of the projectors. For any $\xi \in U$, any $j = 0, \pm 1$, and any $\ell = 1, \dots, d-1$, there exist functions $e_j(\xi), e_{2,\ell}(\xi) \in E$ and $f_j(\xi), f_{2,\ell}(\xi) \in \mathbf{E}(k)$ such that the projectors write

$$(1.13) \quad \mathcal{P}_j(\xi)g = \langle g, f_j(\xi) \rangle_{\mathbf{E}(k)} e_j(\xi), \quad j = 0, \pm 1,$$

$$(1.14) \quad \mathcal{P}_2(\xi)g = \sum_{\ell=1}^{d-1} \langle g, f_{2,\ell}(\xi) \rangle_{\mathbf{E}(k)} e_{2,\ell}(\xi),$$

$$(1.15) \quad \langle e_\alpha(\xi), f_\beta(\xi) \rangle_{\mathbf{E}(k)} = \delta_{\alpha,\beta},$$

where α and β are any indices among $-1, 0, 1, (2, 1), \dots, (2, d-1)$, and they have the following expansions:

$$(1.16) \quad e_\alpha(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^n e_\alpha^{(n)}(\tilde{\xi}),$$

$$(1.17) \quad f_\alpha(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^n f_\alpha^{(n)}(\tilde{\xi}),$$

where α is any index among $-1, 0, 1, (2, 1), \dots, (2, d-1)$, and the convergence is normal, uniformly in $\xi \in U$, in E and $\mathbf{E}(k)$ respectively.

Remark 1.1. A few precisions are to be made on these results.

- (1) In this theorem, $e_\alpha : U \rightarrow E$, $f_\alpha : U \rightarrow \mathbf{E}(k)$ and $\mathcal{P}_j : U \rightarrow \mathcal{B}(\mathbf{E}(k), E)$ are measurable.

- (2) Using the fact that in the Hilbert space E , $(\mathcal{L}_\xi)^* = \mathcal{L}_{-\xi}$, the relation $O\mathcal{L}_\xi O^{-1} = \mathcal{L}_{O^{-1}\xi}$, where O is any real $d \times d$ orthogonal matrix, and the first order expansion of the eigenvalues, one can show that for any $\xi \in U$ and $j = 0, 2$,

$$\overline{\lambda_1(|\xi|)} = \lambda_{-1}(|\xi|) \text{ and } \lambda_j(|\xi|) \in \mathbb{R}.$$

See the proof of Proposition 3.5 from [12].

- (3) Furthermore, one can deduce an expression of $f_j(\xi)$ in terms of $e_j(\xi)$ using the fact that, in E , $\mathcal{P}_2(\xi)^* = \mathcal{P}_2(-\xi)$, $\mathcal{P}_j(\xi)^* = \mathcal{P}_{-j}(-\xi)$ for $j = 0, \pm 1$, and using the relation

$$\langle f, g \rangle_E = \langle f, g \langle v \rangle^{-2k} M^{-1} \rangle_{\mathbf{E}(k)}.$$

Theorem 2. Under the same assumptions, denoting $\mathcal{E} = E$ or $\mathbf{E}(k)$, there exists constants $C > 0$ and $\gamma \in (0, \mathbf{a})$ such that for any $\xi \in \mathbb{R}^d$, \mathcal{L}_ξ generates on \mathcal{E} a C^0 -semigroup that splits as

$$(1.18) \quad S_{\mathcal{L}_\xi}(t) = \chi(\xi) \sum_{j=-1}^2 e^{t\lambda_j(\xi)} \mathcal{P}_j(\xi) + \mathcal{V}(t, \xi), \quad \xi \neq 0,$$

$$(1.19) \quad S_{\mathcal{L}}(t) = \sum_{j=-1}^2 \mathcal{P}_j^{(0)}(\tilde{\xi}) + \mathcal{V}(t, 0) = \Pi_{\mathcal{L}, 0} + \mathcal{V}(t, 0), \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{S}^{d-1},$$

where we have denoted χ the characteristic function of $\{|\xi| \leq \mathbf{r}\}$, and the remainder \mathcal{V} satisfies

$$(1.20) \quad \mathcal{P}_j(\xi)\mathcal{V}(t, \xi) = \mathcal{V}(t, \xi)\mathcal{P}_j(\xi) = 0,$$

$$(1.21) \quad \|\mathcal{V}(t, \xi)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq C e^{-\gamma t}.$$

In [2, 9, 17, 22, 24, 28, 29, 21], the authors consider the linearized flow S_Λ of some form of the Boltzmann equation near a steady state and show it admits in various weighted Sobolev spaces a splitting

$$(1.22) \quad S_\Lambda(t)f = S_\Lambda(t)\Pi f + O(e^{-\sigma t}\|f - \Pi f\|),$$

where Π is the projection on some finite dimensional Λ -stable subspace (in most cases, the null space of Λ). Such a decomposition was found using the enlargement theory introduced by C. Mouhot [24] then developed by M. Gualdani, S. Mischler and C. Mouhot [17] in various weighted Sobolev spaces, but in the spatially homogeneous case or on the torus, so that Λ has a spectral gap. However, there is no spectral gap on the whole space, so one can study the linearized operator in Fourier space with fixed spatial frequency ξ in order to construct a projector Π satisfying (1.22). Furthermore, the splitting (1.22) allows to develop a Cauchy theory near an equilibrium, but in the context of asymptotic analysis, that is to say when Λ and thus $\Sigma(\Lambda), \Pi, \sigma$ depend on a small parameter ε , one also needs to know their behavior as ε goes to zero (see for instance [3, 7, 8, 9]). This is why we perform a precise study of the spectrum for $|\xi| \ll 1$, and the diffusive limit of the Boltzmann equation requires a second order expansion of the eigenvalues.

1.3. Method of proof and state of the art. Theorem 1 was initially proved in [12] in the space $L^2(M^{-1/2})$. The authors first proved that for some $\delta > 0$, the following equations are equivalent for $|\xi|, |\lambda| \leq \delta$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L} - iv \cdot \xi - \lambda) f &= 0, \\ F(\lambda, \xi) f_0 &= 0,\end{aligned}$$

where f_0 is the projection of f on \mathcal{N} , $f_1 := f - f_0$ is related to f_0 by $f_1 = G(\lambda, \xi) f_0$, and $F(\lambda, \xi) \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$, $G(\lambda, \xi) \in \mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^\perp)$ are smooth in ξ and λ . They then proceed to solve $\det F(\lambda, \xi) = 0$ for $\lambda = \lambda(\xi)$ using the implicit function theorem, exhibit corresponding $f_0(\xi)$, construct the eigenfunctions and then the spectral projectors.

In their proof, the threshold δ was not found using constructive estimates, nor do they prove the existence of a spectral gap for $|\xi|$ bounded away from zero. However, their results hold for a general class of potentials, including hard and Maxwellian potentials with cut-off.

T. Yang and H. Yu [33] have a similar approach and still prove their results in $L^2(M^{-1/2})$, but they cover a broader class of kinetic equations. Furthermore, they prove the existence of a spectral gap for large ξ using a key estimate from [30] and encounter the same difficulties as in this paper: they are able to provide constructive estimates for small and large frequencies, but need a non-constructive argument to deal with intermediate ones.

We also mention [11] and [32] who prove most of these results with similar approaches.

In this paper, we generalize the results from [12, 31] in spaces of the form $L^2(\langle v \rangle^k)$ using a new splitting of the homogeneous operator as well as an “enlargement theorem”, both from [17]. This splitting has the same properties in both Gaussian and polynomial spaces (dissipativity and relative boundedness, regularizing effect, see Lemma 2.3) which allows to treat both cases in a unified framework, and the aforementioned “enlargement theorem” guaranties that the spectral properties (structure of the spectrum and eigenspaces) do not depend on the specific choice of space, be it Gaussian or polynomial. We can therefore rely on previous studies of the Gaussian case when convenient.

As we deal with hard sphere case, the inhomogeneous operator in Fourier space can be seen as a relatively bounded perturbation of the homogeneous operator and thus be studied through classical (analytic) perturbation theory. In particular, all estimates are constructive, except for the exponential decay estimates for large frequencies.

Unlike [12] and [33] who compute the roots of the dispersion relations associated with the linear inhomogeneous Boltzmann equation, we prove that for small ξ , the zero eigenvalue (resp. the null space \mathcal{N}) of the homogeneous operator “splits” into several eigenvalues (resp. an invariant space $\mathcal{N}(\xi)$ isomorphic to \mathcal{N}). We then consider $(\mathcal{L}_\xi)_{|\mathcal{N}(\xi)} \in \mathcal{B}(\mathcal{N}(\xi))$ and straighten $\mathcal{N}(\xi)$ into \mathcal{N} to get a new operator $\tilde{\mathcal{L}}(\xi) \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$ conjugated to $(\mathcal{L}_\xi)_{|\mathcal{N}(\xi)}$ which we study using finite dimensional perturbation theory.

1.4. Outline of the paper. In Section 2, we show using results from [17] that there exist some threshold $k_* > 2$ such that in both spaces $L^2(M^{-1/2})$ and $L^2(\langle v \rangle^k)$ with $k > k_*$, \mathcal{L}_ξ generates a strongly continuous semigroup, satisfies some rotation invariance property and the multiplication operator by v is \mathcal{L}_ξ -bounded. Then, combining results from [17] and [32], we show the existence in both spaces of spectral gaps for small and large ξ : there exists $\mathbf{a}, \mathbf{b} > 0$ such that for large ξ , the spectrum does not meet $\Delta_{-\mathbf{b}}$, and for small ξ , the part $\Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}}$ contains a finite amount of discrete eigenvalues enclosed by some fixed path Γ .

In Section 3, this path allows to transform the eigenvalue problem into an equivalent one on the finite dimensional null-space of \mathcal{L} and in turn derive expansions for the eigenvalues and associated spectral projectors, thus proving Theorem 1.

In Section 4, we prove Theorem 2. The splitting comes from Theorem 1, and the decay estimate from Theorem 5 whose assumptions are obtained using estimates from [32] combined with [17], and the continuity of the resolvent.

We recall in the appendix some results from spectral theory and semigroup theory.

1.5. Notations and definitions.

1.5.1. Function spaces. For any Borel function $m > 0$ and $p \in [1, \infty]$, we define the space $L^p(m)$ as the set of measurable functions $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ such that

$$\|f\|_{L^p(m)} := \|fm\|_{L^p} < \infty.$$

1.5.2. Operator theory. For some given Banach spaces X and Y , we will denote the space of closed linear operators Λ from their domain $D(\Lambda)$ to Y by $\mathcal{C}(X, Y)$. The space of bounded linear operators will be denoted $\mathcal{B}(X, Y)$. For any linear operator Λ , we denote its null space by $N(\Lambda)$ and its range by $R(\Lambda)$.

In particular, we write $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, X)$ and $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$. We will also consider the *resolvent set* $P(\Lambda)$ of Λ which is defined to be the open set of all $z \in \mathbb{C}$ such that $\Lambda - z$ is bijective from $D(\Lambda)$ onto X , and whose inverse is a bounded operator of X . The *resolvent operator* is an analytic function defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Lambda : P(\Lambda) &\rightarrow \mathcal{B}(X) \\ z &\mapsto (z - \Lambda)^{-1}, \end{aligned}$$

and cannot be continued analytically beyond this set. The complement of $P(\Lambda)$ is called the *spectrum* of Λ and is denoted $\Sigma(\Lambda) = \mathbb{C} - P(\Lambda)$, which is therefore the set of all values λ such that $\Lambda - \lambda$ is not boundedly invertible. When a spectral value λ is isolated in the spectrum, or in other words when for some $\varepsilon > 0$ small enough

$$\Sigma(\Lambda) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| < \varepsilon\} = \{\lambda\},$$

we may define the associated *spectral projector*

$$\Pi_{\Lambda, \lambda} := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_\Lambda(z) dz = \text{Res}(\mathcal{R}_\Lambda; \lambda),$$

where Γ is some closed path, encircling λ and only λ exactly once, and that does not meet the spectrum (a circle or any closed loop that can be continuously stretched

within $P(\Lambda)$ into a circle). It is well known that this operator is well defined and is a projector whose range satisfies the following inclusion

$$N(\Lambda - \lambda) \subset R(\Pi_{\Lambda, \lambda}).$$

We call the left-hand side the *geometric eigenspace* and the right-hand side the *algebraic eigenspace*, and their dimensions are called respectively the *geometric* and *algebraic multiplicities*. When the algebraic multiplicity is finite, i.e. $\dim R(\Pi_{\Lambda, \lambda}) < \infty$, $N(\Lambda - \lambda) \neq \{0\}$ and the spectral value λ is called a *discrete eigenvalue*, which we write $\lambda \in \Sigma_d(\Lambda)$.

We will also denote by $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ the set of $d \times d$ real orthogonal matrices, and denote the action of $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ on any function f defined on \mathbb{R}_v^d by

$$(Of)(v) := f(Ov).$$

In particular, if Φ is the multiplication operator by a function $\phi = \phi(v)$, then $O\Phi O^{-1}$ is the multiplication operator by $O\phi$.

1.5.3. *Semigroup theory.* For any $a \in \mathbb{R}$, we write $\Delta_a := \{\Re z > a\}$, and for any \mathcal{C}^0 -semigroup generator Λ , we write its semigroup $S_\Lambda(t)$.

2. GENERAL PROPERTIES OF THE LINEARIZED OPERATOR

The linearized operator \mathcal{L} has been extensively studied in the space $L^2(M^{-1/2})$ by Hilbert [19] and Grad [16], let us recall its main properties.

Theorem 3. *Denote $E = L^2(M^{-1/2})$ and $L = \mathcal{L}|_E$. The operator L is closed in E , self-adjoint, dissipative and densely defined. It splits as*

$$(2.23) \quad L = -\nu + K,$$

where K is compact on E and ν is a continuous function of $v \in \mathbb{R}^d$ defined by

$$\nu(v) := \int_{\mathbb{R}_{v_*}^d \times \mathbb{S}_\sigma^{d-1}} M_* |v - v_*| dv_* d\sigma$$

and satisfying for some $\nu_0, \nu_1 > 0$

$$(2.24) \quad \nu_0 \langle v \rangle \leq \nu(v) \leq \nu_1 \langle v \rangle.$$

There exists a spectral gap for some $\mathbf{a}_0 \in (0, \nu_0)$:

$$\Sigma(L) \cap \Delta_{-\mathbf{a}_0} = \{0\},$$

where $\Delta_{-\mathbf{a}_0} := \{\Re z > -\mathbf{a}_0\}$. The eigenvalue 0 is semi-simple and the null space of L , denoted \mathcal{N} , is spanned by the following basis, orthogonal in E :

$$\begin{cases} \varphi_0(v) = M(v), \\ \varphi_j(v) = v_j M(v), \quad j = 1, \dots, d, \\ \varphi_{d+1}(v) = (|v|^2 - d) M(v). \end{cases}$$

Finally, for any $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, $OL = LO$.

Remark 2.2. *The existence of this spectral gap has originally been proved using Weyl's theorem. However, C. Baranger and C. Mouhot provided in [4, Theorem 1.1] an explicit estimate for \mathbf{a}_0 :*

$$\mathbf{a}_0 \geq \frac{\pi}{48\sqrt{2e}}.$$

Using this decomposition, R. Ellis, M. Pinsky and S. Ukai [12, 30] proved in the space $L^2(M^{-1/2})$ the theorems stated in Section 1.2. However, this decomposition does not have the same nice properties in the larger spaces of the form $L^2(\langle v \rangle^k)$. M. Gualdani, S. Mischler and C. Mouhot introduced in [17] a new decomposition with similar properties which holds in both spaces and is presented in Lemma 2.3.

2.1. Closedness and decomposition of \mathcal{L}_ξ . In this section, we present a decomposition of the linearized operator $\mathcal{L}_\xi = \mathcal{A} + \mathcal{B}_\xi$, where in both spaces $L^2(M^{-1/2})$ and $L^2(\langle v \rangle^k)$, \mathcal{A} boundedly maps its domain to $L^2(M^{-1/2})$, $\mathcal{B}_\xi + \mathbf{a}$ is m -dissipative for some $\mathbf{a} > 0$, and the multiplication operator by v is \mathcal{L}_ξ -bounded.

The following lemma combines several results from [17] that were used to prove the existence of a spectral gap for $\mathcal{L} - v \cdot \nabla_x$ in a large class of Sobolev spaces $W_x^{s,p} W_v^{\sigma,q}$. We focus instead on \mathcal{L}_ξ in L_v^2 spaces, and also show the relative boundedness of the multiplication operator by v .

Lemma 2.3. *There exists some $k_* > 2$ such that for any $k > k_*$, the perturbed linearized Boltzmann operator splits as*

$$\mathcal{L}_\xi = \mathcal{B}_\xi + \mathcal{A} = \mathcal{B} - iv \cdot \xi + \mathcal{A},$$

where, denoting $\mathcal{E} = L^2(M^{-1/2})$ or $L^2(\langle v \rangle^k)$, the operator $\mathcal{A}|_{\mathcal{E}}$ is bounded from \mathcal{E} to $L^2(M^{-1/2})$, $(\mathcal{B}_\xi)|_{\mathcal{E}}$ and thus $(\mathcal{L}_\xi)|_{\mathcal{E}}$ are closed in \mathcal{E} with the common dense domain $\{f \in \mathcal{E} \mid \nu f \in \mathcal{E}\}$.

Furthermore, there exist $C > 0$ and $\mathbf{a}_1 \in (0, \nu_0)$ such that for any $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\xi + \mathbf{a}_1 &\text{ is } m\text{-dissipative,} \\ \|vf\|_{\mathcal{E}} &\leq C(\|\mathcal{L}_\xi f\|_{\mathcal{E}} + \|f\|_{\mathcal{E}}), \quad f \in \text{D}(\mathcal{L}_\xi). \end{aligned}$$

Finally, for any $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$,

$$(2.25) \quad O\mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_{O\xi}O.$$

Proof. In [17, section 4.3.3], the authors introduce a new splitting of the linearized operator \mathcal{L} , which allows to deal with polynomial weights:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{A}_\delta + \mathcal{B}_\delta = \mathcal{A}_\delta + (-\nu + \bar{\mathcal{B}}_\delta), \quad \delta \in (0, 1), \\ \mathcal{A}_\delta f(v) &:= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} \Theta_\delta(M'_* f' + M' f'_* - M f_*) |v - v_*| dv_* d\sigma, \\ \mathcal{B}_\delta f(v) &:= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (1 - \Theta_\delta)(M'_* f' + M' f'_* - M f_*) |v - v_*| dv_* d\sigma, \end{aligned}$$

where $\Theta_\delta = \Theta_\delta(v, v_*, \sigma)$ is some smooth function bounded by one on

$$\{|v| \leq \delta^{-1}, 2\delta \leq |v - v_*| \leq \delta^{-1}, |\cos \theta| \leq 1 - 2\delta\},$$

and supported in

$$\{|v| \leq 2\delta^{-1}, \delta \leq |v - v_*| \leq 2\delta^{-1}, |\cos \theta| \leq 1 - \delta\},$$

where $\cos \theta := \sigma \cdot (v - v_*) / |v - v_*|$. According to [17, Lemma 4.12, (4.40)], $\bar{\mathcal{B}}_\delta$ satisfies the estimate

$$(2.26) \quad \|\bar{\mathcal{B}}_\delta f\|_{L^2(\langle v \rangle^{q\nu-1/2})} \leq b_\delta(q-1/2) \|f\|_{L^2(\langle v \rangle^{q\nu^{1/2}})}, \quad q > 5/2,$$

$$b_\delta(q) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} b(q) := \frac{4}{\sqrt{(q+1)(q-2)}},$$

$$\|\bar{\mathcal{B}}_\delta\|_{\mathcal{B}(L^2(M^{-1/2}))} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Furthermore, using the Carleman representation of \mathcal{A}_δ (see [10]), this operator writes for some kernel $k_\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{A}_\delta f(v) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} k_\delta(v, v_*) f(v_*) dv dv_*.$$

We consider in this proof k_* such that $b(k_* - 1/2) = 1$ and fix some $k > k_*$ so that $b(k - 1/2) < 1$. We also consider $\delta > 0$ to be small enough so that

$$\mathbf{a}_1 := \nu_0 - \|\bar{\mathcal{B}}_\delta\|_{\mathcal{B}(L^2(M^{-1/2}))} > 0, \quad \text{if } \mathcal{E} = L^2(M^{-1/2}),$$

$$\mathbf{a}_1 := \nu_0(1 - b_\delta(k - 1/2)) > 0, \quad \text{if } \mathcal{E} = L^2(\langle v \rangle^k).$$

Step 1: Boundedness and closedness at $\xi = 0$. As \mathcal{A}_δ is an integral operator with a bounded and compactly supported kernel, it is clear that for any of the two spaces $\mathcal{E} = L^2(M^{-1/2}), L^2(\langle v \rangle^k)$, this operator is bounded from \mathcal{E} to $L^2(M^{-1/2})$.

When $\mathcal{E} = L^2(M^{-1/2})$, \mathcal{B}_δ is the sum of a closed and a bounded operator, so it is closed and densely defined.

When $\mathcal{E} = L^2(\langle v \rangle^k)$, note¹ that $\nu_0 > 1$, which combined with (2.26) implies that $\bar{\mathcal{B}}_\delta$ is ν -bounded, with ν -bound equal to $b_\delta(k) < 1$. Hence \mathcal{B}_δ is closed on $L^2(\langle v \rangle^k)$ by [20, Theorem IV-1.1].

In both cases, \mathcal{B}_δ and thus \mathcal{L} are closed and defined on the dense domain

$$D(\mathcal{B}_\delta) = D(\mathcal{L}) = \{f \in \mathcal{E} \mid \nu f \in \mathcal{E}\}.$$

Step 2: Dissipativity estimates. By the definition of \mathbf{a}_1 , $\mathcal{B}_\delta + \mathbf{a}_1$ is dissipative on $L^2(M^{-1/2})$.

In the polynomial space, we have from (2.26) that

$$\left| \langle \bar{\mathcal{B}}_\delta f, f \rangle_{L^2(\langle v \rangle^k)} \right| \leq b_\delta(k-1/2) \|\nu^{1/2} f\|_{L^2(\langle v \rangle^k)}^2.$$

Thus, by the definition of \mathbf{a}_1 , we have

$$\langle \mathcal{B}_\delta f, f \rangle_{L^2(\langle v \rangle^k)} \leq (1 - b_\delta(k)) \|\nu^{1/2} f\|_{L^2(\langle v \rangle^k)}^2 \leq -\mathbf{a}_1 \|f\|_{L^2(\langle v \rangle^k)}^2,$$

which yields the dissipativity of $\mathcal{B}_\delta + \mathbf{a}_1$ on $L^2(\langle v \rangle^k)$.

¹see for instance [17, Remark 4.1]

Step 3: Relative bound and closedness of \mathcal{L}_ξ and \mathcal{B}_ξ . First, let us show that $\nu + iv \cdot \xi$ is \mathcal{L}_ξ -bounded uniformly in $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \|(\nu + iv \cdot \xi)f\|_{\mathcal{E}} &\leq \|\mathcal{B}_\xi f\|_{\mathcal{E}} + \|\overline{\mathcal{B}}_\delta f\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \|\mathcal{B}_\xi f\|_{\mathcal{E}} + \beta \|\nu f\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \|\mathcal{B}_\xi f\|_{\mathcal{E}} + \beta \|(\nu + iv \cdot \xi)f\|_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

where $\beta = b_\delta(k)$ for $\mathcal{E} = L^2(\langle v \rangle^k)$, and $\beta = \|\overline{\mathcal{B}}_\delta\|_{\mathcal{B}(L^2(M^{-1/2}))}$ for $\mathcal{E} = L^2(M^{-1/2})$. In both cases, we assume δ to be small enough so that $\beta \in (0, 1)$, which allows to write

$$\|(\nu + iv \cdot \xi)f\|_{\mathcal{E}} \leq (1 - \beta)^{-1} \|\mathcal{B}_\xi f\|_{\mathcal{E}}.$$

We can now show the perturbation v is \mathcal{L}_ξ -bounded:

$$\begin{aligned} \|vf\|_{\mathcal{E}} &\leq \nu_0^{-1} \|(\nu + iv \cdot \xi)f\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \frac{1}{\nu_0(1 - \beta)} \|\mathcal{B}_\xi f\|_{\mathcal{E}} \\ &\leq \frac{1}{\nu_0(1 - \beta)} (\|\mathcal{L}_\xi f\|_{\mathcal{E}} + \|\mathcal{A}_\delta f\|_{\mathcal{E}}). \end{aligned}$$

We thus have a control $\|vf\|_{\mathcal{E}} \leq C(\|\mathcal{L}_\xi f\|_{\mathcal{E}} + \|f\|_{\mathcal{E}})$, where $C = C(\mathcal{E}, \delta)$. Thanks to this uniform bound, we know (again, by [20, IV-1.1]) that for any $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ and $\xi \in \mathbb{R}^d$ satisfying $|\xi - \xi_0| < 1/C$, \mathcal{L}_ξ is closed if \mathcal{L}_{ξ_0} is. Since \mathcal{L} is closed, we deduce that \mathcal{L}_ξ is closed for all $\xi \in \mathbb{R}^d$. By the same reasoning and the second line of the previous sequence of estimates, we can show that \mathcal{B}_ξ is closed for all $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Finally, $\mathcal{B}_\xi + \mathbf{a}_1$ is m-dissipative because \mathcal{B}_ξ is boundedly invertible:

$$\mathcal{B}_\xi = (-1 + \overline{\mathcal{B}}_\delta(\nu + iv \cdot \xi)^{-1})(\nu + iv \cdot \xi),$$

where $\|\overline{\mathcal{B}}_\delta(\nu + iv \cdot \xi)^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq \beta \|\frac{\nu}{\nu + iv \cdot \xi}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} = \beta < 1$. Lemma 2.3 is proved. \square

Notations 2.4. *In the rest of this paper, we fix some $k > k_*$ and denote the functional spaces*

$$\mathbf{E}(k) := L^2(\langle v \rangle^k), \quad E := L^2(M^{-1/2}), \quad \mathcal{E} = E \text{ or } \mathbf{E}(k).$$

When considering \mathcal{L}_ξ on one of these spaces, we denote its resolvents

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda, \xi) &:= (\lambda - \mathcal{L}_\xi)^{-1}, \\ \mathcal{R}(\lambda) &:= (\lambda - \mathcal{L})^{-1} = \mathcal{R}(\lambda, 0). \end{aligned}$$

We also fix some $\mathbf{a} \in (0, \min\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1\})$, where \mathbf{a}_0 is that of Theorem 3 and \mathbf{a}_1 of Lemma 2.3.

2.2. Spectral gap properties of \mathcal{L}_ξ . In this section, we show the existence of spectral gaps uniform in $\xi \in \mathbb{R}^d$. More precisely, for small ξ , $\Delta_{-\mathbf{a}} := \{\Re z > -\mathbf{a}\}$ contains a finite amount of eigenvalues converging to zero, and lying in the interior of a fixed closed path Γ . For large ξ , the half plane $\Delta_{-\mathbf{b}} = \{\Re z > -\mathbf{b}\}$ contains no spectral value, for some constant $\mathbf{b} > 0$.

After establishing some basic results on the resolvent $\mathcal{R}(\lambda, \xi)$ (Proposition 2.5), we prove a spectral gap property (Proposition 2.6) using the decomposition from Theorem 3 for the case $\mathcal{E} = E$ and an enlargement result from [17] to extend it to the case $\mathcal{E} = \mathbf{E}(k)$. The eigenvalues on the right-hand side of this gap are shown to be separated from the rest of the spectrum by a closed path Γ (Lemma 2.6). We conclude by proving the spectral gap property for large ξ .

Proposition 2.5. *Let \mathcal{E} be one of the spaces E or $\mathbf{E}(k)$. For any $\lambda_0 \in \mathbf{P}(\mathcal{L}_{\xi_0})$, we have that $v\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ and the following expansion around (λ_0, ξ_0) holds:*

$$(2.27) \quad \mathcal{R}(\lambda, \xi) = \mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\lambda_0 - \lambda)\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0) + iv \cdot (\xi_0 - \xi)\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0) \right]^n,$$

whenever $|\xi - \xi_0| \|v\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + |\lambda - \lambda_0| \|\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} < 1$. In particular, the resolvent is continuous on the following set, which is open:

$$\{(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d \mid \lambda \in \mathbf{P}(\mathcal{L}_\xi)\}.$$

Proof. Recall that for some $C > 0$, we have

$$\|vf\|_{\mathcal{E}} \leq C (\|\mathcal{L}_\xi f\|_{\mathcal{E}} + \|f\|_{\mathcal{E}}), \quad f \in \mathbf{D}(\mathcal{L}_\xi).$$

We deduce that for any $(\lambda_0, \xi_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d$ such that $\lambda_0 \in \mathbf{P}(\mathcal{L}_{\xi_0})$

$$\|v\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0)f\|_{\mathcal{E}} \leq C (\|\mathcal{L}_{\xi_0}\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0)f\|_{\mathcal{E}} + \|\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0)f\|_{\mathcal{E}}).$$

Rewriting $\mathcal{L}_{\xi_0}\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0) = -1 + \lambda_0\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0)$, we have for some constant $C' = C'(\lambda_0, \xi_0)$ that

$$(2.28) \quad \|v\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0)f\|_{\mathcal{E}} \leq C' \|f\|_{\mathcal{E}}.$$

This means that $v\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Now, rewrite the resolvent as

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda, \xi) &= (\lambda - \mathcal{L}_\xi)^{-1} \\ &= (\lambda_0 - \mathcal{L}_{\xi_0} - (\lambda_0 - \lambda) - iv \cdot (\xi_0 - \xi))^{-1} \\ &= \mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0) (1 - (\lambda_0 - \lambda)\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0) - i(\xi_0 - \xi) \cdot v\mathcal{R}(\lambda_0, \xi_0))^{-1} \end{aligned}$$

whenever (λ, ξ) is close enough to (λ_0, ξ_0) . In such a case, we have the Neumann expansion (2.27). \square

The following theorem comes from the ‘‘enlargement/factorization theory’’ initiated by C. Mouhot [24] and developed in [17, 23], which constitutes a breakthrough as it allows to derive spectral information on a linear operator Λ in a large space from information in a smaller one, on which Λ is usually well understood. Such results allowed to generalize a quantitative exponential rate of convergence to equilibrium for the Boltzmann equation in various settings (homogeneous or inhomogeneous,

with or without angular cutoff, with weights ranging from Gaussian to polynomial) in [1, 2, 9, 17, 18, 22, 24, 28, 29].

Proposition 2.6. Denote $L_\xi = (\mathcal{L}_\xi)|_E$ and $\mathbf{L}_\xi = (\mathcal{L}_\xi)|_{\mathbf{E}(k)}$.

(1) For any $\xi \in \mathbb{R}^d$, the following set consists of a finite amount of discrete eigenvalues:

$$D(\xi) := \Sigma(L_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}} = \Sigma(\mathbf{L}_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}}.$$

(2) for any $\lambda \in D(\xi)$, we have

$$\begin{aligned} (\Pi_{\mathbf{L}_\xi, \lambda})|_E &= \Pi_{L_\xi, \lambda}, \\ \mathbf{R}(\Pi_{\mathbf{L}_\xi, \lambda}) &= \mathbf{R}(\Pi_{L_\xi, \lambda}), \\ \mathbf{N}(\mathbf{L}_\xi - \lambda) &= \mathbf{N}(L_\xi - \lambda), \end{aligned}$$

and the following factorization formula holds on $\overline{\Delta_{-\mathbf{a}}} - D(\xi)$:

$$(2.29) \quad \mathcal{R}_{\mathbf{L}_\xi} = \mathcal{R}_{\mathcal{B}_\xi} + \mathcal{R}_{L_\xi} \mathcal{A} \mathcal{R}_{\mathcal{B}_\xi},$$

(3) for any $r > 0$, there exists a $T = T(r) > 0$ such that

$$(2.30) \quad D(\xi) \subset [-\mathbf{a}, 0] + i[-T, T], \quad |\xi| \leq r.$$

Remark 2.7. The previous proposition means that $\mathbf{P}(\mathcal{L}_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}}$, $\Pi_{\mathcal{L}_\xi, \lambda}$, $\mathbf{R}(\Pi_{\mathcal{L}_\xi, \lambda})$ and $\mathbf{N}(\mathcal{L}_\xi - \lambda)$ can be considered without ambiguity on the space we are working with (the spectral projectors can be restricted to E or extended to $\mathbf{E}(k)$ by density).

Proof of Proposition 2.6. This is a direct application of [17, Theorem 2.1] whose assumptions are met by Lemma 2.3, except for the fact that $\Sigma(L_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}}$ is made up of a finite amount of discrete eigenvalues, which is proven below.

For any $\lambda \in \Delta_{-\nu_0}$ such that $\|K\mathcal{R}_{-(\nu+iv\cdot\xi)}(\lambda)\|_{\mathcal{B}(E)} < 1$, with K from Theorem 3, the resolvent can be factored as

$$(2.31) \quad \mathcal{R}_{L_\xi}(\lambda) = \mathcal{R}_{-(\nu+iv\cdot\xi)}(\lambda) (1 - K\mathcal{R}_{-(\nu+iv\cdot\xi)}(\lambda))^{-1}.$$

The following lemma from S. Ukai [30, Lemma 4.4.1] allows to get such estimates for $K\mathcal{R}_{-(\nu+iv\cdot\xi)}$.

Lemma 2.8. For any $\delta > 0$, we have

$$(2.32) \quad \sup_{\sigma \geq -\nu_0 + \delta} \|K\mathcal{R}_{-(\nu+iv\cdot\xi)}(\sigma + i\tau)\|_{\mathcal{B}(E)} \xrightarrow{|\xi|+|\tau| \rightarrow \infty} 0.$$

Therefore, by estimate (2.32), for any $r > 0$, there exists $T = T(r) > 0$ such that

$$(2.33) \quad \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}} \cap \{\Im z \geq T\} \subset \mathbf{P}(L_\xi)$$

whenever $|\xi| \leq r$. Furthermore, as L is a non-positive self-adjoint operator according to Theorem 3, and $iv \cdot \xi$ is skew-symmetric, for any $|\xi| \leq r$,

$$(2.34) \quad \Sigma(L_\xi) \subset (-\infty, 0] + i[-T, T].$$

Combining (2.33) and (2.34), we have for any $|\xi| \leq r$

$$\Sigma(L_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}} \subset [-\mathbf{a}, 0] + i[-T, T].$$

However, as L_ξ is the sum of a compact operator and the multiplication operator by $\nu + iv \cdot \xi$, whose range does not meet $\overline{\Delta_{-\mathbf{a}}}$, [20, Theorem IV-5.26] tells us that $\Sigma(L_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}} \subset \Sigma_d(L_\xi)$.

In conclusion, $\Sigma(L_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}}$ is a compact discrete set, thus finite, which yields the conclusion. \square

Lemma 2.9. *For any $r_* > 0$, there exists $\mathbf{b}_* \in (0, \nu_0)$ such that*

$$\Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{b}^*} = \emptyset, \quad |\xi| \geq r_*.$$

Proof. Once again, we can consider the case $\mathcal{E} = E$. By (2.32), for some large enough $R_* > 0$, we have that $\Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}} = \emptyset$ whenever $|\xi| \geq R_*$. Consider now $r_* > 0$ and the sets

$$\begin{aligned} X &:= \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d \mid \lambda \in \Sigma(\mathcal{L}_\xi), \lambda \in \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}}, r_* \leq |\xi| \leq R_*\}, \\ Y &:= \{z \mid \Re z \geq 0\} \times \{\xi \mid r_* \leq |\xi| \leq R_*\}. \end{aligned}$$

If we can show that X is compact and does not meet Y , then we shall have the conclusion with $\mathbf{b}_* := \text{dist}(X, Y) > 0$.

Step 1: Compactness of X . This set is closed by Proposition 2.5. Arguing as in the proof of Proposition 2.6, there exists a $T > 0$ such that, for any $|\xi| \leq R_*$,

$$\overline{\Delta_{-\mathbf{a}}} \cap \{|\Im z| \geq T\} \subset \text{P}(L_\xi).$$

Thus X is compact because it is closed and contained in the bounded set

$$[-\mathbf{a}, 0] + i[-T, T] \times \{r_* \leq |\xi| \leq R_*\}.$$

Step 2: X does not meet Y . We know that X is made up of pairs (λ, ξ) such that $\lambda \in \Sigma_d(L_\xi)$ by Proposition 2.6, let us now show that for any $(\lambda, \xi) \in X$, we have $\Re \lambda < 0$. As \mathcal{L}_ξ is dissipative, it is enough to show that it has no eigenvalue in $i\mathbb{R}$ for $\xi \neq 0$. Let us argue by contradiction and consider an eigenvalue $i\tau \in i\mathbb{R}$ and an associated (non-zero) eigenfunction decomposed $f = f_0 + f_1 \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$.

Suppose $f_1 \neq 0$. As $\Re \langle \mathcal{L}_\xi f, f \rangle \leq -\mathbf{a}_0 \|f_1\|_E^2 < 0$ by the coercivity of \mathcal{L} on \mathcal{N}^\perp , and $\Re \langle \mathcal{L}_\xi f, f \rangle = \Re (i\tau \|f\|_E^2) = 0$ because f is an eigenfunction, we get a contradiction, therefore $f \in \mathcal{N}$. But this would mean that $\mathcal{L}_\xi f = -iv \cdot \xi f = i\tau f$, which is impossible as $f \neq 0$ and $\xi \neq 0$. \square

3. THE EIGEN PROBLEM FOR SMALL ξ

We show in this section that for small ξ , the eigenvalue 0 of the unperturbed operator \mathcal{L} splits into several semi-simple eigenvalues $\lambda_{-1}(\xi), \dots, \lambda_2(\xi)$ of the perturbed operator \mathcal{L}_ξ . We also show that these eigenvalues, corresponding spectral projectors and eigenfunctions have Taylor expansions in $|\xi|$ near $|\xi| = 0$.

We rely mostly on perturbation theory and draw inspiration from Kato's *reduction process* [20, Section II-2.3]: considering $\mathcal{P}(\xi) = \sum \Pi_{\mathcal{L}_\xi, \lambda}$, where the sum is taken over all eigenvalues λ in $\Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}}$, and $\mathcal{U}(\xi)$ an isomorphism of \mathcal{E} mapping \mathcal{N} onto $\text{R}(\mathcal{P}(\xi))$, we have

$$\Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}} = \Sigma \left((\mathcal{L}_\xi)_{|\text{R}(\mathcal{P}(\xi))} \right) = \Sigma \left(\mathcal{U}(\xi)^{-1} \mathcal{L}_\xi \mathcal{U}(\xi)|_{\mathcal{N}} \right).$$

The eigenproblem is thus reduced to the one involving the operator $\mathcal{U}(\xi)^{-1}\mathcal{L}_\xi\mathcal{U}(\xi)$ on the finite dimensional space \mathcal{N} .

In the following, we present Taylor expansions of $\mathcal{P}(\xi)$ (Lemma 3.11) and $\mathcal{U}(\xi)$ (Lemma 3.12). We then define the auxiliary operator

$$\tilde{\mathcal{L}}(\xi) := \frac{1}{|\xi|}\mathcal{U}^{-1}(\xi)\mathcal{L}_\xi\mathcal{U}(\xi)|_{\mathcal{N}} \in \mathcal{B}(\mathcal{N}),$$

show we can assume $\xi = (r, 0, \dots, 0)$, and give a Taylor expansion (Lemmas 3.13 and 3.14) so that we may use Kato's theory to solve our eigenproblem.

Notations 3.10. We will denote the spectral projector on the null space of \mathcal{L} by

$$(3.35) \quad \mathbf{P} := \Pi_{\mathcal{L},0}.$$

Lemma 3.11. There exists $\mathbf{r} > 0$ such that, for $|\xi| \leq \mathbf{r}$, the projector

$$(3.36) \quad \mathcal{P}(\xi) := \sum_{\lambda \in D} \Pi_{\mathcal{L}_\xi, \lambda},$$

where $D := \Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}}$, expands in $\mathcal{B}(\mathcal{E})$:

$$\mathcal{P}(\xi) = \mathbf{P} + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi|^n \mathcal{P}^{(n)}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} := \xi/|\xi|,$$

where the convergence is normal in $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, uniformly in $|\xi| \leq \mathbf{r}$, and

$$\mathcal{P}^{(1)}(\tilde{\xi}) = i\mathbf{P}v \cdot \tilde{\xi}\mathcal{S} + i\mathcal{S}v \cdot \tilde{\xi}\mathbf{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}),$$

where \mathcal{S} is the reduced resolvent of \mathcal{L} at $\lambda = 0$ (see (A.45) for the definition). Furthermore, $\mathcal{P}(\xi)|_{\mathcal{E}}$ and $\mathbf{R}(\mathcal{P}(\xi))$ do not depend on the choice of space $\mathcal{E} = E$ or $\mathcal{E} = \mathbf{E}(k)$.

Proof. Consider the closed curve

$$\Gamma := \partial([- \mathbf{a}, 0] + i[-T, T]),$$

where T is that of Lemma 2.6 for $r = 1$. Choose some $\mathbf{r} \in (0, 1)$ such that

$$\sup_{\lambda \in \Gamma} \|v\mathcal{R}(\lambda)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} < \frac{1}{\mathbf{r}},$$

where the left-hand side is finite as $\Sigma(\mathcal{L}) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{a}}} = \{0\}$ in virtue of Theorem 3 and Proposition 2.6. The following series thus converges normally in $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, uniformly in $(\lambda, \xi) \in \Gamma \times \{\xi : |\xi| \leq \mathbf{r}\}$:

$$\mathcal{R}(\lambda, \xi) = \mathcal{R}(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^n \left(-iv \cdot \tilde{\xi} \mathcal{R}(\lambda) \right)^n.$$

In particular, for any $|\xi| \leq \mathbf{r}$, Γ does not meet $\Sigma(\mathcal{L}_\xi)$ and encloses the eigenvalues in $\Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}}$. By integrating this series along $\lambda \in \Gamma$, we get the expansion of $\mathcal{P}(\xi)$. The expression of the coefficients comes from the residue Theorem and the fact that $\lambda = 0$ is a semi-simple eigenvalue of $\mathcal{R}(\lambda)$, combined with the expansion (A.44). The last point of the lemma comes from point 2. of Proposition 2.6. \square

Lemma 3.12. *There exists $\mathbf{r} > 0$ and a family of invertible maps $\mathcal{U}(\xi) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ for any $|\xi| \leq \mathbf{r}$ such that $\mathcal{U}(\xi)$ maps $\mathcal{N} = \mathbf{R}(\mathbf{P})$ onto $\mathbf{R}(\mathcal{P}(\xi))$, and $\mathcal{U}(\xi)|_{\mathcal{E}}$ does not depend on the choice $\mathcal{E} = E$ or $\mathcal{E} = \mathbf{E}(k)$. Furthermore, they follow the expansion*

$$(3.37) \quad \mathcal{U}(\xi) = \text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi|^n \mathcal{U}^{(n)}(\tilde{\xi}),$$

where the convergence is normal in $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, uniformly in $|\xi| \leq \mathbf{r}$, and

$$\mathcal{U}^{(1)}(\tilde{\xi}) = i\mathbf{P}v \cdot \tilde{\xi}\mathcal{S} - i\mathcal{S}v \cdot \tilde{\xi}\mathbf{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}),$$

where \mathcal{S} is the reduced resolvent of \mathcal{L} at $\lambda = 0$ (see (A.45) for the definition).

Proof. Kato's process [20, Section I-4.6] shows that whenever two bounded projectors P and Q are such that $\|P - Q\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} < 1$, we can define an invertible map U satisfying the relation $UPU^{-1} = Q$ by

$$U = U'(1 - R)^{-1/2} = (1 - R)^{-1/2}U'$$

where we have noted

$$\begin{aligned} R &= (P - Q)^2, \\ (1 - R)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-R)^n, \\ U' &= QP + (1 - Q)(1 - P). \end{aligned}$$

By assuming $\mathbf{r} > 0$ to be small enough so that $\|\mathcal{P}(\xi) - \mathbf{P}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} < 1$ whenever $|\xi| \leq \mathbf{r}$, we define this way $\mathcal{U}(\xi) = U$ with $P = \mathbf{P}$ and $Q = \mathcal{P}(\xi)$. The existence of the expansion comes from the expansion of $\mathcal{P}(\xi)$, and the coefficients can be computed from the latter, using the fact that $\mathbf{P}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathbf{P} = 0$.

The fact that $\mathcal{U}(\xi)|_{\mathcal{E}}$ does not depend on the choice of \mathcal{E} comes from the last point of Lemma 3.11. \square

Lemma 3.13. *The reduced operator defined by*

$$\tilde{\mathcal{L}}(\xi) := \frac{1}{|\xi|} \mathcal{U}(\xi)^{-1} \mathcal{L}_{\xi} \mathcal{U}(\xi)|_{\mathcal{N}} \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$$

does not depend on the initial choice of space $\mathcal{E} = E, \mathbf{E}(k)$, and has the expansion

$$(3.38) \quad \tilde{\mathcal{L}}(\xi) = -i\mathbf{P}\tilde{\xi} \cdot v + |\xi| \mathbf{P}\tilde{\xi} \cdot v \mathcal{S}\tilde{\xi} \cdot v + \sum_{n=2}^{\infty} |\xi|^n \tilde{\mathcal{L}}^{(n)}(\tilde{\xi}),$$

where the convergence is normal uniformly in $|\xi| \leq \mathbf{r}$.

Furthermore, for any $|\xi| \leq \mathbf{r}$, its spectrum is related to the one of \mathcal{L}_{ξ} by

$$(3.39) \quad \Sigma(\mathcal{L}_{\xi}) \cap \Delta_{-\mathbf{a}} = \Sigma\left(|\xi| \tilde{\mathcal{L}}(\xi)\right).$$

Proof. By Lemmas 3.11 and 3.12, the operator $\tilde{\mathcal{L}}(\xi)$ is well defined for $\xi \neq 0$, maps \mathcal{N} onto itself, and does not depend on the choice of space \mathcal{E} . As $\mathcal{U}(\xi)$ has a Taylor expansion around $\xi = 0$ in $|\xi|$, we just need to check that the same is true for $\frac{1}{|\xi|} \mathcal{L}_{\xi} \mathcal{P}(\xi)$.

For the same reason as in Proposition 3.11, the series

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{P}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma z \mathcal{R}(z, \xi) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^n}{2i\pi} \int_\Gamma z \mathcal{R}(z) \left(-iv \cdot \tilde{\xi} \mathcal{R}(z) \right)^n dz,$$

converges normally in $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ for $|\xi| \leq \mathbf{r}$ small enough. Using the residue Theorem, the first terms are

- for $|\xi|^0$: 0, because 0 is a semi-simple eigenvalue of \mathcal{L} , and thus a simple pole of $\mathcal{R}(z)$,
- for $|\xi|^1$: $-i\mathbf{P}v \cdot \tilde{\xi} \mathbf{P}$,
- for $|\xi|^2$: $\left(\mathbf{P}v \cdot \tilde{\xi} \right)^2 \mathcal{S} + \mathcal{S} \left(v \cdot \tilde{\xi} \mathbf{P} \right)^2$.

We get (3.38) by combining this expansion with (3.37).

Finally, as Γ circles the eigenvalues in $\Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}}$ and $\mathcal{P}(\xi)$ is the spectral projector associated with them, we have $\Sigma \left((\mathcal{L}_\xi)_{\mathbb{R}(\mathcal{P}(\xi))} \right) = \Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}}$ according to [20, Theorem III-6.17], and (3.39) holds as $\mathcal{U}(\xi)$ is an isomorphism mapping \mathcal{N} onto $\mathbb{R}(\mathcal{P}(\xi))$. \square

Before we prove Theorem 1, we need the following lemma that allows to assume ξ to be of the form $(r, 0, \dots, 0)$ where $r \in [0, \mathbf{r}]$, and to deal with the fact that we do not know whether or not the eigenvalues λ_0 and λ_2 of this theorem are distinct.

Lemma 3.14. *For $0 < |\xi| \leq \mathbf{r}$ and any $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ such that $O\tilde{\xi} = (1, 0, \dots, 0)$,*

$$(3.40) \quad O\tilde{\mathcal{L}}(\xi) = \tilde{\mathcal{L}}(|\xi|, 0, \dots, 0)O.$$

Furthermore, there exist $\tilde{\lambda}_2(r) \in \mathbb{C}$ and a 3×3 matrix $A(r)$ such that the operator $\tilde{\mathcal{L}}(r) := \tilde{\mathcal{L}}(r, 0, \dots, 0)$ writes in the basis $\{\varphi_2, \dots, \varphi_d, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_{d+1}\}$

$$(3.41) \quad \tilde{\mathcal{L}}(r) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_2(r) \text{Id}_{d-1} & \text{O}_{(d-1) \times 3} \\ \text{O}_{3 \times (d-1)} & A(r) \end{pmatrix}.$$

Proof. Recall that whenever $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ is such that $O\tilde{\xi} = (1, 0, \dots, 0)$, we have the relation $O\mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_{(|\xi|, 0, \dots, 0)}O$. As $\mathcal{R}(z, \xi)$, $\mathcal{P}(\xi)$, $\mathcal{U}(\xi)$ and $\tilde{\mathcal{L}}(\xi)$ are constructed from \mathcal{L}_ξ , (3.40) holds.

Step 1: Block decomposition. Let $j \in \{2, \dots, d\}$ and $k \neq j$. Consider the orthogonal symmetry $O : v_j \leftrightarrow -v_j$. Noting that $O\tilde{\mathcal{L}}(r) = \tilde{\mathcal{L}}(r)O$ and $O\varphi_j = -\varphi_j$, we have

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\mathcal{L}}(r)\varphi_j, \varphi_k \right\rangle_{\mathcal{E}} &= \left\langle O\tilde{\mathcal{L}}(r)\varphi_j, O\varphi_k \right\rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \left\langle \tilde{\mathcal{L}}(r)O\varphi_j, O\varphi_k \right\rangle_{\mathcal{E}} \\ &= - \left\langle \tilde{\mathcal{L}}(r)\varphi_j, \varphi_k \right\rangle_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Therefore, $\langle \tilde{\mathcal{L}}(r)\varphi_j, \varphi_k \rangle_{\mathcal{E}} = 0$, and similarly $\langle \tilde{\mathcal{L}}(r)\varphi_k, \varphi_j \rangle_{\mathcal{E}} = 0$. We conclude that $\tilde{\mathcal{L}}(r)$ has the matrix representation

$$\begin{pmatrix} B(r) & O_{(d-1) \times 3} \\ O_{3 \times (d-1)} & A(r) \end{pmatrix},$$

where $B(r)$ is some diagonal $(d-1) \times (d-1)$ matrix.

Step 2: The diagonal block. Consider the orthogonal symmetry $O : v_j \leftrightarrow v_{j+1}$ where $j \in \{2, \dots, d-1\}$. Noting that $O\tilde{\mathcal{L}}(r) = \tilde{\mathcal{L}}(r)O$, we have

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{L}}(r)\varphi_j, \varphi_j \rangle_{\mathcal{E}} &= \langle O\tilde{\mathcal{L}}(r)\varphi_j, O\varphi_j \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle \tilde{\mathcal{L}}(r)O\varphi_j, O\varphi_j \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle \tilde{\mathcal{L}}(r)\varphi_{j+1}, \varphi_{j+1} \rangle_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

We then conclude to (3.41) by induction on j . \square

Proof of Theorem 1. The first steps of the proof rely on the following formulas which come from (3.38) and (3.41)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(r) &= \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_2(r)\text{Id}_2 & O_3 \\ O_2 & A(r) \end{pmatrix} \\ &= -i\mathbf{P}v_1 + r\mathbf{P}v_1\mathcal{S}v_1 + o(r). \end{aligned}$$

Step 1: The multiple eigenvalue. The operator $\tilde{\mathcal{L}}(r)$ has an obvious $(d-1)$ -dimensional eigenvalue $\tilde{\lambda}_2(r)$. The corresponding eigenvectors are $\varphi_2, \dots, \varphi_d$, and as they are normalized for the inner product of E , we have

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_2(r) &= -i\langle v_1\varphi_2, \varphi_2 \rangle_E + r\langle \mathcal{S}v_1\varphi_2, v_1\varphi_2 \rangle_E + o(r) \\ &= r\langle \mathcal{S}v_1\varphi_2, v_1\varphi_2 \rangle_E + o(r), \end{aligned}$$

because $v_1\varphi_2^2 M^{-1}(v)$ is odd in v_1 . The first order derivative $\langle \mathcal{S}v_1\varphi_2, v_1\varphi_2 \rangle_E$ is negative because $v_1\varphi_2 \notin \mathcal{N}$ and $\langle \mathcal{S}f, f \rangle_E \leq -\mathbf{a}\|f\|_E^2$ for any $f \in \mathcal{N}^\perp$.

Step 2: The simple eigenvalues. We are now going to investigate the eigenvalues of $\tilde{\mathcal{L}}(r)$ on the subspace $X := \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{d+1}\}$, that is to say, we are going to study $A(r)$. We have that

$$A(r) = -i\mathbf{P}v_1 + r\mathbf{P}v_1\mathcal{S}v_1 + o(r) \text{ on } X.$$

The matrix representation of $A(0)$ is

$$A(0) = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2/d} \\ 0 & \sqrt{2/d} & 1 \end{pmatrix}.$$

One can show that $A(0)$ is diagonalizable with the following eigenvalues and corresponding eigenvectors

$$\begin{aligned} i\sqrt{1+2/d} & \quad \psi_{-1} = \left(1 + v_1 + \frac{1}{d}(|v|^2 - d)\right) M, \\ 0 & \quad \psi_0 = \left(1 - \frac{1}{2}(|v|^2 - d)\right) M, \\ -i\sqrt{1+2/d} & \quad \psi_1 = \left(1 - v_1 + \frac{1}{d}(|v|^2 - d)\right) M. \end{aligned}$$

By [20, Theorem II-5.4], $A(r)$ is diagonalizable with three distinct simple eigenvalues $\tilde{\lambda}_j(r) = ij\sqrt{1+2/d} + \beta_j r + o(r)$ for r small enough, where

$$\beta_j = \langle \mathcal{S}v_1\psi_j, v_1\psi_j \rangle_E < 0,$$

because $v_1\psi_j \notin \mathcal{N}$.

Denoting $\lambda_j(|\xi|) := |\xi|\tilde{\lambda}_j(|\xi|)$, we have (1.5), and (1.3) using the relation (3.39). The spectral gap property (1.4) is just Lemma 2.9. Point **(1)** is proved.

Step 3: The spectral decomposition. We have the decomposition

$$\begin{aligned} \sum_{j=-1}^2 \tilde{\mathcal{P}}_j(r) &= \text{Id}_{\mathcal{N}}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_j(r)\tilde{\mathcal{P}}_k(r) = \delta_{j,k}\tilde{\mathcal{P}}_j(r), \\ \tilde{\mathcal{L}}(r) &= \sum_{j=-1}^2 \tilde{\lambda}_j(r)\tilde{\mathcal{P}}_j(r), \end{aligned}$$

where $\tilde{\mathcal{P}}_j(r)$ is the one-dimensional spectral projector of $A(r)$ associated with $\tilde{\lambda}_j(r)$ and extended by 0 on $\text{Span}(\varphi_2, \dots, \varphi_d)$, and $\tilde{\mathcal{P}}_2(r)$ is the projection on $\text{Span}(\varphi_2, \dots, \varphi_d)$ parallel to X .

By (3.40), we go back to the general case of ξ not necessarily of the form $(r, 0, \dots, 0)$, using $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$ such that $O\tilde{\xi} = (1, 0, \dots, 0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \mathcal{P}(\xi) &= |\xi| \mathcal{U}(\xi) O \tilde{\mathcal{L}}(|\xi|) O^{-1} \mathcal{U}(\xi)^{-1} \\ &= \sum_{j=-1}^2 \lambda_j(|\xi|) \mathcal{P}_j(\xi), \end{aligned}$$

where we have defined $\mathcal{P}_j(\xi) := \mathcal{U}(\xi) O \tilde{\mathcal{P}}_j(|\xi|) O^{-1} \mathcal{U}(\xi)^{-1}$. By Lemma 3.12, $\mathcal{U}(\xi)$ has a Taylor expansion in $\mathcal{B}(E)$ and $\mathcal{U}(\xi)^{-1}$ has one in $\mathcal{B}(\mathbf{E}(k))$, therefore this projector has the expansion (1.6) in $\mathcal{B}(\mathbf{E}(k), E)$, and $\mathcal{P}_j^{(0)}(\tilde{\xi}) = O \tilde{\mathcal{P}}_j^{(0)} O^{-1}$. We have thus proved (1.10)-(1.11), and (1.12) comes from the definition of $\mathcal{P}(\xi)$ in the case $|\xi| = 0$.

Step 5: Range of the projectors for $|\xi| = 0$. For $j = 0, \pm 1$, $\mathcal{P}_j^{(0)}(\tilde{\xi})$ is a projection onto the subspace spanned by $e_j^{(0)}(\tilde{\xi})$, where

$$e_0^{(0)}(\tilde{\xi}) := O^{-1}\psi_0 = \left(1 - \frac{1}{2}(|v|^2 - d)\right)M,$$

$$e_{\pm 1}^{(0)}(\tilde{\xi}) := O^{-1}\psi_{\pm 1} = \left(\pm\tilde{\xi} \cdot v + \frac{1}{d}(|v|^2 - d)\right)M,$$

and $\mathcal{P}_2^{(0)}(\tilde{\xi})$ is a projection on the subspace

$$\text{Span}\left(e_2^{(0)}(\tilde{\xi}), \dots, e_d^{(0)}(\tilde{\xi})\right) = \left\{c \cdot vM \mid c \cdot \tilde{\xi} = 0\right\},$$

$$e_j^{(0)}(\tilde{\xi}) := O^{-1}\varphi_j = C_j(\tilde{\xi}) \cdot vM, \quad j = 2, \dots, d,$$

where $(\tilde{\xi}, C_2(\tilde{\xi}), \dots, C_d(\tilde{\xi}))$ is an arbitrary orthonormal basis of \mathbb{R}^d . Point **(2)** is proved.

Step 6: Expression of the projectors. Consider $\{e_j(\xi)\}_{j=2}^d$ the family obtained by the Gram-Schmidt orthogonalization of $\left\{\mathcal{P}_j(\xi)e_j^{(0)}(\tilde{\xi})\right\}_{j=2}^d$ for the inner product of $\mathbf{E}(k)$, and denote $e_j(\xi) := \mathcal{P}_j(\xi)e_j^{(0)}(\tilde{\xi})$ for $j = 0, \pm 1$. Note that by (1.6), the function $\mathcal{P}_j(\xi)e_j^{(0)}(\tilde{\xi})$ follows itself an expansion of the form (1.16) with the same $e_j^{(0)}(\tilde{\xi})$, and since this family is orthogonal for $|\xi| = 0$:

$$\forall 2 \leq j < k \leq d, \quad \left\langle e_j^{(0)}(\tilde{\xi}), e_k^{(0)}(\tilde{\xi}) \right\rangle_{\mathbf{E}(k)} = \langle O^{-1}\varphi_j, O^{-1}\varphi_k \rangle_{\mathbf{E}(k)}$$

$$= \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_{\mathbf{E}(k)} = 0,$$

and the orthogonalization process is analytic, the $e_j(\xi)$ satisfy (1.16).

Define the functions $f_j(\xi) := \mathcal{P}_j(\xi)^* e_j(\xi)$ where the adjoint is considered for the inner product of $\mathbf{E}(k)$. They have the expansion (1.17) by (1.6). They satisfy the biorthogonality relation (1.15) by (1.11) when j or $k = 0, \pm 1$, and by the orthogonalization when $j, k \in \{2, \dots, d\}$.

Point **(3)** is proved. \square

Remark 3.15. *The coefficients $C_j(\tilde{\xi})$ in Theorem 1 can therefore be assumed to be measurable, but not continuous as it is a non-vanishing tangent vector field on the sphere \mathbb{S}^{d-1} , by the hairy ball theorem.*

4. EXPONENTIAL DECAY OF THE SEMIGROUP

Proof of Theorem 2. The proof will use the following factorization in $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ that comes from the combination of (2.29) and (2.31):

$$(4.42) \quad \mathcal{R}_{\mathcal{L}\xi}(z) = \mathcal{R}_{\mathcal{B}\xi}(z) + \mathcal{R}_{-(\nu+iv\xi)}(z) \left(1 - K\mathcal{R}_{-(\nu+iv\xi)}(z)\right)^{-1} \mathcal{A}\mathcal{R}_{\mathcal{B}\xi}(z)$$

which holds whenever $\|K\mathcal{R}_{-(\nu+iv\xi)}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} < 1$.

Step 1: Global estimates. Note that as $\mathcal{L}_\xi - \omega$ is dissipative for $\omega = -\mathbf{a} + \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}$ according to Lemma 2.3 and the fact that $iv \cdot \xi$ is skew-symmetric, we have

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \|\mathcal{S}_{\mathcal{L}_\xi}(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq e^{\omega t}.$$

Furthermore, (2.32) means that for some $T > 0$, $\|K\mathcal{R}_{-(\nu+iv\cdot\xi)}(z)\|_{\mathcal{B}(E)} \leq 1/2$ holds if $|\Im z| \geq T$ and $\Re z \geq -\mathbf{a}$. The factorization (4.42) combined with the dissipativity of $\mathcal{B}_\xi + \mathbf{a}_1$ from Lemma 2.3 yields the following bound for $z \in \Delta_{-\mathbf{a}} \cap \{|\Im z| \geq T\}$ and $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} &\leq \|\mathcal{R}_{\mathcal{B}_\xi}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + 2\|\mathcal{R}_{-(\nu+iv\cdot\xi)}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \|\mathcal{A}\mathcal{R}_{\mathcal{B}_\xi}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E},E)} \\ &\leq (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a})^{-1} + \frac{2\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E},E)}}{(\nu_0 - \mathbf{a})(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a})} \leq M, \end{aligned}$$

for some $M > 0$. The dissipativity of $\mathcal{L}_\xi - \omega$ tells us that, taking T large enough, we may assume

$$(4.43) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, z \in U, \quad \|\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq M,$$

where $U := \Delta_{-\mathbf{a}} \cap \{|z + \mathbf{a}| \geq T\}$.

Step 2: Small ξ . From Theorem 1, up to a reduction of \mathbf{r} , for some $\delta > 0$,

$$\Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}+2\delta} = \Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \Delta_{-\mathbf{a}} = \{\lambda_{-1}(|\xi|), \dots, \lambda_2(|\xi|)\}$$

whenever $|\xi| \leq \mathbf{r}$. In particular, $-\mathbf{a} + \delta + i\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathcal{L}_\xi)$ for any $|\xi| \leq \mathbf{r}$, and by the continuity of $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi}(z)$ in (z, ξ) combined with (4.43), we have for some $K_0^{(-)} > 0$

$$\forall |\xi| \leq \mathbf{r}, \quad \sup_{-\mathbf{a}+\delta+i\mathbb{R}} \|\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq K_0^{(-)}.$$

Denote the following invariant subspaces and restriction by

$$\mathcal{N}(\xi) := \mathcal{R}(\mathcal{P}(\xi)), \quad \mathcal{N}(\xi)^\perp := \mathcal{R}(1 - \mathcal{P}(\xi)), \quad \mathcal{L}_\xi^\perp := (\mathcal{L}_\xi)|_{\mathcal{N}(\xi)^\perp}.$$

By [20, Theorem III-6.17], $\Sigma(\mathcal{L}_\xi^\perp) \cap \Delta_{-\mathbf{a}} = \emptyset$, and the semigroup and the resolvent associated with \mathcal{L}_ξ split along the direct sum $\mathcal{E} = \mathcal{N}(\xi) \oplus \mathcal{N}(\xi)^\perp$ as

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{L}_\xi}(t)f &= \sum_{j=-1}^2 e^{\lambda_j(|\xi|)t} \mathcal{P}_j(\xi)f + \mathcal{S}_{\mathcal{L}_\xi^\perp}(t)f^\perp, \\ \mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi}(z) &= \sum_{j=-1}^2 \frac{\mathcal{P}_j(\xi)}{\lambda_j(|\xi|) - z} f + \mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi^\perp}(z)f^\perp, \end{aligned}$$

where $f^\perp = f - \mathcal{P}(\xi)f$. Using the fact that $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi^\perp}$ is holomorphic on $\Delta_{-\mathbf{a}}$ and the maximum modulus principle, we deduce from the relation between $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi}$ and $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi^\perp}$, and the previous estimates, the bound

$$\forall z \in \Delta_{-\mathbf{a}+\delta}, \quad \left\| \mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi^\perp}(z) \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N}(\xi)^\perp)} \leq \max \left\{ M, K_0^{(-)} + 4/\delta \right\} =: K^{(-)},$$

which is uniform in $|\xi| \leq \mathbf{r}$.

We have shown that for any fixed $|\xi| \leq \mathbf{r}$, the operator \mathcal{L}_ξ^\perp satisfies the assumptions of Theorem 5 with $X = \mathcal{N}(\xi)^\perp$, $\alpha = \omega$, $C_\alpha = 1$, $\beta = -\mathbf{a} + \delta$, $K_\beta = K^{(-)}$. We thus have the bound

$$\forall |\xi| \leq \mathbf{r}, \left\| S_{\mathcal{L}_\xi^\perp}(t) \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{N}(\xi)^\perp)} \leq C^{(-)} e^{(-\mathbf{a} + \delta)t},$$

for some $C^{(-)} > 0$. For $|\xi| \leq \mathbf{r}$, we define $\mathcal{V}(t, \xi)$ to be $S_{\mathcal{L}_\xi^\perp}(t)$ extended by 0 on $\mathcal{N}(\xi)$ (note that it does not change its growth estimate).

Step 3: Large ξ . By Lemma 2.9, for some $\mathbf{b} \in (0, \mathbf{a})$, we have

$$\forall |\xi| \geq \mathbf{r}, \Sigma(\mathcal{L}_\xi) \cap \overline{\Delta_{-\mathbf{b}}} = \emptyset.$$

By (2.32), we may assume that for some large enough $R > \mathbf{r}$,

$$\forall |\xi| \geq R, \sup_{\Delta_{-\mathbf{b}}} \left\| \mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi} \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq M$$

also holds. Again, the continuity of $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi}$ implies the existence of a bound $K_0^{(+)} > 0$ on $-\mathbf{b} + i\mathbb{R}$ uniform in $|\xi| \geq \mathbf{r}$, and by a similar argument as in Step 2, we prove

$$\forall |\xi| \geq \mathbf{r}, \left\| \mathcal{R}_{\mathcal{L}_\xi}(z) \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq K^{(+)}$$

for some $K^{(+)} > 0$. We invoke once again Theorem 5 with $X = \mathcal{E}$, $\alpha = \omega$, $C_\alpha = 1$, $\beta = -\mathbf{b}$, $K_\beta = K^{(+)}$ to obtain

$$\forall |\xi| \geq \mathbf{r}, \left\| S_{\mathcal{L}_\xi}(t) \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq C^{(+)} e^{-\mathbf{b}t}$$

for some $C^{(+)} > 0$. For $|\xi| \geq \mathbf{r}$, we define $\mathcal{V}(t, \xi)$ to be $S_{\mathcal{L}_\xi}(t)$. We finally get the conclusion with $\gamma = \min\{-\mathbf{a} + \delta, \mathbf{b}\}$ and $C = \max\{C^{(-)}, C^{(+)}\}$. \square

ACKNOWLEDGMENTS

The author would like to thank Isabelle Gallagher and Isabelle Tristani for their guidance and constant support. Many thanks are owed to the anonymous reviewers for their careful reading and for pointing out several works related to this study.

APPENDIX A. SPECTRAL THEORY

Consider a Banach space X and $\Lambda \in \mathcal{C}(X)$. If $\lambda \in \Sigma_d(\Lambda)$, then λ is a finite order pole of the resolvent, which can be expanded as

$$(A.44) \quad \mathcal{R}_\Lambda(\lambda + h) = \sum_{k=1}^m \frac{D^k}{h^{k+1}} + \frac{1}{h} \Pi_{\Lambda, \lambda} - \sum_{n=0}^{\infty} h^n S^{n+1}.$$

The operator $D \in \mathcal{B}(X)$ is called the *eigennilpotent* and satisfies

$$\begin{aligned} D^m &= 0, \\ D\Pi_{\Lambda, \lambda} &= \Pi_{\Lambda, \lambda}D = D, \\ \Lambda\Pi_{\Lambda, \lambda} &= \Pi_{\Lambda, \lambda}\Lambda = \lambda\Pi_{\Lambda, \lambda} + D. \end{aligned}$$

The operator $S \in \mathcal{B}(X)$ is called the *reduced resolvent* and satisfies

$$(A.45) \quad \begin{aligned} Sf &= \begin{cases} 0, & f \in \mathcal{R}(\Pi_{\Lambda, \lambda}), \\ -(\lambda - \Lambda)^{-1} f, & f \in \mathcal{R}(1 - \Pi_{\Lambda, \lambda}), \end{cases} \\ S\Lambda &\subset \Lambda S = 1 - \Pi_{\Lambda, \lambda}. \end{aligned}$$

The eigenvalue λ is said to be *semi-simple* when both eigenspaces are equal, or equivalently when the eigennilpotent is zero (which is the same as saying the eigenvalue is a pole of order 1).

When two closed simple paths Γ_1 and Γ_2 with values in the resolvent set of Λ are such that Γ_1 lies in the exterior of Γ_2 , we have

$$\int_{\Gamma_1} \mathcal{R}_\Lambda(z) dz - \int_{\Gamma_2} \mathcal{R}_\Lambda(z) dz = 0.$$

For a detailed presentation of these results, see [20, Section III-6.5].

APPENDIX B. SEMIGROUP THEORY

The famous Hille-Yosida Theorem ((**1**) \Leftrightarrow (**2**) below, see for example [26, Chapter 1, Theorem 3.1]) and Lummer-Phillips Theorem ((**1**) \Leftrightarrow (**3**) below, [26, Chapter 1, Theorem 4.3]) give necessary and sufficient conditions for a closed and densely defined operator to be a \mathcal{C}^0 -semigroup generator.

Theorem 4 (Hille-Yosida-Lummer-Phillips). *Let Λ be a closed and densely defined operator on a Banach space X , the following conditions are equivalent for any $C > 0$ and $\omega \in \mathbb{R}$:*

- (1) Λ generates a \mathcal{C}^0 -semigroup satisfying $\|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Ce^{\omega t}$,
- (2) $\Sigma(\Lambda) \cap \Delta_\omega = \emptyset$ and $\|\mathcal{R}_\Lambda(z)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{C}{|\Re z - \omega|}$ for $z \in \Delta_\omega$,
- (3) $C\|(\Lambda - z)f\|_X \geq (z - \omega)\|f\|_X$ for $f \in \mathcal{D}(\Lambda)$, $z > \omega$, and $\mathcal{P}(\Lambda) \cap \Delta_\omega \neq \emptyset$.

Note that when X is a Hilbert space, an m -dissipative operator, that is to say an operator Λ such that

$$\Re \langle \Lambda f, f \rangle_X \leq 0, \quad \mathcal{P}(\Lambda) \cap \Delta_0 \neq \emptyset,$$

satisfies the equivalent conditions of Theorem 4 with $C = 1$ and $\omega = 0$.

Furthermore, still in a Hilbert setting, the growth estimate is directly linked to the size of the half-plane on which the resolvent is bounded: we give here a version of [13, V-Theorem 1.11] in which we specify the dependency of the constant in the growth estimate.

Theorem 5 (Gearhart-Prüss-Greine). *Consider Λ a \mathcal{C}^0 -semigroup generator on a Hilbert space X , satisfying $\|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq C_\alpha e^{\alpha t}$, and whose resolvent is defined and uniformly bounded on Δ_β by K_β . The semigroup satisfies $\|S_\Lambda(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq C_\beta e^{\beta t}$ for some constructive constant $C_\beta > 0$ depending on $K_\beta, C_\alpha, \alpha$ and β .*

REFERENCES

- [1] R. Alonso, I. M. Gamba, and M. Tasković. Exponentially-tailed regularity and time asymptotic for the homogeneous Boltzmann equation, 2017. arXiv:1711.06596.
- [2] R. Alonso, Y. Morimoto, W. Sun, and T. Yang. Non-cutoff Boltzmann equation with polynomial decay perturbations. *Revista Matemática Iberoamericana*, 37:189–292, 08 2020.
- [3] R. J. Alonso, B. Lods, and I. Tristani. Fluid dynamic limit of Boltzmann equation for granular hard-spheres in a nearly elastic regime, 2021. arXiv:2008.05173.
- [4] C. Baranger and C. Mouhot. Explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials. *Rev. Mat. Iberoam.*, 21:819–841, 2005.
- [5] C. Bardos, F. Golse, and C. D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations II Convergence proofs for the Boltzmann equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46:667–753, 1993.
- [6] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations. *Journal of Statistical Physics*, 63:323–344, 1991.
- [7] C. Bardos and S. Ukai. The classical incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pages 235–257, 1991.
- [8] M. Briant. From the Boltzmann equation to the incompressible Navier–Stokes equations on the torus: A quantitative error estimate. *Journal of Differential Equations*, 259:6072–6141, 2015.
- [9] M. Briant, S. Merino-Aceituno, and C. Mouhot. From Boltzmann to incompressible Navier-Stokes in Sobolev spaces with polynomial weights. *Analysis and Applications*.
- [10] T. Carleman. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. 1957.
- [11] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*. Springer, 1994.
- [12] R. Ellis and M. Pinsky. The first and second fluid approximations of the linearized Boltzmann equation. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, pages 125–156, 1975.
- [13] K.-J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Graduate texts in mathematics. Springer, 2000.
- [14] I. Gallagher and I. Tristani. On the convergence of smooth solutions from Boltzmann to Navier-Stokes. *Annales Henri Lebesgue*, page 561–614, 2019.
- [15] F. Golse. *Handbook of differential equations*. 2005.
- [16] H. Grad. Asymptotic Theory of the Boltzmann Equation 2. 1:147–181, 1963.
- [17] M. P. Gualdani, S. Mischler, and C. Mouhot. Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem. *Mémoires de la SMF*, 153, 2017.
- [18] F. Hérau, D. Tonon, and I. Tristani. Regularization estimates and Cauchy theory for inhomogeneous Boltzmann equation for hard potentials without cut-off. *Communications in Mathematical Physics*, pages 697–771, 2020.
- [19] D. Hilbert. Begründung der kinetischen Gastheorie. *Mathematische Annalen*, 72:562–577, 1912.
- [20] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1966.
- [21] B. Lods, R. Alonso, and V. Bagland. Convergence to self-similarity for ballistic annihilation dynamics. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 138:88–163, 04 2018.
- [22] B. Lods and M. Mokhtar-Kharroubi. Convergence to equilibrium for linear spatially homogeneous Boltzmann equation with hard and soft potentials: A semigroup approach in L1-spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 157:474–496, 2015.
- [23] S. Mischler and C. Mouhot. Exponential stability of slowly decaying solutions to the kinetic Fokker-Planck equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 221:677–723, 2016.
- [24] C. Mouhot. Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials. *Communications in Mathematical Physics*, 261:629–672, 2005.
- [25] B. Nicolaenko. Dispersion laws for plane wave propagation. In *Boltzmann equation*, pages 125–172. F. A. Grunbaum, 1971.

- [26] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. 1974.
- [27] L. Saint-Raymond. *The Boltzmann equation and its formal hydrodynamic limits*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [28] I. Tristani. Exponential convergence to equilibrium for the homogeneous Boltzmann equation for hard potentials without cut-off. *Journal of Statistical Physics*, 157:474–496, 2014.
- [29] I. Tristani. Boltzmann equation for granular media with thermal force in a weakly inhomogeneous setting. *Journal of Functional Analysis*, 270:1922–1970, 2016.
- [30] S. Ukai. On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation. *Proceedings of the Japan Academy*, 50:179–184, 1974.
- [31] S. Ukai. Solutions of the Boltzmann equation. 18:37–96, 1986.
- [32] S. Ukai and T. Yang. *Mathematical theory of Boltzmann equation*. lecture notes Series-no. 8, Hong Kong: Liu Bie Ju Center for Mathematical Sciences, City University of Hong Kong.
- [33] T. Yang and H. Yu. Spectrum analysis of some kinetic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 222:731–768, 2016.

Chapitre 5

On the convergence from Boltzmann to Navier-Stokes-Fourier for general initial data

ON THE CONVERGENCE FROM BOLTZMANN TO NAVIER-STOKES-FOURIER FOR GENERAL INITIAL DATA

PIERRE GERVAIS

ABSTRACT. In this work, we prove the convergence of strong solutions of the Boltzmann equation, for initial data having polynomial decay in the velocity variable, towards those of the incompressible Navier-Stokes-Fourier system. We show in particular that the solutions of the rescaled Boltzmann equation do not blow up before their hydrodynamic limit does. This is made possible by adapting the strategy from [7] of writing the solution to the Boltzmann equation as the sum of a part with polynomial decay and a second one with Gaussian decay. The Gaussian part is treated with an approach reminiscent of the one from [17].

CONTENTS

1. Introduction	2
1.1. The models	2
1.2. Statement of the main result	9
1.3. Notations	11
1.4. Main reductions	12
1.5. Comparison with previous works	13
1.6. Outline of the paper	13
2. Study in the polynomial space	14
2.1. Splitting of the linearized operator	14
2.2. A priori estimates	17
3. Bounds and asymptotics of the semigroup	22
3.1. The eigenprojectors and partial semigroups on the Gaussian space	22
3.2. Spectral properties on the polynomial spaces	26
4. Study in the Gaussian space	33
5. Proof of Theorem 4	43
Appendix A. Technical estimates	46
References	47

1. INTRODUCTION

1.1. **The models.** Let us present the main models considered in this paper, namely the Boltzmann equation and the incompressible Navier-Stokes-Fourier system, and how they are related.

1.1.1. *The Boltzmann equation.* Consider a rarefied gas whose particles number density at position $x \in \Omega$ (here $\Omega = \mathbb{R}^d$ or \mathbb{T}^d , and $d = 2, 3$), traveling at velocity $v \in \mathbb{R}^d$ at time $t \in \mathbb{R}^+$ is given by $F(t, x, v)$. Assuming the particles undergo hard spheres collisions, F evolves according to the *Boltzmann equation*

$$(1.1) \quad \begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) F = Q(F, F), \\ F|_{t=0} = F_{\text{in}}, \end{cases}$$

which is a transport equation whose source term models the effect of binary collisions between pairs of particles. The operator Q is called the *Boltzmann operator* or *collision operator* and is an integral bilinear symmetric operator defined as

$$Q(F, G) := \frac{1}{2}(Q^+(F, G) - Q^-(F, G) + Q^+(G, F) - Q^-(G, F)),$$

where the so-called *gain* and *loss part* are defined as

$$\begin{aligned} Q^+(F, G)(v) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}_\sigma^{d-1}} |v - v_*| F' G'_* dv_* d\sigma, \\ Q^-(F, G)(v) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}_\sigma^{d-1}} |v - v_*| F G_* dv_* d\sigma, \end{aligned}$$

where we used the standard notation

$$(1.2) \quad \begin{aligned} &- v \text{ and } v_* \text{ for the velocities of two particles after the collision,} \\ &- v' \text{ and } v'_* \text{ for their velocities before the collision, given by} \\ &v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \\ &- F := F(v), F' := F(v'), G'_* := G(v'_*) \text{ and } G_* := G(v_*). \end{aligned}$$

One can retrieve local macroscopic observables of the gas such as the mass density $R(t, x)$, local temperature $T(t, x)$ and bulk velocity $U(t, x) \in \mathbb{R}^d$ using the moments of the particles number density:

$$\begin{aligned} R(t, x) &:= \int_{\mathbb{R}^d} F(t, x, v) dv, \\ (RU)(t, x) &:= \int_{\mathbb{R}^d} v F(t, x, v) dv, \\ R(|U|^2 + dT)(t, x) &:= \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 F(t, x, v) dv. \end{aligned}$$

Using the symmetries of Q which imply that $Q(F, F)$ is orthogonal to $1, v, |v|^2$, one may show by integrating (1.1) against $1, v, |v|^2$ in v that these quantities satisfy the following conservation laws:

$$\begin{aligned}\partial_t R(t, x) + \nabla_x \cdot U(t, x) &= 0, \\ \partial_t U(t, x) + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^d} v \otimes v F(t, x, v) dv &= 0, \\ \partial_t (R|U|^2 + dRT)(t, x) + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^d} v|v|^2 F(t, x, v) dv &= 0.\end{aligned}$$

The last physical quantity we wish to introduce is the *entropy* of the gas, defined as

$$H(t) := \int_{\mathbb{R}^d \times \Omega} F(t, x, v) \log F(t, x, v) dv dx.$$

The celebrated *H-theorem* (*second law of thermodynamics*) states that H is a non-negative non-increasing function and thus a Lyapunov functional. The entropy minimizers are therefore equilibria, called *Maxwellian distributions* (see for instance [42, Chapter 1]), which are Gaussians in the variable v , parametrized by the macroscopic observables:

$$M_{R,T,U}(t, x, v) := \frac{R(t, x)}{(2\pi T(t, x))^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v - U(t, x)|^2}{2T(t, x)}\right).$$

In this paper, we will denote the normal centered distribution ($R = 1, U = 0, T = 1$) by

$$M(v) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|v|^2}{2}\right),$$

and we define the corresponding so-called *collision frequency*

$$(1.3) \quad \nu(v) := \int_{\mathbb{R}^d} M_* |v - v_*| dv_*,$$

which is such that for some constants $0 < \nu_0 \leq \nu_1$, denoting $\langle v \rangle := \sqrt{1 + |v|^2}$,

$$(1.4) \quad \nu_0 \langle v \rangle \leq \nu(v) \leq \nu_1 \langle v \rangle.$$

Global weak solutions to (1.1), called *renormalized solutions*, were constructed by R. DiPerna and P. L. Lions in [13] under very general assumptions, corresponding to initial data with finite mass, energy and entropy.

In [41], strong solutions to (1.1) have been constructed for smooth (in x) initial data with Gaussian decay. These solutions are global when the initial data is close to some absolute Maxwellian $M_{R,U,T}$ ($R, T > 0, U \in \mathbb{R}^d$), and local in time otherwise. In [23], the authors exhibited strong solutions to (1.1) for smooth (in x) initial data having algebraic decay and close to some absolute Maxwellian. Let us state their existence theorem more precisely.

Theorem 1. *Let $\alpha > 2$, there exists some positive $\eta = \eta(\alpha)$ such that, for any initial data $F_{\text{in}} = F_{\text{in}}(x, v)$ with $x \in \mathbb{T}^3$ and $v \in \mathbb{R}^3$ satisfying*

$$\|F_{\text{in}} - M\|_{L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^\alpha dv)} < \eta(\alpha),$$

there exists a unique global solution $F \in \mathcal{C}_t^0 L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^\alpha dv) \cap L_{t,v}^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^{\alpha+1} dv)$ to the Boltzmann equation (1.1).

We also mention [24] in which perturbative solutions are constructed using a non-linear energy method based on the so-called micro-macro decomposition (see Section 1.1.2), and [28] in which solutions are constructed near vacuum.

1.1.2. *Micro-macro decomposition.* A gas at thermodynamic equilibrium and close to M , that is to say a thermodynamic equilibrium of the form $M_{1+\rho,u,1+\theta}$ for some small ρ, u, θ , behaves like the sum of M and a so-called *infinitesimal Maxwellian*:

$$M_{1+\rho,u,1+\theta}(v) = M(v) + \left(\rho + u \cdot v + \frac{1}{2} (|v|^2 - d) \theta \right) M(v) + o(\rho, u, \theta).$$

More generally, any fluctuation $F(x, v) = M(v) + f(x, v)$ around M admits a unique *micro-macro decomposition* (with respect to M)

$$(1.5) \quad f(x, v) = \left(\rho_f(x) + u_f(x) \cdot v + \frac{1}{2} (|v|^2 - d) \theta_f(x) \right) M(v) + f_{\perp}(x, v),$$

$$\rho_f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v) dv, \quad u_f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v) v dv,$$

$$\theta_f(x) := \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v) (|v|^2 - d) dv$$

where we call *the macroscopic part of f* the part

$$(1.6) \quad \left(\rho_f(x) + u_f(x) \cdot v + \frac{1}{2} (|v|^2 - d) \theta_f(x) \right) M(v),$$

which is given by the projection

$$(1.7) \quad \Pi f(x, v) := \sum_{j=0}^{d+1} \frac{\varphi_j(v) M(v)}{\|\varphi_j M^{1/2}\|_{L^2_v}^2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v_*) \varphi_j(v_*) dv_*,$$

$$\varphi_0(v) = 1, \quad \varphi_j(v) = v_j, \quad \varphi_{d+1}(v) = |v|^2,$$

and f_{\perp} is the *microscopic part of f* , thus characterized by the fact that for almost any $x \in \Omega$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_{\perp}(x, v) \varphi_j(v) dv = 0, \quad j = 0, \dots, d+1.$$

We say that f is *well-prepared* if it is macroscopic and satisfies furthermore the incompressibility condition and the Boussinesq relation of (INSF):

$$\nabla_x \cdot u_f = 0,$$

$$\nabla_x (\rho_f + \theta_f) = 0.$$

To sum up, any $f(x, v)$ can be decomposed uniquely as

$$(1.8) \quad f = \Pi f + f_{\perp} = f_{\text{WP}} + f_{\text{IP}} + f_{\perp},$$

where, denoting \mathbb{P} the (Leray) projector on incompressible fields, the *well-prepared part of f* writes

$$(1.9) \quad f_{\text{WP}}(x, v) := \left(\bar{\rho}_f(x) + \bar{u}_f(x) \cdot v + \frac{1}{2} (|v|^2 - d) \bar{\theta}_f(x) \right),$$

$$\bar{u} := \mathbb{P}u, \quad \bar{\rho}_f := -\bar{\theta}_f := \frac{2\rho_f - d\theta_f}{2},$$

and $f_{\text{IP}} := \Pi f - f_{\text{WP}}$ is called the *ill-prepared part*.

Remark 1.1. Note that the micro-macro decomposition is orthogonal in $L_v^2(M^{-1}dv)$.

Remark 1.2. Note that, in the following, the Boussinesq relation $\nabla_x(\rho + \theta) = 0$ is equivalent to $\rho + \theta = 0$ as we will assume (ρ, θ) to be mean-free when $\Omega = \mathbb{T}^d$ or integrable when $\Omega = \mathbb{R}^d$.

1.1.3. *The hydrodynamic model.* At the macroscopic level, the dynamics of an incompressible fluid is encoded at any point $x \in \Omega$ and any time $t \in \mathbb{R}^+$ by its bulk velocity $u(t, x) \in \mathbb{R}^d$, its mass density $\rho(t, x)$, its temperature $\theta(t, x)$, as well as its pressure $p(t, x)$ (which can be deduced from u in the case of an incompressible fluid). These quantities evolve according to the incompressible Navier-Stokes-Fourier system:

$$(INSF) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \mu \Delta u = -\nabla p, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \nabla(\theta + \rho) = 0, \\ (u, \theta, \rho)|_{t=0} = (u_{\text{in}}, \rho_{\text{in}}, \theta_{\text{in}}). \end{array} \right.$$

In this system, the positive scalars μ and κ denote respectively the kinematic viscosity and heat conductivity coefficients. Global weak solutions were shown to exist by J. Leray [15] under minimal physical assumptions on the initial data, and strong solutions were constructed by H. Fujita and T. Kato [16] for smooth initial data. Let us present an existence result for (INSF) which is by no means optimal but sufficient for the study led in this paper and refer to [11, 31, 32, 16] for a proof.

Theorem 2. For any $s \geq d/2 - 1$ and $(\rho_{\text{in}}, u_{\text{in}}, \theta_{\text{in}}) \in H_x^s$ satisfying

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot u_{\text{in}} &= 0, \\ \nabla_x(\rho_{\text{in}} + \theta_{\text{in}}) &= 0, \end{aligned}$$

there exists a time $T \in (0, \infty]$ such that the system (INSF) has a unique solution in $L_t^\infty([0, T]; H_x^s) \cap L_t^2([0, T]; H_x^{s+1})$ associated with the initial data $(\rho_{\text{in}}, u_{\text{in}}, \theta_{\text{in}})$. Furthermore, there holds $T = \infty$ if the initial data is small enough (with respect to μ).

1.1.4. *Hydrodynamic limits.* By choosing a system of reference values for length, time and velocity (see for example [19, 40]), we obtain a dimensionless version of the equation:

$$\text{Ma} \partial_t F + v \cdot \nabla_x F = \frac{1}{\text{Kn}} Q(F, F),$$

where Kn denotes the *Knudsen number* (the inverse of the average number of collisions per unit of time) and Ma the *Mach number* (the ratio of the bulk velocity to the speed of sound, characterizing the compressibility of the fluid). To relate the Boltzmann equation to hydrodynamic models, several formal methods were proposed, first by D. Hilbert [27], Chapman-Enskog [10], H. Grad [22], then made rigorous by several works such as [5, 12, 8, 30]. At the beginning of the nineties, a systematic approach was presented in [4, 3]: C. Bardos, F. Golse and D. Levermore showed that the only possible point of accumulation for the renormalized solutions of (B^ε) when ε goes to zero are global weak solutions to Euler or Navier-Stokes equations. In the case of the Navier-Stokes-Equations, choosing $\text{Ma} = \text{Kn} = \varepsilon$ in the previous scaled Boltzmann equation and performing the linearization $F = F^\varepsilon = M + \varepsilon f^\varepsilon$, the authors considered the following equation:

$$(B^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t f^\varepsilon = \mathcal{L}^\varepsilon f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Q(f^\varepsilon, f^\varepsilon), \\ f^\varepsilon(0) = f_{\text{in}}, \end{cases}$$

$$(1.10) \quad \mathcal{L}^\varepsilon := \varepsilon^{-2} (\mathcal{L} - \varepsilon v \cdot \nabla_x),$$

$$(1.11) \quad \mathcal{L}h := 2Q(M, h),$$

and showed that if the fluctation profile f^ε converges in some weak sense to some f^0 as ε goes to zero, then it must write

$$(1.12) \quad f^0(t, x, v) := \left(\rho^0(t, x) + u^0(t, x) \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - d)\theta^0(t, x) \right) M(v),$$

and the coefficients ρ^0, u^0 and θ^0 are distributional solutions of (INSF) with the initial condition

$$\begin{aligned} (\rho^0, u^0, \theta^0)|_{t=0} &= \left(\frac{2\rho_{\text{in}} - d\theta_{\text{in}}}{d+2}, \mathbb{P}u_{\text{in}}, \frac{-2\rho_{\text{in}} + d\theta_{\text{in}}}{d+2} \right), \\ \rho_{\text{in}}(x) &:= \int_{\mathbb{R}^d} f_{\text{in}}(x, v) dv, \quad u_{\text{in}}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} v f_{\text{in}}(x, v) dv, \\ \theta_{\text{in}}(x) &:= \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} (|v|^2 - d) f_{\text{in}}(x, v) dv. \end{aligned}$$

Recalling the definition of Section 1.1.2, this means $f^0|_{t=0} = f_{\text{in,WP}}$. Finally, the diffusion coefficients in (INSF) can be expressed as

$$\mu := \frac{1}{(d-1)(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} \text{trace} \left(\Phi (\mathcal{L}\Phi)^T \right) dv, \quad \kappa := \frac{2}{d(d+2)} \int_{\mathbb{R}^d} \phi \mathcal{L}\phi dv,$$

where Φ and ϕ are the unique functions satisfying

$$\mathcal{L}\Phi = \left(\frac{|v|^2}{2} \text{Id} - v \otimes v \right) M, \quad \mathcal{L}\phi = v \left(\frac{d+2}{2} - \frac{|v|^2}{2} \right) M,$$

and orthogonal to the null-space of \mathcal{L} (see [42]), which consists of macroscopic distributions:

$$(1.13) \quad \mathcal{N}(\mathcal{L}) := \{v \mapsto (a + b \cdot v + c(|v|^2 - d)) M(v), a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^d\}.$$

This means that the heat conductivity and kinematic viscosity only depend on the physical properties of the reference equilibrium M and the collision operator Q . In [20, 21], F. Golse and L. Saint-Raymond proved the compactness of these solutions and thus the convergence. We also mention [33] in which different interactions between particles are considered.

The derivation of the Navier-Stokes system from the Boltzmann equation in the case of strong solutions was first considered by C. Bardos and S. Ukai in [5], for initial data having Gaussian decay. Their approach relied on the properties of the homogeneous linearized operator \mathcal{L} studied by H. Grad in [22], and on the spectral study of the full linearized operator $\mathcal{L} + v \cdot \nabla_x$ led by R. Ellis and M. Pinsky in [14], completed by S. Ukai in [41]. They considered $(\mathcal{B}^\varepsilon)$ in its integral form

$$(1.14) \quad f^\varepsilon = U^\varepsilon f_{\text{in}} + \Psi^\varepsilon(f^\varepsilon, f^\varepsilon),$$

where we have denoted

$$(1.15) \quad \begin{aligned} U^\varepsilon(t) &:= \exp(t\mathcal{L}^\varepsilon), \\ \Psi^\varepsilon(f^\varepsilon, f^\varepsilon)(t) &:= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t U^\varepsilon(t-t') Q(f^\varepsilon(t'), f^\varepsilon(t')) dt', \end{aligned}$$

and proved continuity bounds (uniformly in ε) for U^ε and Ψ^ε in some space of functions with Gaussian decay, which allowed to prove existence of strong global solutions f^ε to (1.14) through a fixed point argument for small initial data. They also proved the convergence of U^ε and Ψ^ε as ε goes to zero to some U^0 and Ψ^0 , which implied strong convergence of f^ε to some f^0 satisfying

$$(KINSF) \quad f^0 = U^0 f_{\text{in}}^0 + \Psi^0(f^0, f^0),$$

and we recall once again that $f_{|t=0}^0 = f_{\text{in}}^0 = f_{\text{in,WP}}$. We could call this equation the *kinetic formulation of the Navier-Stokes-Fourier system*, as the results from [4, 3] imply that f^0 is the same as (1.12) and thus describes the unique strong solution of (INSF) (in the sense of Theorem 2).

In [17], I. Gallagher and I. Tristani improved this fixed point approach by considering the equation satisfied by $f^\varepsilon - f^0$, where f^0 is known to exist thanks to Theorem 2. This allowed to consider large initial data f_{in} for the Boltzmann equation, and thus large $(\rho_{\text{in}}^0, u_{\text{in}}^0, \theta_{\text{in}}^0)$ for the Navier-Stokes-Fourier system, and in particular, showed that the solution f^ε to (1.14) does not blow up before f^0 does. We state here their result.

Theorem 3. *Let $s > d/2$, $\beta > d/2 + 1$, and $f_{\text{in}} \in L_v^\infty H_x^s (M^{-1/2} \langle v \rangle^\beta dv)$. Denote f^0 the solution to (KINSF) with initial data $f_{\text{in}}^0 = f_{\text{in,WP}}$ given by Theorem 2 on a time*

interval $[0, T)$. For any small enough $\varepsilon > 0$, there exists a unique solution to (B^ε)

$$f^\varepsilon \in \mathcal{C}_b\left([0, T); L_v^\infty H_x^s\left(M^{-1/2}\langle v \rangle^\beta dv\right)\right)$$

where $\mathcal{C}_b(X; Y)$ denotes the set of bounded continuous functions from X to Y , and it converges to f^0

- in $L_t^\infty L_v^\infty H_x^s\left(M^{-1/2}\langle v \rangle^\beta dv\right)$ if $f_{\text{in}} = f_{\text{in,WP}}$,
- in $L_t^\infty L_v^\infty H_x^s\left(M^{-1/2}\langle v \rangle^\beta dv\right) + L_t^p L_v^\infty\left(H_x^s + W^{s,\infty}\right)\left(M^{-1/2}\langle v \rangle^\beta dv\right)$ otherwise, where $\frac{2}{d-1} < p < \infty$.

We also mention works led in similar functional spaces: [30, 12, 6, 25, 29] in which strong hydrodynamic limits of the Boltzmann equation are considered, and [38, 9] in which strong solutions to the incompressible Navier-Stokes-Fourier system are derived from the Landau equation.

The case of strong solutions to the Boltzmann equation in polynomial spaces is not different because Grad's decomposition of the linearized operator \mathcal{L} does not have the same nice properties as in Gaussian spaces. In particular, Ψ^ε can not be shown to be a bounded operator in $L_t^\infty L_v^1(\langle v \rangle^\alpha dv)$ using the same approach. The study of strong solutions to the Boltzmann equation for polynomially decaying initial data was initiated by M.P. Gualdani, S. Mischler and C. Mouhot who constructed in [23] solutions to the Boltzmann equation for initial data close to a global Maxwellian (see Theorem 1), or in other words (by a scaling argument), to (B^ε) for f_{in} small and for $\varepsilon = 1$. This was made possible thanks to the development of the so-called *enlargement theory* started by C. Mouhot in [36] and developed with S. Mischler and M.P. Gualdani in [35, 23] which (loosely speaking) allows to prove spectral properties for a linear operator in large spaces under the condition that these properties hold in a smaller space and the linear operator can be decomposed in a certain way.

In [7], M. Briant, S. Merino and C. Mouhot proved the solutions constructed in [23] were bounded uniformly in ε , and thus, up to an extraction, converging weakly to a solution of the incompressible Navier-Stokes-Fourier system.

We also mention [2] in which weak solutions to a modified Navier-Stokes-Fourier system are derived from solutions to the Boltzmann equation for granular media with initial data having polynomial decay.

In this work, our main goal is to prove that the solutions constructed in [23] converge strongly to solutions of the Navier-Stokes-Fourier system, at least when the initial data is in some of the spaces considered by the [23]. To do so, we draw inspiration from [7] and decompose the Boltzmann equation into a system of two coupled equations, describing respectively the evolution of the macroscopic and microscopic parts of the initial data $f_{\text{in}} = \Pi f_{\text{in}} + f_{\text{in},\perp}$.

- One equation is posed in a “small Gaussian space” and its solution, generated by the macroscopic part Πf_{in} , is shown to converge strongly to a solution of the incompressible Navier-Stokes-Fourier system, by adapting the approach from [5, 17].
- The other equation is posed in a “large polynomial space” and describes the evolution of an initial layer generated by the microscopic part $f_{\text{in},\perp}$.

We also prove that when the initial data f_{in} is large, the corresponding solution to the Boltzmann equation exists at least up to the first singular time of the solution to the incompressible Navier-Stokes-Fourier system with initial data $f_{\text{in,WP}}$.

1.2. Statement of the main result. Before we state the main result, let us define the functional spaces used in this paper.

Notations 1.3. For any positive Borelian function m , we denote by $L^p(m)$ the weighted Lebesgue space defined by the following norm:

$$(1.16) \quad \|f\|_{L^p(m)} := \|fm\|_{L^p},$$

and recall that $M(v) = (2\pi)^{-d/2} \exp(-|v|^2/2)$. We fix in this paper some $s > d/2$. For any $p \in [1, \infty]$ and $\alpha > 0$, we denote the norms

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}} &:= \|f\langle v \rangle^\alpha\|_{L_v^p H_x^s}, \\ \|f\|_{E^\beta} &:= \|fM^{-1/2}\langle v \rangle^\beta\|_{L_v^\infty H_x^s}, \end{aligned}$$

and corresponding functional spaces

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{p,\alpha} &:= \{f = f(x, v) : \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}} < \infty\}, \quad p < \infty, \\ \mathcal{E}^{\infty,\alpha} &:= \left\{ f = f(x, v) : \|f\|_{\mathcal{E}^{\infty,\alpha}} < \infty, \|f(\cdot, v)\|_{H_x^s} \langle v \rangle^\alpha \xrightarrow{|v| \rightarrow \infty} 0 \right\}, \\ E^\beta &:= \left\{ f = f(x, v) : \|f\|_{E^\beta} < \infty, \|f(\cdot, v)\|_{H_x^s} \langle v \rangle^\beta M^{-1/2} \xrightarrow{|v| \rightarrow \infty} 0 \right\}. \end{aligned}$$

We also define the auxiliary norm

$$\|h\|_{\mathcal{E}_v^{p,\alpha}} := \|h\nu^{1/p}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}},$$

with ν being defined in (1.3). Note that the assumption that the function vanishes for large v in the case $p = \infty$ is made so that for any $\alpha > 0$ and $p_1 \geq 1$, the space $\bigcap_{p \geq p_1} \mathcal{E}^{p,\alpha}$ is dense in $\mathcal{E}^{\infty,\alpha}$. Finally, for any real interval I and Banach space X , we denote $\mathcal{C}_b(I; X)$ the set of bounded continuous functions from I to X .

Our main result is the following.

Theorem 4. Let $p \in [1, \infty]$ and $\beta > d/2 + 1$ (and recall that $s > d/2$), there exists some $\alpha_*(p) > 0$ such that, for any $\alpha > \alpha_*(p)$, the following holds. Consider any initial data $f_{\text{in}} \in \mathcal{E}^{p,\alpha}$, decomposed according to (1.8):

$$\begin{aligned} f_{\text{in}} &= f_{\text{in,WP}} + f_{\text{in,IP}} + f_{\text{in},\perp}, \\ f_{\text{in,WP}}(x, v) &= \left(\rho_{\text{in}}^0(x) + u_{\text{in}}^0(x) \cdot v + \frac{1}{2}(|v|^2 - d)\theta_{\text{in}}^0(x) \right) M(v). \end{aligned}$$

We make the following additional assumptions depending on the spatial domain:

- In the case $\Omega = \mathbb{T}^d$, we assume $(\rho_{\text{in}}^0, u_{\text{in}}^0, \theta_{\text{in}}^0)$ to be well-prepared, that is to say $\rho_{\text{in}}^0 + \theta_{\text{in}}^0 = 0$ and $\nabla_x \cdot u_{\text{in}}^0 = 0$. With the notations of Section 1.1.2, this means $\Pi f_{\text{in}} = f_{\text{in,WP}}$, or equivalently $f_{\text{in,IP}} = 0$. We also assume them to be mean-free.
- In the case $\Omega = \mathbb{R}^2$, we assume $(\rho_{\text{in}}^0, u_{\text{in}}^0, \theta_{\text{in}}^0) \in L_x^1$.

Let (ρ^0, u^0, θ^0) be the unique solution to (INSF) on a time interval $[0, T)$ (in the sense of Theorem 2) with initial data $(\rho_{\text{in}}^0, u_{\text{in}}^0, \theta_{\text{in}}^0)$, and define its kinetic counterpart

$$f^0(t, x, v) := \left(\rho^0(t, x) + v \cdot u^0(t, x) + \frac{1}{2}(|v|^2 - d)\theta_{\text{in}}^0(t, x) \right) M(v).$$

There exists some positive $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f_{\text{in}}, T)$ such that

- for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, the equation (B^ε) has a unique solution

$$(1.17) \quad f^\varepsilon \in \mathcal{C}_b([0, T]; \mathcal{E}^{p, \alpha}) \cap L^p([0, T]; \mathcal{E}_v^{p, \alpha}),$$

- the solution splits as

$$\begin{aligned} f^\varepsilon &= f^0 + u_1^\varepsilon + u_\infty^\varepsilon + u_{\text{ac}}^\varepsilon, \\ u_1^\varepsilon(0) &= f_{\text{in}, \perp}, \quad u_\infty^\varepsilon(0) = 0, \quad u_{\text{ac}}^\varepsilon(0) = f_{\text{in,IP}}, \end{aligned}$$

where $u_1^\varepsilon, u_\infty^\varepsilon, u_{\text{ac}}^\varepsilon$ satisfy for some $C, \gamma > 0$ depending only on p, α and β

$$(1.18) \quad \|u_1^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}} \leq C e^{-\gamma t/\varepsilon^2} \|f_{\text{in}, \perp}\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}},$$

$$(1.19) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{0 \leq t < T} \|u_\infty^\varepsilon(t)\|_{E^\beta} \right) = 0,$$

$$(1.20) \quad u_{\text{ac}}^\varepsilon \rightharpoonup^* 0, \text{ in } L_t^\infty E^\beta,$$

furthermore, if $\Omega = \mathbb{R}^d$, then $\|u_{\text{ac}}^\varepsilon\|_{L_t^q W_x^{s, \infty}(M^{-1/2}\langle v \rangle^\beta)} \rightarrow 0$ for any $q > \frac{2}{d-1}$.

- $u_{\text{ac}}^\varepsilon = 0$ if $f_{\text{in,IP}} = 0$.

Remark 1.4. In the physically relevant case $p = 1$, we have $\alpha_*(1) = 3$.

Remark 1.5. According to [34, Theorem 1], if the solution to (B^ε) is bounded in $L_x^\infty L_v^1(\langle v \rangle^3)$, the solution to (1.1) is non-negative if F_{in} is. This is indeed the case since $\mathcal{E}^{p, \alpha} \subset \mathcal{E}^{1, 3}$ whenever $\alpha > \alpha_*(p)$, and $\mathcal{E}^{1, 3} \subset L_v^1 L_x^\infty(\langle v \rangle^3) \subset L_x^\infty L_v^1(\langle v \rangle^3)$ because $s > d/2$.

Remark 1.6. Let us make some comments on the assumptions made on the initial data

- The mean-free assumption in the case of the torus is a compatibility condition coming from the fact that if $F^\varepsilon = M + \varepsilon f^\varepsilon$ relaxes to the equilibrium M , then

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d} f^\varepsilon(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and we recall that the following conservation laws hold:

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d} f^\varepsilon(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv dx = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d} f_{\text{in}}(x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv dx.$$

Thus, we need to assume

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d} f_{\text{in}}(x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} dv dx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- The well-preparedness assumption is made because in the case $\Omega = \mathbb{T}^d$, the acoustic waves generated by the ill-prepared part do not disperse.

Remark 1.7. Suppose the initial data is smooth (i.e. H_x^{s+1}). The part u_∞^ε vanishes at a rate $\varepsilon^{1/2}$, and if the macroscopic part of f_{in} satisfies the incompressibility and Boussinesq conditions (i.e. $f_{\text{in,IP}} = 0$ and thus $f_{\text{in}} = f_{\text{in,WP}} + f_{\text{in,\perp}}$) then u_∞^ε vanishes at a rate ε . Also, the acoustic part $u_{\text{ac}}^\varepsilon$ is controlled by $\varepsilon t^{\frac{2}{d-1}}$ uniformly in (x, v) .

1.3. Notations. We will use the following notations throughout the rest of this paper. For any Banach spaces X and Y , we will denote $\mathcal{B}(X; Y)$ the set of bounded linear operators from X to Y , and abbreviate $\mathcal{B}(X)$ when $X = Y$. The relation denoted $A \lesssim B$ is to be understood as $A \leq CB$ for some uniform constant $C > 0$. Finally, we will denote the convolution $f * g$ of maps $f : [0, \infty) \rightarrow X$, $g : [0, \infty) \rightarrow Y$ by

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-t')g(t')dt'$$

whenever the product $f(t_1)g(t_2)$ makes sense. For instance, when $f(t_1)$ is an operator acting on the vector $g(t_2)$, or when both are operators and we consider their composition. We introduce this definition so that, when the semigroup $S_L(t) = e^{tL}$ generated by a linear operator L exists, the Duhamel principle applied to the evolution equation

$$\partial_t u(t) = Lu(t) + v(t).$$

takes the simple form

$$u(t) = S_L(t)u(0) + S_L * v(t)$$

In particular, when all terms make sense, the following factorization formula holds for any linear operators L, P :

$$S_{L+P} = S_L + S_L * (PS_{L+P}).$$

Furthermore, considering $L = (L + P) - P$, one also has

$$S_L = S_{L+P} - S_{L+P} * (PS_L),$$

and thus there holds

$$(1.21) \quad S_{L+P} = S_L + S_L * (PS_{L+P}) = S_L + S_{L+P} * (PS_L).$$

1.4. Main reductions. We use an idea from [7] and take advantage of the splitting of the linearized operator $\mathcal{L}^\varepsilon = \mathcal{B}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}\mathcal{A}$ introduced in [23] and recalled in Section 2.1, where $\mathcal{B}^\varepsilon + \lambda/\varepsilon^2$ generates a C^0 -semigroup uniformly bounded in ε , and there holds $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^{p,\alpha}; E^\beta)$, for some $p \in [1, \infty]$ and positive α, λ, β . This allows to decompose the unknown of (B^ε) as $f^\varepsilon(t) = h^\varepsilon(t) + e^\varepsilon(t) \in \mathcal{E}^{p,\alpha} + E^\beta$ where the parts h^ε and e^ε satisfy the following system of coupled equations:

$$(1.22) \quad \begin{cases} \partial_t h^\varepsilon = \mathcal{B}^\varepsilon h^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Q(h^\varepsilon, h^\varepsilon) + 2\varepsilon^{-1} Q(h^\varepsilon, e^\varepsilon), & h^\varepsilon|_{t=0} = f_{\text{in},\perp}, \\ \partial_t e^\varepsilon = \mathcal{L}^\varepsilon e^\varepsilon + \varepsilon^{-1} Q(e^\varepsilon, e^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A} h^\varepsilon, & e^\varepsilon|_{t=0} = \Pi f_{\text{in}}. \end{cases}$$

We will rewrite this system as a fixed point equation

$$\Xi(h^\varepsilon, e^\varepsilon) = (h^\varepsilon, e^\varepsilon)$$

which will be solved using Banach's contraction theorem. We thus need to define properly Ξ on some product space $\mathcal{X} \times X$ and show contraction estimates for both coordinates h^ε and e^ε . This means that we have to prove a priori estimates on both equations, which will dictate our choice for \mathcal{X} and X .

The equation on h^ε will be studied using an energy method (Lemma 2.6), which requires coercivity estimates on \mathcal{B}^ε (Lemma 2.1) and bounds for Q (Lemma 2.4).

The equation on e^ε is — up to the coupling term $\varepsilon^{-2}\mathcal{A}h^\varepsilon$ — the same equation as in [5, 17] posed in the same functional space. We thus use the same approach and consider this equation in integral form:

$$e^\varepsilon = U^\varepsilon \Pi f_{\text{in}} + \Psi^\varepsilon(e^\varepsilon, e^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} h^\varepsilon,$$

where Ψ^ε was defined in (1.15), so as to rely on previously established results. Drawing inspiration from [17], the part e^ε will be constructed indirectly: we need to identify a sub-part e_1^ε such that there holds $e^\varepsilon = e_1^\varepsilon + g^\varepsilon$, where $g^\varepsilon \rightarrow 0$ in X as ε goes to 0 and is what will actually be constructed during the fixed point argument.

- If one neglects the coupling term $\varepsilon^{-2}U^\varepsilon * \mathcal{A}h^\varepsilon$, previous works such as [5, 17] suggest that e^ε should behave like $f^0 + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}$, where f^0 is the unique smooth solution to (KINSF) generated by $f_{\text{in},\text{WP}}$ on some time interval $[0, T)$ (in the sense of Theorem 2), and $U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in},\text{IP}} = U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}$ corresponds to acoustic waves oscillating with a rate of order $1/\varepsilon$ (see Section 3.1 for the definition and properties of $U_{\text{disp}}^\varepsilon$).
- However, the coupling term $\varepsilon^{-2}U^\varepsilon * \mathcal{A}h^\varepsilon$ is not expected to vanish in X , which will be (a weighted in time version of) $L_t^\infty E^\beta$, but satisfies (see Notations 4.6 for the definition of $\mathcal{T}_1^\varepsilon, \mathcal{T}_\infty^\varepsilon$ and Lemma 4.7-4.8 for their respective estimates)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} h^\varepsilon &= \mathcal{T}_1^\varepsilon h^\varepsilon + \mathcal{T}_\infty^\varepsilon h^\varepsilon, \\ \|\mathcal{T}_q^\varepsilon h^\varepsilon\|_{L_t^q E^\beta} &\rightarrow 0, \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad q = 1, \infty. \end{aligned}$$

We therefore define the sub-part mentioned above as $e_1^\varepsilon = f^0 + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}} + \mathcal{T}_1^\varepsilon h^\varepsilon$, thus the pair $(h^\varepsilon, g^\varepsilon)$ solves the system

$$(1.23) \quad \begin{cases} \partial_t h^\varepsilon &= \mathcal{B}^\varepsilon h^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Q(h^\varepsilon, h^\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon} Q(h^\varepsilon, g^\varepsilon + f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon h^\varepsilon + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}), \\ h^\varepsilon(0) &= f_{\text{in}, \perp}, \\ g^\varepsilon &= \mathcal{S}^\varepsilon[h^\varepsilon] + \Psi^\varepsilon(g^\varepsilon, g^\varepsilon) + \Phi^\varepsilon[h^\varepsilon]g^\varepsilon, \end{cases}$$

where we have denoted

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\varepsilon[h^\varepsilon] &:= \mathcal{S}_0^\varepsilon + \Psi^\varepsilon(\mathcal{T}_1^\varepsilon h^\varepsilon + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}, 2f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon h^\varepsilon + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}) + \mathcal{T}_\infty^\varepsilon h^\varepsilon, \\ \mathcal{S}_0^\varepsilon &:= (U^\varepsilon - U_{\text{disp}}^\varepsilon - U^0) \Pi f_{\text{in}} + (\Psi^\varepsilon - \Psi^0)(f^0, f^0), \\ \Phi^\varepsilon[h^\varepsilon] &:= 2\Psi^\varepsilon(f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon[h^\varepsilon] + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}, \cdot), \end{aligned}$$

and we used the fact that $U_{\text{disp}}^\varepsilon = U_{\text{disp}}^\varepsilon \Pi$ (see Section 3.1). Note that f_{in}, f^0 and T are fixed so we do not indicate them in the notations above.

1.5. Comparison with previous works. In [7], the authors considered the system (1.22) in order to derive estimates on both parts uniformly in ε . They choose to split the initial data as $h^\varepsilon(0) = f_{\text{in}}$ and $e^\varepsilon(0) = 0$, which allowed to rely on hypocoercivity results from [6] valid for $e^\varepsilon(0)$ small enough. Like in the present work, they obtained the following control for the coupling term: $\varepsilon^{-2} \mathcal{A}h^\varepsilon(t) = O(\varepsilon^{-2} e^{-\lambda t/\varepsilon^2})$ which leads to a term of order $O(1)$ in Gronwall estimates.

Here, we need to show that e^ε is not only bounded but converges strongly to f^0 as well when ε goes to zero. To this end, we use the integral formulation of the equation on e^ε which allows to use the spectral study of the linearized operator \mathcal{L}^ε led in such works as [14, 41, 18, 43], this is the approach used in [5, 17].

Note that if f_{in} were purely macroscopic, then it would belong to E^β and (1.22) would reduce to the equation considered in [5, 17]. The latter differs from the equation on e^ε in (1.22) by the coupling term $\varepsilon^{-2} U^\varepsilon * \mathcal{A}h^\varepsilon$, which may not be small in $L_t^\infty E^\beta$, but is small in $L_t^\infty E^\beta + L_t^1 E^\beta$. This is made possible (1) by the splitting of the initial data $h^\varepsilon(0) = f_{\text{in}, \perp}$, (2) by generalizing some properties of U^ε known to hold in E^β to the larger space $\mathcal{E}^{p, \alpha}$, using the theory of space enlargement from [36, 35, 23].

1.6. Outline of the paper. In Section 2, we prove coercivity estimates for \mathcal{B}^ε and bounds for Q which we use to prove the well-posedness of the following equation for given source terms h and g

$$\partial_t f = \mathcal{B}^\varepsilon f + \frac{1}{\varepsilon} Q(h, h + g).$$

In particular, we prove the stability estimate required for the mapping Ξ from Section 1.4 to be a contraction.

In Section 3, we recall the spectral properties of $\mathcal{L} + \varepsilon v \cdot \nabla_x$ from [14, 41, 18, 17], which dictate the asymptotics of the semigroup U^ε in some Gaussian space.

We then extend some asymptotic properties to polynomial spaces $\mathcal{E}^{p,\alpha}$ using space enlargement theory.

In Section 4, we prove the necessary estimates to solve

$$g = \Psi^\varepsilon(g, g) + \Phi^\varepsilon[h]g + \mathcal{S}^\varepsilon[h]$$

for some unique small g when ε is small enough using a contraction argument. To be more precise, we show that Ψ^ε is uniformly bounded in ε , that $\Phi^\varepsilon[h]$ is a contraction with Lipschitz constant depending on a bound of h and for an equivalent norm depending on f^0 , and that $\mathcal{S}^\varepsilon[h]$ vanishes as ε goes to zero.

2. STUDY IN THE POLYNOMIAL SPACE

2.1. Splitting of the linearized operator. In [23], the authors present a splitting of the linearized Boltzmann operator \mathcal{L} , defined as (1.11), in the form

$$\mathcal{L} = \mathcal{A}_\delta + \mathcal{B}_\delta = -\nu + \overline{\mathcal{B}}_\delta + \mathcal{A}_\delta, \quad \delta \in (0, 1),$$

and $\mathcal{A}_\delta, \overline{\mathcal{B}}_\delta$ are defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\delta f(v) &:= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} \Theta_\delta (M'_* f' + M' f'_* - M f_*) |v - v_*| dv_* d\sigma, \\ \overline{\mathcal{B}}_\delta f(v) &:= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (1 - \Theta_\delta) (M'_* f' + M' f'_* - M f_*) |v - v_*| dv_* d\sigma, \end{aligned}$$

where we recall that ν is defined by (1.3), the notations v', v'_*, g', g'_*, g_* are defined in Section 1.1.1, the function $\Theta_\delta = \Theta_\delta(v, v_*, \sigma)$ is smooth, bounded by one on

$$\{|v| \leq \delta^{-1}, 2\delta \leq |v - v_*| \leq \delta^{-1}, |\cos \theta| \leq 1 - 2\delta\},$$

and supported in

$$\{|v| \leq 2\delta^{-1}, \delta \leq |v - v_*| \leq 2\delta^{-1}, |\cos \theta| \leq 1 - \delta\},$$

where $\cos \theta := \sigma \cdot (v - v_*) / |v - v_*|$.

For any $p \in [1, \infty]$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, and $\delta \in (0, 1)$, the operator \mathcal{A}_δ is bounded from $L^p(\langle v \rangle^\alpha)$ to $L^\infty(\langle v \rangle^\beta M^{-1/2})$ as can be seen from Carleman's representation:

$$\mathcal{A}_\delta f(v) = \int_{\mathbb{R}^d} k_\delta(v, v_*) f(v_*) dv_*,$$

where $k_\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ (see [23, (4.9)]). By its integral nature in v , it is clear that

$$(2.1) \quad \mathcal{A}_\delta : \mathcal{E}^{p,\alpha} \rightarrow E^\beta$$

is also bounded. In the rest of the paper, we will be interested in the scaled version of \mathcal{B}_δ together with a transport term, which we denote

$$(2.2) \quad \mathcal{B}^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{B}_\delta + \varepsilon v \cdot \nabla_x).$$

Lemma 2.1. *Let $p \in [1, \infty)$, there exists $\alpha_{\mathcal{B}}(p) > 2$ such that for any $\alpha > \alpha_{\mathcal{B}}(p)$, if δ is small enough, $\overline{\mathcal{B}}_{\delta}$ is ν -bounded with relative bound less than one, and there holds for any $\varepsilon \in (0, 1)$ and $h \in \mathcal{E}^{p, \alpha}$*

$$(2.3) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathcal{B}^{\varepsilon} h, h \rangle_{H_x^s} \|h\|_{H_x^s}^{p-2} \langle v \rangle^{p\alpha} dv \leq -\frac{\sigma_{\mathcal{B}}(p, \alpha)}{\varepsilon^2} \|h\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}}^p,$$

$$\sigma_{\mathcal{B}}(p, \alpha) = \sigma_{\mathcal{B}}(p, \alpha; \delta) > 0,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_x^s}$ denotes the usual inner product in H_x^s , and $\mathcal{E}_\nu^{p, \alpha}$ was defined in Notations 1.3.

Proof. In [23], the authors prove a control on $\overline{\mathcal{B}}_{\delta}$ in the space $\mathcal{E}^{p, \alpha}$ by considering its positive variant:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\delta} f(v) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (1 - \Theta_{\delta}) (M'_* f' + M' f'_* + M f_*) |v - v_*| dv_* d\sigma,$$

so that one has by the triangle inequality

$$(2.4) \quad \|(\overline{\mathcal{B}}_{\delta} h)(v)\|_{H_x^s} \leq \left(\tilde{\mathcal{B}}_{\delta} (\|h\|_{H_x^s}) \right)(v),$$

and by proving the following estimate¹ for any $\alpha > 2$, where $o_{\delta}(1)$ designates any quantity that vanishes as $\delta \rightarrow 0$:

$$(2.5) \quad \left\| \tilde{\mathcal{B}}_{\delta} f \right\|_{L^p(\langle v \rangle^{\alpha})} \leq (\phi_p(\alpha) + o_{\delta}(1)) \|\nu f\|_{L^p(\langle v \rangle^{\alpha})},$$

$$\phi_p(\alpha) := \frac{4}{(\alpha + 2)^{1/p} (\alpha - 1)^{1/p'}}.$$

Let us now prove Lemma 2.1: by the definition of \mathcal{B}_{δ} and the skew-adjointness of $v \cdot \nabla_x$ in H_x^s for any $v \in \mathbb{R}^d$, one has

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathcal{B}_{\delta} h + \varepsilon v \cdot \nabla_x h, h \rangle_{H_x^s} \|h\|_{H_x^s}^{p-2} \langle v \rangle^{p\alpha} dv \\ &= -\|h\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}}^p + \int_{\mathbb{R}^d} \langle \overline{\mathcal{B}}_{\delta} h, h \rangle_{H_x^s} \|h\|_{H_x^s}^{p-2} \langle v \rangle^{p\alpha} dv \\ &\leq -\|h\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}}^p + \int_{\mathbb{R}^d} \|\overline{\mathcal{B}}_{\delta} h\|_{H_x^s} \|h\|_{H_x^s}^{p-1} \langle v \rangle^{p\alpha} dv. \end{aligned}$$

Using (2.4) and denoting to lighten the notation $g(v) := \|\nu^{1/p} h(v)\|_{H_x^s}$, we have

¹This estimate is actually proved for $\overline{\mathcal{B}}_{\delta}$ in [23, (4.32)], but as the authors point out in page 74, the same estimate holds for $\tilde{\mathcal{B}}_{\delta}$ with the same proof.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \|\mathcal{B}_\delta h\|_{H_x^s} \|h\|_{H_x^s}^{p-1} \langle v \rangle^{p\alpha} dv \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\nu^{-1/p'} \tilde{\mathcal{B}}_\delta \nu^{-1/p} \right) (g) \times g^{p-1} \langle v \rangle^{p\alpha} dv \\
& \leq \left\| \nu^{-1/p'} \tilde{\mathcal{B}}_\delta \nu^{-1/p} \right\|_{\mathcal{B}(L^p(\langle v \rangle^\alpha))} \|g\|_{L^p(\langle v \rangle^\alpha)}^p.
\end{aligned}$$

Using the estimate $\nu_0 \langle v \rangle \leq \nu(v) \leq \nu_1 \langle v \rangle$ and (2.5), one deduces that, under the condition $\alpha > 2 + 1/p'$, there holds

$$\begin{aligned}
\left\| \nu^{-1/p'} \tilde{\mathcal{B}}_\delta \nu^{-1/p} \right\|_{\mathcal{B}(L^p(\langle v \rangle^\alpha))} &= \left\| \nu^{-1/p'} \left(\tilde{\mathcal{B}}_\delta \nu^{-1} \right) \nu^{1/q} \right\|_{\mathcal{B}(L^p(\langle v \rangle^\alpha))} \\
&\leq \left\| \nu^{-1/p'} \right\|_{\mathcal{B}(L^p(\langle v \rangle^{\alpha-1/p'}); L^p(\langle v \rangle^\alpha))} \\
&\quad \times \left\| \tilde{\mathcal{B}}_\delta \nu^{-1} \right\|_{\mathcal{B}(L^p(\langle v \rangle^{\alpha-1/p'}))} \\
&\quad \times \left\| \nu^{1/p} \right\|_{\mathcal{B}(L^p(\langle v \rangle^\alpha); L^p(\langle v \rangle^{\alpha-1/p'}))} \\
&\leq \left(\frac{\nu_1}{\nu_0} \right)^{1/p'} \left(\phi_p(\alpha + 1/p') + o_\delta(1) \right).
\end{aligned}$$

To sum up, we have shown

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathcal{B}^\varepsilon h, h \rangle_{H_x^s} \|h\|_{H_x^s}^{p-2} \langle v \rangle^{p\alpha} dv \\
& \leq -\frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \left(\frac{\nu_1}{\nu_0} \right)^{1/p'} \phi_p(\alpha + 1/p') + o_\delta(1) \right) \|h\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}^p \\
& =: -\frac{\sigma_{\mathcal{B}}(p, \alpha)}{\varepsilon^2} \|h\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}^p.
\end{aligned}$$

The quantity $\sigma_{\mathcal{B}}(p, \alpha)$ is positive as soon as $\alpha > \alpha_{\mathcal{B}}(p)$ and δ is small enough, where we defined

$$(2.6) \quad \alpha_{\mathcal{B}}(p) := \inf \left\{ \alpha > 2 + 1/p' : \left(\frac{\nu_1}{\nu_0} \right)^{1/p'} \phi_p(\alpha + 1/p') < 1 \right\},$$

which concludes the proof of the lemma. \square

Remark 2.2. Note that the definition of $\sigma_{\mathcal{B}}(p, \alpha)$ actually depends on the choice of δ , but this does not make any difference in the rest of the paper as long as $\sigma_{\mathcal{B}}(p, \alpha) = \sigma_{\mathcal{B}}(p, \alpha; \delta) > 0$, so we do not mention it from now on as to lighten the notations.

Remark 2.3. The threshold $\alpha_{\mathcal{B}}(p)$ is monotonically increasing in p , and in the cases $p = 1$ and $p = \infty$, this threshold is simply

$$\alpha_{\mathcal{B}}(p) = \begin{cases} 2, & \text{when } p = 1, \\ 1 + 4 \frac{\nu_1}{\nu_0} > 5, & \text{when } p = \infty. \end{cases}$$

2.2. A priori estimates. In this section, we present the estimates necessary to the a priori study of the equation on h^ε in (1.23). We first prove a bound for the collision operator Q (Lemma 2.4), define for functions $t \mapsto h(t) \in \mathcal{E}^{p,\alpha}$ a norm which measures the exponential decay and moment gain induced by \mathcal{B}^ε in (1.23) uniformly in ε reminiscent of the ones from [2, Section 5.1], and finally we give a priori estimates for the equation on h^ε in (1.23) (Lemma 2.6).

This control on Q is inspired of [26, Lemma 2.3] in which the case $p = 2$ is treated for hard potentials without cut-off.

Lemma 2.4. Let $p \in [1, \infty]$, there exists $\alpha_Q(p) > 2$ such that, for any $\alpha > \alpha_Q(p)$, there exists some $C = C(p, \alpha) > 0$ satisfying

$$(2.7) \quad \|Q(f, g)\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha-1/p'}} \leq C (\|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}} \|g\|_{\mathcal{E}^{p', \alpha}} + \|f\|_{\mathcal{E}^{p', \alpha}} \|g\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}}),$$

and if $p < \infty$,

$$(2.8) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \langle Q(f, g), h \rangle_{H_x^s} \|h\|_{H_x^s}^{p-2} \langle v \rangle^{p\alpha} dv \\ \leq C (\|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}} \|g\|_{\mathcal{E}^{p', \alpha}} + \|f\|_{\mathcal{E}^{p', \alpha}} \|g\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}}) \|h\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}}^{p-1},$$

Proof. In this proof, we denote $q := p'$ so as not to cause confusion with the pre-collisional velocity notations v', v'_* , and we define the threshold

$$(2.9) \quad \alpha_Q(p) := 2 + \frac{d}{q}.$$

Step 1: Main reductions. First, note that the algebra structure of H_x^s implies

$$\begin{aligned} |\langle Q^+(f(v), g(v)), h(v) \rangle_{H_x^s}| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} |v - v_*| \langle f(v')g(v'_*), h(v) \rangle_{H_x^s} dv_* \right| \\ &\leq \|h(v)\|_{H_x^s} \int_{\mathbb{R}^d} |v - v_*| \|f(v')g(v'_*)\|_{H_x^s} dv_* \\ &\lesssim \|h(v)\|_{H_x^s} Q^+(\|f(v)\|_{H_x^s}, \|g(v)\|_{H_x^s}). \end{aligned}$$

The same estimate holds for Q^- , thus, denoting

$$\begin{aligned} F(v) &:= \|f(v)\|_{H_x^s}, \quad G(v) := \|g(v)\|_{H_x^s}, \\ m(v) &:= \langle v \rangle^\alpha, \end{aligned}$$

it is enough to prove

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} Q(F, G) H m^r dv \right| \leq C \left(\|F\|_{L^p(\langle v \rangle^{1/p} m)} \|G\|_{L^p(m)} + \|F\|_{L^p(m)} \|G\|_{L^p(\langle v \rangle^{1/p} m)} \right) \|H m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q}\|_{L^q},$$

where we recall the notation $L^p(m)$ is defined in (1.16). Indeed, this control will imply

- (2.7) for $H(v) := \|h(v)\|_{H_x^s}$ and $r = 2$, by duality,
- (2.8) for $H(v) := \|h(v)\|_{H_x^s}^{p-1}$ and $r = p$.

To do so, we only need to estimate the integral coming from Q^- :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} Q^-(F, G) H m^r dv \right| \lesssim \int |v - v_*| |F_*| |G| |H| m^r dv dv_* =: \mathbf{I}_1,$$

and the one coming from Q^+ . For the latter, we use the following estimate from [1, (2.1.13)]:

$$|m - m'| \lesssim \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(m' + \langle v'_* \rangle \langle v' \rangle^{\alpha-1} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} m'_* \right),$$

where we recall the notations $m' := m(v')$, $m_* := m(v_*)$ and $m'_* := m(v'_*)$. We will use it under the simpler form

$$m \lesssim m' + \langle v'_* \rangle \langle v' \rangle^{\alpha-1} + m'_* \theta^\alpha,$$

which suggests the splitting

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} Q^+(F, G) H m^r dv \right| &\lesssim \int |v - v_*| |F'_*| |G'| |H| m' m^{r-1} dv dv_* d\sigma \\ &\quad + \int |v - v_*| |F'_*| |G'| |H| \langle v'_* \rangle \langle v' \rangle^{\alpha-1} m^{r-1} dv dv_* d\sigma \\ &\quad + \int |v - v_*| |F'_*| |G'| |H| \theta^\alpha m'_* m^{r-1} dv dv_* d\sigma \\ &=: \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4. \end{aligned}$$

Step 1: Estimating \mathbf{I}_1 and \mathbf{I}_3 . We start by using the fact that

$$|v - v_*| \leq \langle v \rangle \langle v_* \rangle \leq \langle v \rangle^{1/p} \langle v \rangle^{1/q} \langle v_* \rangle,$$

which implies the following for \mathbf{I}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &\lesssim \int (|G| m \langle v \rangle^{1/p}) (|H| m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q}) dv \int |F_*| \langle v_* \rangle dv_* \\ (2.10) \quad &\lesssim \|G\|_{L^p(\langle m \rangle \langle v \rangle^{1/p})} \|H m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q}\|_{L^q} \|F\|_{L^1(\langle v \rangle)} \end{aligned}$$

where we used Hölder's inequality in the last line. We deal with \mathbf{I}_3 in a similar fashion, using $|v - v_*| = |v' - v'_*| \leq \langle v'_* \rangle \langle v' \rangle$, which yields this time

$$\mathbf{I}_3 \lesssim \|G\|_{L^p(m\langle v \rangle^{1/p})} \|Hm^{r-1}\|_{L^q} \|F\|_{L^1(\langle v \rangle^2)}.$$

Step 2: Estimating \mathbf{I}_2 . We use the following identity, which is a direct consequence of (1.2)

$$|v - v_*| = |v' - v'_*| = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} |v - v'_*|$$

and thus

$$|v - v_*| \leq |v' - v'_*|^{1/p} |v - v'_*|^{1/q} \leq \langle v' \rangle^{1/p} \langle v \rangle^{1/q} \langle v'_* \rangle.$$

From this and Hölder's inequality, we get the following control on \mathbf{I}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &\leq \left[\int \left(\langle v'_* \rangle^{1/p} |F'_*|^{1/p} |G'| \langle v' \rangle^{1/p} m' \right)^p dv dv_* d\sigma \right]^{1/p} \\ &\quad \times \left[\int \left(\langle v'_* \rangle^{1/q} |F'_*|^{1/q} |H| \langle v \rangle^{1/q} m^{r-1} \right)^q dv dv_* d\sigma \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

Using the change of variables $(v, v_*) \mapsto (v', v'_*)$ in the first integral and $v_* \mapsto v'_*$ in the second, whose respective Jacobian determinants are

$$\left| \frac{d(v, v_*)}{d(v', v'_*)} \right| = 1, \quad \left| \frac{dv'_*}{dv_*} \right| = \frac{1 + \cos \theta}{8},$$

we obtain the estimate

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &\leq \left[\int \left(\langle v_* \rangle^{1/p} |F_*|^{1/p} |G| \langle v \rangle^{1/p} m \right)^p dv dv_* \right]^{1/p} \\ &\quad \times \left[\int \left(\langle v_* \rangle^{1/q} |F_*|^{1/q} |H| \langle v \rangle^{1/q} m^{r-1} \right)^q dv dv_* d\sigma \right]^{1/q}. \end{aligned}$$

We conclude that \mathbf{I}_2 satisfies (2.10) using again Hölder's inequality on each integral.

Step 3: Estimating \mathbf{I}_4 . We use this time the bound

$$|v' - v| = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} |v - v_*| \lesssim \theta^{-1} |v - v_*|,$$

which yields

$$|v' - v| \lesssim \theta^{-1/q} |v - v'|^{1/q} |v' - v'_*|^{1/p} \lesssim \theta^{-1/q} \langle v' \rangle \langle v'_* \rangle^{1/p} \langle v \rangle^{1/q}.$$

Plugging this estimate in \mathbf{I}_4 , we get

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_4 &\lesssim \int \theta^{\alpha-(1+1/q)} (\langle v \rangle |g|)' (|F| m \langle v \rangle^{1/p})'_* (|H| m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q}) dv dv_* d\sigma \\
&\lesssim \left(\int \theta^{\alpha-(1+1/q)} (\langle v \rangle |g|)' \left[(|F| m \langle v \rangle^{1/p})'_* \right]^p dv dv_* d\sigma \right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(\int \theta^{\alpha-(1+1/q)} (\langle v \rangle |G|)' (|H| m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q})^q dv dv_* d\sigma \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

where we used Hölder's inequality. Using then $(v, v_*) \mapsto (v', v'_*)$ in the first integral and $v' \mapsto v_*$ in the second one, which is such that $\left| \frac{dv_*}{dv'} \right| \lesssim \theta^{-2}$, one gets

$$\mathbf{I}_4 \lesssim \|G\|_{L^1(\langle v \rangle)}^{1/p} \|F\|_{L^p(m \langle v \rangle^{1/p})} \times \left(\int (\langle v \rangle |G|)' (|H| m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q})^q \int \theta^{\alpha-(3+1/q)} d\sigma dv dv' \right)^{1/q}.$$

Recall that θ is the angle formed by $(v - v_*, \sigma)$. We need to rewrite the σ -integral in terms of v and v' before rewriting it in spherical coordinates so let us consider instead the angle ψ formed by $(v - v', \sigma)$. The following relations hold:

$$\psi = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad \cos \psi = \frac{v - v'}{|v - v'|} \cdot \sigma.$$

We then bound \mathbf{I}_4 as

$$\mathbf{I}_4 \lesssim \left(\int (\pi - 2\psi)^{\alpha-(3+1/q)} \sin \psi^{d-2} d\psi \right) \times \|G\|_{L^1(\langle v \rangle)} \|F\|_{L^p(m \langle v \rangle^{1/p})} \|H m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q}\|_{L^q}$$

Because of the assumption on α , we have $\alpha - (3+1/q) > -1$, therefore the singularity is integrable and the integral converges. Finally, we have that, for some positive $C_0 = C_0(\alpha)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_j &\leq C_0 \|G\|_{L^p(m \langle v \rangle^{1/p})} \|H m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q}\|_{L^q} \|F\|_{L^1(\langle v \rangle^2)} \\
&\leq C_0 \|\langle v \rangle^{(2-\alpha)q}\|_{L^1}^{1/q} \|G\|_{L^p(m \langle v \rangle^{1/p})} \|H m^{r-1} \langle v \rangle^{1/q}\|_{L^q} \|F\|_{L^p(m)}.
\end{aligned}$$

The conclusion follows with $C = C_0 \|\langle v \rangle^{(2-\alpha)q}\|_{L^1}^{1/q}$, which is finite because the assumption on α implies $(2-\alpha)q < -d$. \square

We now prove the a priori estimates for the equation on h^ε from (1.23), but first let us introduce a norm which measures the exponential decay and the moment gain induced by \mathcal{B}^ε .

Notations 2.5. For any $p \in [1, \infty]$, $\alpha > \alpha_{\mathcal{B}}$, $\sigma \in (0, \sigma_{\mathcal{B}})$ and $\varepsilon \in (0, 1)$, where $\alpha_{\mathcal{B}}$ and $\sigma_{\mathcal{B}}$ are defined in Lemma 2.1, denote the functional spaces

$$\mathcal{X}_\varepsilon^{p, \alpha, \sigma} = \mathcal{C}_b([0, T]; \mathcal{E}^{p, \alpha}) \cap L^p([0, T]; \mathcal{E}_\nu^{p, \alpha}),$$

where \mathcal{C}_b is defined in Notations 1.3, T in Section 1.4, and endowed with the norm

$$\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}}^p := \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\frac{1}{p} \left(e^{\sigma t/\varepsilon^2} \|h(t)\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}} \right)^p + \frac{\sigma_{\mathcal{B}} - \sigma}{\varepsilon^2} \int_0^t \left(e^{\sigma t'/\varepsilon^2} \|h(t')\|_{\mathcal{E}_\nu^{p,\alpha}} \right)^p dt' \right),$$

if $p < \infty$, and

$$\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{\infty,\alpha,\sigma}} := \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| e^{\sigma t/\varepsilon^2} h(t) \right\|_{\mathcal{E}^{\infty,\alpha}}$$

otherwise.

Lemma 2.6. *Let $\alpha > \max\{\alpha_{\mathcal{B}}, \alpha_Q\}$, $\sigma \in (0, \sigma_{\mathcal{B}})$, $\beta \geq 0$. For any $h \in L^\infty([0, T]; \mathcal{E}^{p,\alpha}) \cap L^p([0, T]; \mathcal{E}_\nu^{p,\alpha})$ and $g \in L^\infty([0, T]; E^\beta)$, the evolution equation*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{h} = \mathcal{B}^\varepsilon \bar{h} + \frac{1}{\varepsilon} Q(h, h) + \frac{1}{\varepsilon} Q(h, g), \\ \bar{h}(0) \in \mathcal{E}^{p,\alpha}, \end{cases}$$

has a unique solution $\bar{h} \in \mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}$. Furthermore, it satisfies for some $C = C(p, \alpha, \beta)$

$$(2.11) \quad \|\bar{h}\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} \leq C\varepsilon \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} \left(\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} + \|g\|_{L_t^\infty E^\beta} \right) + \|\bar{h}(0)\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}},$$

as well as the stability estimate for any pair of solutions \bar{h}_1, \bar{h}_2 and corresponding source terms h_1, g_1, h_2, g_2 :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \|\bar{h}_1 - \bar{h}_2\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} &\leq C\varepsilon \|h_1 - h_2\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} \left(\|h_1 + h_2\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} + \|g_1\|_{L_t^\infty E^\beta} \right) \\ &\quad + C\varepsilon \|h_2\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} \|g_1 - g_2\|_{L_t^\infty E^\beta} + \|\bar{h}_1(0) - \bar{h}_2(0)\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}. \end{aligned}$$

Proof. We will denote in this proof $\mathcal{X}_\varepsilon = \mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{p,\alpha}$, $\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_\nu^{p,\alpha}$ to lighten the notations. As the constant C in Lemma 2.4 is such that $\limsup_{p \rightarrow \infty} C(p, \alpha) < \infty$, it is enough to assume $p < \infty$ first and conclude the case of p infinite by letting $p \rightarrow \infty$. We will only prove (2.11) because the stability estimate (2.12) comes from similar calculations.

We start by assuming $p < \infty$. Applying (2.3) to the identity

$$\frac{d}{dt} \left(\|\bar{h}\|_{\mathcal{E}}^p \right) = p \int_{\mathbb{R}^d} \langle \partial_t \bar{h}, \bar{h} \rangle_{H_x^s} \|\bar{h}\|_{H_x^s}^{p-2} \langle v \rangle^{p\alpha} dv,$$

we obtain the differential inequality

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p} \|\bar{h}\|_{\mathcal{E}}^p \right) &+ \frac{\sigma_{\mathcal{B}}}{\varepsilon^2} \|\bar{h}\|_{\mathcal{E}_\nu}^p \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \langle Q(h, h) + Q(h, g), \bar{h} \rangle_{H_x^s} \|\bar{h}\|_{H_x^s}^{p-2} \langle v \rangle^{p\alpha} dv \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \left[\|h\|_{\mathcal{E}} \|h\|_{\mathcal{E}_\nu} + \|h\|_{\mathcal{E}_\nu} \|g\|_{\mathcal{E}} + \|h\|_{\mathcal{E}} \|g\|_{\mathcal{E}_\nu} \right] \|\bar{h}\|_{\mathcal{E}_\nu}^{p-1}, \end{aligned}$$

where we used Lemma 2.4, from which the constant $C = C(p, \alpha)$ is from and satisfies $\limsup_{p \rightarrow \infty} C(p, \alpha) < \infty$. Multiplying both sides by $\exp(tp\sigma/\varepsilon^2)$ (recall $\sigma \in (0, \sigma_B)$) and using the continuous inclusion $E^\beta \subset \mathcal{E}$, we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p} e^{\sigma pt/\varepsilon^2} \|\bar{h}\|_{\mathcal{E}}^p \right) + \frac{\sigma_B - \sigma}{\varepsilon^2} e^{\sigma pt/\varepsilon^2} \|\bar{h}\|_{\mathcal{E}_\nu}^p \\ \leq \frac{C}{\varepsilon} (\|h\|_{\mathcal{E}} + \|g\|_{E^\beta}) \left(e^{\sigma t/\varepsilon^2} \|h\|_{\mathcal{E}_\nu} \right) \left(e^{\sigma t/\varepsilon^2} \|\bar{h}\|_{\mathcal{E}_\nu} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Integrating and using Hölder's inequality with the exponents $(\infty, p, \frac{p}{p-1})$, one gets

$$\begin{aligned} \|\bar{h}\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}^p \leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \|g\|_{L_t^\infty E^\beta} \right) \times \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \left(\int_0^t \left(e^{\sigma t'/\varepsilon^2} \|h(t')\|_{\mathcal{E}_\nu} \right)^p dt' \right)^{1/p} \right. \\ \left. \times \left(\int_0^t \left(e^{\sigma t'/\varepsilon^2} \|\bar{h}(t')\|_{\mathcal{E}} \right)^p dt' \right)^{\frac{p-1}{p}} \right\}, \end{aligned}$$

from which we deduce

$$\begin{aligned} \|\bar{h}\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}^p \leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \|g\|_{L_t^\infty E^\beta} \right) \left(\varepsilon^2 \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}^p \right)^{1/p} \left(\varepsilon^2 \|\bar{h}\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ \leq C\varepsilon \left(\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \|g\|_{L_t^\infty E^\beta} \right) \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \|\bar{h}\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}^{p-1}. \end{aligned}$$

This concludes the proof. \square

3. BOUNDS AND ASYMPTOTICS OF THE SEMIGROUP

In this section, we establish integrability properties and asymptotics on the semigroup U^ε , necessary to prove the vanishing of the coupling term $\varepsilon^{-2} U^\varepsilon * \mathcal{A}h^\varepsilon$ in $L_t^1 E^\beta + L_t^\infty E^\beta$ (Lemmas 4.7-4.8) and the vanishing of the source term $\mathcal{S}^\varepsilon[h^\varepsilon]$ from (1.23) (Lemma 4.10). This will require to generalize some estimates proved in [17, 5] in E^β to the larger space $\mathcal{E}^{p,\alpha}$. To do so, we draw inspiration from the factorization techniques used in [5, Section 5], using this time the splitting of the linearized operator \mathcal{L} recalled in Section 2.1. For the sake of completeness, we prove some results already present in [5, 17].

3.1. The eigenprojectors and partial semigroups on the Gaussian space.

Let us first recall the spectral study originally led in [14] for hard cutoff potentials in the space $L^2(M^{-1/2})$. We also mention the founding paper [37] which has initiated the study of the spectrum of the linearized Boltzmann operator, and such works as [18, 43, 39] in which these results were partially generalized.

For a family of operator $(T(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$ acting on the v -variable, we define the Fourier multipliers $T(D)$ acting on functions $u = u(x, v)$ by

$$\widehat{T(D)u}(\xi, v) := \left(T(\xi) \widehat{u}(\xi, \cdot) \right)(v),$$

where $u \mapsto \widehat{u}$ represents the Fourier transform with respect to the variable $x \in \Omega$. Note that such operators commute with $D = -i \frac{d}{dx}$ and any Fourier multiplier $f(D)$.

Spectral decomposition and expansions in Fourier space. According to [18, Theorems 1 and 2], there exist $\mathbf{r} > 0$ (which can be assumed as small as necessary) and $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \in (0, \nu_0)$, where ν_0 was presented in Section 1.1.1, a family of projectors $(\mathcal{P}_{b,j}^{(\ell)}(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$ uniformly bounded in $\mathcal{B}(L_v^2(M^{-1/2}))$, complex numbers $(\lambda_j(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$, and closed operators $(\mathcal{L}_\sharp(\xi))_{\xi \in \mathbb{R}^d}$ in $\mathcal{C}(L_v^2(M^{-1/2}))$, with $j = -1, \dots, 2$ and $\ell = 0, 1, 2$, such that the following spectral decomposition holds in Fourier space for any $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$(3.1) \quad \mathcal{L} + iv \cdot \xi = \sum_{j=-1}^2 \lambda_j(\xi) \mathcal{P}_{b,j}(\xi) + \mathcal{L}_\sharp(\xi),$$

$$(3.2) \quad \mathcal{P}_{b,j} \mathcal{L}_\sharp = \mathcal{L}_\sharp \mathcal{P}_{b,j} = \mathcal{P}_{b,j} \mathcal{P}_{b,k} = 0, \quad j \neq k,$$

and the operator $\mathcal{L}_\sharp(\xi) + \mathbf{a}$ generates a bounded \mathcal{C}^0 -semigroup, uniformly in ξ . These eigenprojectors and eigenvalues expand around $\xi = 0$:

$$(3.3) \quad \lambda_j(\xi) = \lambda_j^{(1)} |\xi| + \lambda_j^{(2)} |\xi|^2 + O(|\xi|^3), \quad \lambda_j^{(1)} \in i\mathbb{R}, \quad \lambda_j^{(2)} < 0,$$

$$(3.4) \quad \mathcal{P}_{b,j}(\xi) = \mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\tilde{\xi}) + |\xi| \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} := \frac{\xi}{|\xi|},$$

and the zeroth order eigenprojectors sum to the $L_v^2(M^{-1/2})$ orthogonal projection on the null space of \mathcal{L} :

$$(3.5) \quad \Pi = \sum_{j=-1}^2 \mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\tilde{\xi}).$$

In [18], the projectors $\mathcal{P}_{b,j}(\xi)$ and eigenvalues $\lambda_j(\xi)$ are actually defined for small frequencies $|\xi| \leq \mathbf{r}$, we assume here for simplicity that they are defined for any $\xi \in \mathbb{R}^d$ but vanish for $|\xi| > \mathbf{r}$, and we denote χ the characteristic function of $\{|\xi| \leq \mathbf{r}\}$.

Transposition to the physical space. Let us denote by H the following weighted Sobolev space:

$$(3.6) \quad H := L_v^2 H_x^s(M^{-1/2}) = H_x^s L_v^2(M^{-1/2}),$$

endowed with the norm

$$\|f\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi, v)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} M^{-1}(v) dv d\xi, \text{ if } \Omega = \mathbb{R}^d,$$

$$\|f\|_H^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^d} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi, v)|^2 M^{-1}(v) dv, \text{ if } \Omega = \mathbb{T}^d.$$

Following the previous spectral decomposition in Fourier space, we define for the scaled linearized operator $\varepsilon^{-2}(\mathcal{L} + i\varepsilon v \cdot \xi)$ the *approximate hydrodynamic projector* and associated partial semigroup:

$$(3.7) \quad \mathbf{P}_b^\varepsilon := \sum_{j=-1}^2 \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D),$$

$$(3.8) \quad U_b^\varepsilon := U^\varepsilon \mathbf{P}_b^\varepsilon = \mathbf{P}_b^\varepsilon U^\varepsilon = \sum_{j=-1}^2 \exp(t\lambda_j(\varepsilon D)/\varepsilon^2) \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D).$$

Since the operator \mathcal{L} is non-positive on $L_v^2(M^{-1/2})$ (see [42, Proposition 2.11]) and $v \cdot \nabla_x$ is skew-adjoint in H_x^s for any $v \in \mathbb{R}^d$, the scaled linearized operator $\varepsilon^{-2}(\mathcal{L} + \varepsilon v \cdot \nabla_x)$ is non-positive and thus U^ε is a contraction semigroup on H . We deduce by the uniform bounds on $\mathcal{P}_{b,j}^{(\ell)}(\xi)$ that for some $C > 0$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{P}_b^\varepsilon\|_{\mathcal{B}(H)} &\leq C, \\ \|U_b^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{B}(H)} &\leq C. \end{aligned}$$

We also define the complementary projector and partial semigroup:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\#^\varepsilon &:= \text{Id} - \mathbf{P}_b^\varepsilon, \\ U_\#^\varepsilon &:= U^\varepsilon \mathbf{P}_\#^\varepsilon = \mathbf{P}_\#^\varepsilon U^\varepsilon = \exp(t\mathcal{L}_\#(\varepsilon D)/\varepsilon^2). \end{aligned}$$

By the boundedness of \mathbf{P}_b^ε and the fact that $\mathcal{L}_\#(D) + \mathbf{a}$ generates a bounded \mathcal{C}^0 semigroup on H , we may also assume that the constant C is such that

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{P}_\#^\varepsilon\|_{\mathcal{B}(H)} &\leq C, \\ \|U_\#^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{B}(H)} &\leq C e^{-at/\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Asymptotic behavior of U_b^ε . The coefficients in the expansion of the scaled eigenvalues $\lambda_j(\xi)$ and the corresponding eigenmodes indicate (see [14, 18], [17, Proposition A.3] and [42, Remark 2.2.12]) that, for $j = 0, 2$, the eigenvalues correspond to the diffusion terms in (INSF), and the projectors to the corresponding subspaces of macroscopic distributions $\left(\rho(x) + u(x) \cdot v + \frac{1}{d}(|v|^2 - d)\right)M(v)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-2}\lambda_0(\varepsilon D) &\approx -\lambda_0^{(2)}\Delta_x = \kappa\Delta_x, \\ \mathcal{P}_{b,0}(\varepsilon D) &\approx \mathcal{P}_{b,0}^{(0)}(\widetilde{D}) = H\text{-orthogonal projection on } \rho + \theta = 0, \\ \varepsilon^{-2}\lambda_2(\varepsilon D) &\approx -\lambda_2^{(2)}\Delta_x = \mu\Delta_x, \\ \mathcal{P}_{b,2}(\varepsilon D) &\approx \mathcal{P}_{b,2}^{(0)}(\widetilde{D}) = H\text{-orthogonal projection on } \nabla_x \cdot u = 0,\end{aligned}$$

where we recall that μ and κ are respectively the kinematic viscosity and thermal conductivity of the fluid represented by M , and \widetilde{D} is the pseudodifferential operator associated with the symbol $\widetilde{\xi} = \xi/|\xi|$. This means that $\mathcal{P}_{b,0}^{(0)}(\widetilde{D}) + \mathcal{P}_{b,2}^{(0)}(\widetilde{D})$ is the projector on well-prepared distributions defined in (1.9), and also that we have the following expression for the semigroup of the incompressible Navier-Stokes-Fourier system in its kinetic formulation (KINSF), presented in [5]:

$$(3.11) \quad U^0(t) := e^{\kappa t \Delta_x} \mathcal{P}_{b,0}^{(0)}(\widetilde{D}) + e^{\mu t \Delta_x} \mathcal{P}_{b,2}^{(0)}(\widetilde{D}),$$

$$(3.12) \quad \Psi^0(t)(f, g) := \int_0^t U^0(t-t') \left(\mathcal{P}_{b,0}^{(1)}(\widetilde{D}) + \mathcal{P}_{b,2}^{(1)}(\widetilde{D}) \right) Q(f(t'), g(t')) dt'.$$

Similarly, for $j = \pm 1$, denoting c the speed of sound in the gas represented by M , we have the following asymptotics:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-2}\lambda_{\pm 1}(\varepsilon D) &\approx \pm i \frac{c}{\varepsilon} |D| + \kappa \Delta_x, \\ \mathcal{P}_{b,1}^{(0)}(\varepsilon D) + \mathcal{P}_{b,-1}^{(0)}(\varepsilon D) &\approx \mathcal{P}_{b,1}^{(0)}(\widetilde{D}) + \mathcal{P}_{b,-1}^{(0)}(\widetilde{D}) \\ &= H\text{-orthogonal projection on} \\ &\quad \text{ill-prepared macro. distributions.}\end{aligned}$$

We define the semigroup $U_{\text{disp}}^\varepsilon$ corresponding to these acoustic waves through

$$(3.13) \quad U_{\text{disp}}^\varepsilon(t) e^{-t\kappa\Delta_x} := e^{it\frac{c}{\varepsilon}|D|} \mathcal{P}_{b,1}^{(0)}(\widetilde{D}) + e^{-it\frac{c}{\varepsilon}|D|} \mathcal{P}_{b,-1}^{(0)}(\widetilde{D}),$$

so as to highlight the presence of the wave operator. Using the notations of Section 1.1.2, the orthogonality relation (3.2) implies that

$$(3.14) \quad \begin{aligned}U^0 U_{\text{disp}}^\varepsilon &= U_{\text{disp}}^\varepsilon U^0 = 0, \\ U^0 f &= U^0 f_{\text{in,WP}}, \quad U_{\text{disp}}^\varepsilon f = U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}\end{aligned}$$

These hydrodynamic semigroups U^0 and $U_{\text{disp}}^\varepsilon$ were shown in [5] to drive the dynamics of U_b^ε , which is made explicit by this next lemma adapted from [17, Lemma 3.5]

Lemma 3.1. *For any $\beta > d/2$ and $f \in E^\beta$, there holds*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{t \geq 0} \langle t \rangle^{1/2} \left\| \left(U_b^\varepsilon(t) - U^0(t) - U_{\text{disp}}^\varepsilon(t) \right) \Pi f \right\|_{E^\beta} \right) = 0.$$

Proof. Recalling that $U_b^\varepsilon = U^\varepsilon - U_\#^\varepsilon$ (our notations are consistent with [17]), this lemma comes simply from a density argument applied to [17, Lemma 3.5, (3.12)-(3.13)] which we explain for clarity. This is possible because of the finite-dimensional (in v) nature of Πf :

$$(3.15) \quad \Pi f(x, v) = \left(\rho_f(x) + u_f(x) + \frac{1}{2} (|v|^2 - d) \theta_f(x) \right) M(v),$$

where ρ_f, u_f, θ_f are H_x^s functions and thus can be approximated by smooth functions. \square

Let us also recall that the authors of [5] proved that $\Psi^\varepsilon(f, g) \rightarrow \Psi^0(f, g)$ in a weaker topology than that of $L_t^\infty E^\beta$, and those of [17] proved it when $f = g = f^0$ by using the properties of the limit system (INSF), we cite [17, Lemma 4.1] here

Lemma 3.2. *For any $\beta > d/2 + 1$, there holds*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{0 \leq t < T} \chi_\Omega(t) \|\Psi^\varepsilon(f^0, f^0) - \Psi^0(f^0, f^0)\|_{E^\beta} \right) = 0,$$

where $\chi_\Omega(t) = \langle t \rangle^{1/4}$ if $\Omega = \mathbb{R}^2$, and $\chi_\Omega(t) = 1$ otherwise.

Finally, the acoustic part was shown in [17] to be bounded, decay for large times, and vanish in a weaker topology when the domain Ω is the whole space, as explained by this lemma.

Lemma 3.3. *For any $\beta > \frac{d}{2}$, there exists $C > 0$ such that*

$$(3.16) \quad \|U_{\text{disp}}^\varepsilon(t)f\|_{E^\beta} \leq C \|f\|_{E^\beta},$$

$$(3.17) \quad \langle t \rangle^{d/4} \|U_{\text{disp}}^\varepsilon(t)f\|_{E^\beta} \leq C \left(\|f\|_{L_v^2 L_x^1(M^{-1/2})} + \|f\|_{E^\beta} \right),$$

furthermore, if $\Omega = \mathbb{R}^d$ and f is a Schwartz function, there holds for some $C_f > 0$

$$(3.18) \quad \|U_{\text{disp}}^\varepsilon(t)f\|_{L_v^\infty W_x^{s, \infty}(\langle v \rangle^\beta M^{-1/2})} \leq C_f \left(\frac{\varepsilon}{t} \right)^{\frac{d-1}{2}}.$$

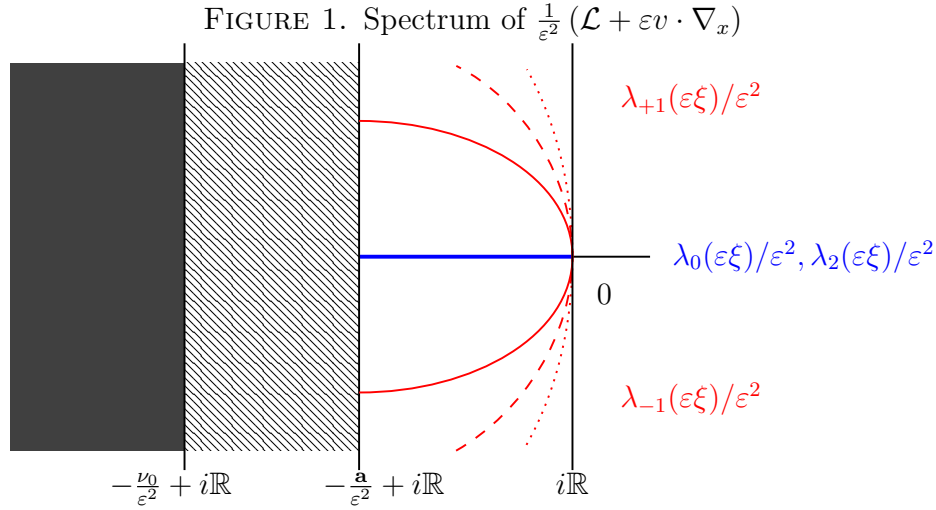
Note that the estimate (3.16) comes from (3.13) and the fact that $\mathcal{P}_{b, \pm 1}^{(0)}(\widetilde{D})f$ is a linear combination of functions of the form

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle f(v_*, \cdot), g \rangle_{H_x^s} P_1(v_*) M(v_*) dv_* \right) P_2 M$$

for some polynomials P_1, P_2 and $g \in H_x^s$. The estimate (3.17) is [17, (3.25)], and (3.18) is a direct consequence of the last estimate of [17, p. 587].

3.2. Spectral properties on the polynomial spaces. We now extend some of the properties of U_b^ε proved on $\mathcal{B}(H)$ in [17] to $\mathcal{B}(\mathcal{E}^{p, \alpha}; E^\beta)$. This will be made possible using factorization techniques with the Gualdani-Mischler-Mouhot decomposition $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ and *Grad's decomposition* (see [22, 42]):

$$(3.19) \quad \mathcal{L} = -\nu + K$$



The horizontal eigenvalue branch corresponds to (INSF). The curved branch, which gets closer to the imaginary axis as $\varepsilon \rightarrow 0$, corresponds to the acoustic waves. The hatched part may contain spectral values, and the solid part is included in the spectrum.

where ν was defined by (1.3), and K satisfies the following regularization property:

$$(3.20) \quad \forall \beta \geq 0, K \in \mathcal{B}(H; E^0) \cap \mathcal{B}(E^\beta; E^{\beta+1}).$$

As a first step, we will study operators $\mathcal{R}_j^\varepsilon$ and R_j^ε (Lemmas 3.4 and 3.6) which appear in factorization formulas ((3.27) and (3.31)) for $\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D)$, this will allow to prove boundedness properties (Lemma 3.5 and 3.7) for the coefficients in the expansion (coming from (3.3))

$$\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) = \mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\tilde{D}) + \varepsilon |D| \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D).$$

These properties will be used to prove bounds and asymptotics on U_b^ε and U_{\sharp}^ε (Lemmas 3.8-3.10).

We recall that $\alpha_B, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{B}^\varepsilon$ were defined in Section 2.1, and that

$$\mathcal{B}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathcal{B} + \varepsilon \cdot \nabla_x).$$

Lemma 3.4. *For any $p \in [1, \infty]$, $\alpha > \alpha_B$, $j = -1, \dots, 2$, the following operator is well-defined and bounded uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$:*

$$\mathcal{R}_j^\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A} (\varepsilon^{-2} \lambda_j(\varepsilon D) - \mathcal{B}^\varepsilon)^{-1} \chi(\varepsilon D) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^{p,\alpha}; H),$$

where the inverse is to be understood on the range $\chi(\varepsilon D) \mathcal{E}^{p,\alpha}$. It expands as

$$\mathcal{R}_j^\varepsilon = -\mathcal{A} \mathcal{B}^{-1} + \varepsilon |D| \mathcal{R}_j^{\varepsilon,1},$$

with $\mathcal{R}_j^{\varepsilon,1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^{p,\alpha}; H)$ uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$, and every term commutes with D .

Proof. In this proof, we drop the subscript j and denote

$$\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha} := \chi(\varepsilon D)\mathcal{E}^{p,\alpha} = \left\{ f \in \mathcal{E}^{p,\alpha} : \widehat{f}(\xi) = 0 \text{ if } \varepsilon|\xi| > \mathbf{r} \right\},$$

$$T^\varepsilon := \varepsilon \nu \cdot \nabla_x - \lambda(\varepsilon D),$$

so that the regularizing operator rewrites

$$(3.21) \quad \mathcal{R}^\varepsilon = -\mathcal{A}(\mathcal{B} + T^\varepsilon)^{-1} \chi(\varepsilon D).$$

In the two first steps, we will prove the following properties:

$$(3.22) \quad \mathcal{B}\nu^{-1} \text{ is invertible on } \mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha} \text{ and its inverse is bounded by } c > 0,$$

$$(3.23) \quad \|T^\varepsilon \nu^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha})} \leq \frac{1}{2c},$$

$$(3.24) \quad T^\varepsilon = \varepsilon|D|T^{\varepsilon,1} \text{ and } \|T^{\varepsilon,1}\nu^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha})} \leq c,$$

and then use them in a third step to prove the lemma.

Step 1: Proof of (3.22). According to [23, (4.33)], $\mathcal{B} - \nu$ is ν -bounded with relative bound less than 1 (see Lemma 2.1), thus,

$$\mathcal{B}\nu^{-1} = \text{Id} + (\mathcal{B} - \nu)\nu^{-1},$$

which implies (3.22) because $\|(\mathcal{B} - \nu)\nu^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha})} < 1$.

Step 2: Proof of (3.23) and (3.24). By (3.3), $T^\varepsilon \nu^{-1}$ is a Fourier multiplier in x whose symbol is of the form

$$\begin{aligned} -i\varepsilon\xi \cdot \frac{\nu}{\nu} - \frac{\lambda^{(1)}}{\nu}\varepsilon|\xi| + O\left(\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{\nu}\right) \\ = \varepsilon|\xi| \left(\tilde{\xi} \cdot \frac{\nu}{\nu} - \frac{\lambda^{(1)}}{\nu} + O(\varepsilon|\xi|) \right), \end{aligned}$$

so there holds indeed

$$T^\varepsilon = \varepsilon|D|T^{\varepsilon,1}.$$

Furthermore, on $\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha}$, we have by definition $\varepsilon|\xi| \leq \mathbf{r}$, it is then clear that the operators $T^\varepsilon \nu^{-1}$ and $T^{\varepsilon,1}\nu^{-1}$ are bounded on $\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha}$ uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$. Finally, up to a reduction of \mathbf{r} , there also holds $\|T^\varepsilon \nu^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha})} \leq 1/2c$.

Step 3: Proof of the lemma. Because of assumptions (3.22) and (3.23), the following operator is well-defined on $\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha}$ and bounded by $1/2\nu_0$:

$$(\mathcal{B} + T^\varepsilon)^{-1} = \nu^{-1} (\mathcal{B}\nu^{-1} + T^\varepsilon \nu^{-1})^{-1}$$

Combined with (3.21) and the regularization property (2.1), this yields the boundedness property $\mathcal{R}^\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^{p,\alpha}; H)$ uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$. Let us now turn to its expansion; there holds on $\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha}$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B} + T^\varepsilon)^{-1} &= \mathcal{B}^{-1} + \mathcal{B}^{-1} (T^\varepsilon \nu^{-1}) (\mathcal{B} \nu^{-1} + T^\varepsilon \nu^{-1})^{-1} \\
&= \mathcal{B}^{-1} + \varepsilon |D| \mathcal{B}^{-1} (T^{\varepsilon,1} \nu^{-1}) (\mathcal{B} \nu^{-1} + T^\varepsilon \nu^{-1})^{-1} \\
&=: \mathcal{B}^{-1} + \varepsilon |D| S^\varepsilon,
\end{aligned}$$

where $S^\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_{\mathbf{r}/\varepsilon}^{p,\alpha})$ uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$. We deduce that

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\varepsilon &= -\mathcal{A} (\mathcal{B} + T^\varepsilon)^{-1} \chi(\varepsilon D) \\
&= -\mathcal{A} \mathcal{B} \chi(\varepsilon D) + \varepsilon |D| S^\varepsilon \chi(\varepsilon D) \\
&= -\mathcal{A} \mathcal{B} + \varepsilon |D| \mathcal{R}^{\varepsilon,1},
\end{aligned}$$

where we let

$$\mathcal{R}^{\varepsilon,1} := S^\varepsilon \chi(\varepsilon D) + (\varepsilon |D|)^{-1} (\text{Id} - \chi(\varepsilon D)) \mathcal{A} \mathcal{B}^{-1},$$

which is a bounded operator in virtue of the inequality $1 - \chi(\varepsilon \xi) \leq \varepsilon |\xi|/\mathbf{r}$. \square

Lemma 3.5. *For any $p \in [1, \infty]$ and $\alpha > \alpha_{\mathcal{B}}$, there exists $C > 0$ such that*

$$(3.25) \quad \|\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) f\|_H \leq C \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}},$$

$$(3.26) \quad \left\| \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) f \right\|_H \leq C \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}.$$

where we recall that $H = L_v^2 H_x^s (M^{-1/2})$.

Proof. From the relations (3.1)-(3.2) and the splitting $\mathcal{L}^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \mathcal{A} + \mathcal{B}^\varepsilon$, there holds

$$\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) \mathcal{L}^\varepsilon = \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) \varepsilon^{-2} \lambda_j(\varepsilon D) = \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) (\varepsilon^{-2} \mathcal{A} + \mathcal{B}^\varepsilon),$$

which can be rearranged as

$$\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) (\varepsilon^{-2} \lambda_j(\varepsilon D) - \mathcal{B}^\varepsilon) = \varepsilon^{-2} \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) \mathcal{A},$$

and thus the following factorization formula holds:

$$(3.27) \quad \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) = \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) \mathcal{R}_j^\varepsilon,$$

where $\mathcal{R}_j^\varepsilon$ is that of Lemma 3.4. Thanks to the boundeness of $\mathcal{R}_j^\varepsilon$ proved in Lemma 3.4, and the boundeness $\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) \in \mathcal{B}(H)$ recalled in the beginning of the section, we deduce that, uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$, there holds $\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^{p,\alpha}; H)$.

Furthermore, injecting the expansion from Lemma 3.4 and the one of $\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D)$ in (3.27), we get

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) &= -\mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\widetilde{D}) \mathcal{A} \mathcal{B}^{-1} \\
&\quad + \varepsilon |D| \left(\mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) \mathcal{R}_j + \mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\widetilde{D}) \mathcal{R}_j^{\varepsilon,1} \right),
\end{aligned}$$

and thus, identifying the first order coefficient, we have

$$\mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) = \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) \mathcal{R}_j^\varepsilon + \mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\widetilde{D}) \mathcal{R}_j^{\varepsilon,1}.$$

Since $\mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) \in \mathcal{B}(H)$ uniformly in ε , we conclude that $\mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}^{p,\alpha}; H)$ uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$ thanks to Lemma 3.4. \square

Lemma 3.6. *For any $j = -1, \dots, 2$, the following operator is well-defined:*

$$R_j^\varepsilon := K(\lambda_j(\varepsilon D) - \nu + \varepsilon v \cdot \nabla_x)^{-1} \chi(\varepsilon D),$$

furthermore, it expands as

$$R_j^\varepsilon = -K\nu^{-1} + \varepsilon|D|R_j^{\varepsilon,1},$$

where each term commutes with D and for any $\beta \geq 0$, we have,

$$R_j^\varepsilon, R_j^{\varepsilon,1} \in \mathcal{B}(H; E^0) \cap \mathcal{B}(E^\beta; E^{\beta+1}),$$

uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$.

Proof. This result can be proved in the same way as was Lemma 3.4, but using Grad's decomposition (3.19) and the role of \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) is replaced by K (resp. ν). \square

Lemma 3.7. *For any $p \in [1, \infty]$, $\beta \geq 0$, $\alpha > \alpha_B$, there exists $C > 0$ such that*

$$(3.28) \quad \|\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D)f\|_{E^\beta} \leq C\|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}},$$

$$(3.29) \quad \left\| \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D)f \right\|_{E^\beta} \leq C\|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}},$$

in particular, we have thanks to (3.7) that

$$(3.30) \quad \|\mathbf{P}_b^\varepsilon f\|_{E^\beta} \leq C\|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}.$$

Proof. First, note that by Lemma 3.6, there holds

$$\begin{aligned} (R_j^\varepsilon)^{1+\beta} &= (-K\nu^{-1})^{1+\beta} + \varepsilon|D|\widetilde{R}_j^\varepsilon \in \mathcal{B}(H; E^\beta), \\ \widetilde{R}_j^\varepsilon &\in \mathcal{B}(H; E^\beta), \end{aligned}$$

uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$. One shows a factorization formula in the spirit of (3.27), which iterated gives

$$(3.31) \quad \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) = (R_j^\varepsilon)^{1+\beta} \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D).$$

We get (3.28) by combining the bound of $(R_j^\varepsilon)^{1+\beta}$ and (3.25). Let us now inject the expansion of $(R_j^\varepsilon)^{1+\beta}$ and $\mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D)$ in the previous relation:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) &= \left((-K\nu^{-1})^{1+\beta} + \varepsilon|D|\widetilde{R}_j^\varepsilon \right) \left(\mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\widetilde{D}) + \varepsilon|D|\mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) \right) \\ &= (-K\nu^{-1})^{1+\beta} \mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\widetilde{D}) \\ &\quad + \varepsilon|D| \left((-K\nu^{-1})^{1+\beta} \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) + \widetilde{R}_j^\varepsilon \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) \right), \end{aligned}$$

which leads to the identification

$$\mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) = (-K\nu^{-1})^{1+\beta} \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) + \tilde{R}_j^\varepsilon \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D),$$

where we have

$$(3.32) \quad (R_j^\varepsilon)^{1+\beta} \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) = \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) \in \mathcal{B}(H; E^\beta).$$

uniformly in $\varepsilon \in (0, 1)$. Once again, we get (3.29) by combining the bound of \tilde{R}_j^ε and $(-K\nu^{-1})^{1+\beta} = (R_j^\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ with (3.26). \square

Corollary 3.8. *For any $p \in [1, \infty]$, $\beta > d/2$ and $\alpha > \alpha_B$, there exists $C = C(p, \alpha, \beta)$ such that*

$$(3.33) \quad \|U_b^\varepsilon(t)f\|_{E^\beta} \leq C\|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}},$$

$$(3.34) \quad \|U_\sharp^\varepsilon(t)f\|_{E^\beta} \leq Ce^{-at/\varepsilon^2}\|f\|_{E^\beta}.$$

Proof. Estimate (3.33) comes from the combination of (3.9) with (3.30). To get estimate (3.34), we apply the Duhamel formula (1.21) to Grad's decomposition (3.19):

$$U^\varepsilon = S^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} S^\varepsilon * KU^\varepsilon,$$

where we denoted

$$(3.35) \quad \begin{aligned} S^\varepsilon(t)h(x, v) &:= \exp(\varepsilon^{-2}t(-\nu + \varepsilon v \cdot \nabla_x)) h(x, v) \\ &= e^{-\frac{\nu(v)t}{\varepsilon^2}} h(x - vt, v). \end{aligned}$$

Compose from the right with $\mathbf{P}_\sharp^\varepsilon$ to get by the definition of U_\sharp^ε

$$U_\sharp^\varepsilon = S^\varepsilon \mathbf{P}_\sharp^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} S^\varepsilon * KU_\sharp^\varepsilon.$$

Note that in both cases $X = H$ or E^γ (where $\gamma \geq 0$), we have thanks to (1.4)

$$\|S^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \lesssim \exp\left(-\frac{\nu_0 t}{\varepsilon^2}\right),$$

which implies in particular

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\infty \|S^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{B}(X)} dt &\lesssim \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\infty e^{-\nu_0 t/\varepsilon^2} dt \lesssim 1, \\ \|S^\varepsilon(t)\|_{\mathcal{B}(X)} &\lesssim 1. \end{aligned}$$

Combined with the regularization property (3.20), we get

$$\begin{aligned} \|U^\varepsilon f\|_{L_t^\infty E^0} &\lesssim \|S^\varepsilon f\|_{L_t^\infty E^0} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \|S^\varepsilon(t-t')\|_{\mathcal{B}(E^0)} \|U_\#^\varepsilon(t')f\|_{L_t^\infty H} dt' \\ &\lesssim e^{-\nu_0 t/\varepsilon^2} \|f\|_{E^0} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t e^{-\nu_0(t-t')/\varepsilon^2} \|U_\#^\varepsilon(t')f\|_{L_t^\infty H} dt', \end{aligned}$$

and also for any $\gamma \geq 0$

$$\begin{aligned} \|U_\#^\varepsilon(t)f\|_{L_t^\infty E^{\gamma+1}} &\lesssim \|S^\varepsilon(t)f\|_{E^{\gamma+1}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\infty \|S^\varepsilon(t-t')\|_{\mathcal{B}(E^{\gamma+1})} \|U_\#^\varepsilon(t')f\|_{E^\gamma} dt' \\ &\lesssim e^{-\nu_0 t/\varepsilon^2} \|f\|_{E^{\gamma+1}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t e^{-\nu_0(t-t')/\varepsilon^2} \|U_\#^\varepsilon(t')f\|_{L_t^\infty E^\gamma} dt' \end{aligned}$$

Using the following relation valid for any $a, b > 0$,

$$\int_0^t e^{-a(t-t')} e^{-bt'} dt' \leq \frac{e^{-\min\{a,b\}t}}{|b-a|},$$

one gets by induction on γ , and using (3.10) as an initialization, that

$$\|f\|_{E^\beta} \lesssim e^{-\nu_0 t/\varepsilon^2} \|f\|_{E^\beta} + e^{-\min\{a,\nu_0\}t/\varepsilon^2} \|f\|_H.$$

We conclude to (3.34) using the continuous inclusion $E^\beta \subset H$ as $\beta > d/2$. \square

Lemma 3.9. *For any $p \in [1, \infty]$, $\beta \geq 0$, $\alpha > \alpha_B$, there exists $C = C(p, \alpha, \beta)$ such that for any $f \in \mathcal{E}^{p,\alpha}$*

$$\|U_b^\varepsilon(t)(\text{Id} - \Pi)f\|_{E^\beta} \leq C \min \left\{ \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}, \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}, \varepsilon \|\nabla_x f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}} \right\}.$$

Proof. First, recall that we have from (3.3), and from (3.2) and (3.5) that

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) &= \mathcal{P}_{b,j}^{(0)}(\widetilde{D}) + \varepsilon |D| \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D), \\ \mathcal{P}_{b,j}^{(0)} \Pi &= \Pi \mathcal{P}_{b,j}^{(0)} = \mathcal{P}_{b,j}^{(0)}, \end{aligned}$$

therefore, there holds

$$e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) (\text{Id} - \Pi) = e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \varepsilon |D| \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D) (\text{Id} - \Pi).$$

Thanks to (3.29), we deduce the two estimates

$$\begin{aligned} \left\| e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) (\text{Id} - \Pi) f \right\|_{E^\beta} &\lesssim \left\| \chi(\varepsilon D) \varepsilon |D| e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \right\|_{\mathcal{B}(E^\beta)} \|f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}, \\ \left\| e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \mathcal{P}_{b,j}(\varepsilon D) (\text{Id} - \Pi) f \right\|_{E^\beta} &\lesssim \left\| \varepsilon \chi(\varepsilon D) e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \right\|_{\mathcal{B}(E^\beta)} \|\nabla_x f\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}. \end{aligned}$$

The operators $\chi(\varepsilon D) \varepsilon |D| e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2}$ and $\chi(\varepsilon D) e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2}$ are Fourier multiplier in x , and (3.3) implies that $\text{Re } \lambda_j(\xi) \leq -c|\xi|^2$ for some $c > 0$, thus, recalling that χ is the characteristic function of $\{|\xi| \leq \mathbf{r}\}$, we have on the one hand

$$\begin{aligned} \left\| \chi(\varepsilon D) \varepsilon |D| e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \right\|_{\mathcal{B}(E^\beta)} &\lesssim \sup_{|\varepsilon\xi| \leq \mathbf{r}} \left| \varepsilon \xi e^{-ct|\xi|^2} \right| \\ &\lesssim \min \left\{ \frac{\varepsilon}{t^{1/2}}, 1 \right\}, \end{aligned}$$

and on the other hand

$$\left\| \chi(\varepsilon D) e^{t\lambda(\varepsilon D)/\varepsilon^2} \right\|_{\mathcal{B}(E^\beta)} \lesssim 1.$$

These estimates yield the conclusion thanks to (3.8). \square

Lemma 3.10. *For any $p \in [1, \infty]$, $\alpha > \alpha_B$, $\beta \geq 0$, there holds for any $f \in \mathcal{E}^{p, \alpha}$*

$$(3.36) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \left(\langle t \rangle^{1/2} \|U_b^\varepsilon(t) (\text{Id} - \Pi) f\|_{E^\beta} \right) = 0,$$

$$(3.37) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \left(\langle t \rangle^{1/2} \|U_\sharp^\varepsilon(t) \Pi f\|_{E^\beta} \right) = 0.$$

Proof. First, note that $\alpha_B(1) = 2$ and $\alpha_B(\infty) > 5$, thus, when $p = \infty$, there is some $\alpha' > 2$ such that $\mathcal{E}^{\infty, \alpha} \subset \mathcal{E}^{1, \alpha'}$ continuously, so we assume $p < \infty$. Second, since Lemma 3.9 implies that

$$\langle t \rangle^{1/2} \|U_b^\varepsilon(t) (\text{Id} - \Pi) f\|_{E^\beta} \lesssim \|f\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}},$$

it is enough to check that the convergence holds on a dense subset of $\mathcal{E}^{p, \alpha}$, for instance $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_v \times \Omega_x)$. This is indeed the case for (3.36) thanks to Lemma 3.9.

The proof of (3.37) is similar, one just needs to notice that

$$\begin{aligned} \langle t \rangle^{1/2} \|U_\sharp^\varepsilon(t) \Pi f\|_{E^\beta} &= \langle t \rangle^{1/2} \|U_\sharp^\varepsilon(t) \mathbf{P}_\sharp^\varepsilon \Pi f\|_{E^\beta} \\ &\lesssim e^{-at/\varepsilon^2} \langle t \rangle^{1/2} \|\mathbf{P}_\sharp^\varepsilon \Pi f\|_{E^\beta} \\ &\lesssim \|(\mathbf{P}_b^\varepsilon - \Pi) \Pi f\|_{E^\beta}. \end{aligned}$$

Moreover, we have from (3.4) and (3.5)

$$\mathbf{P}_b^\varepsilon - \Pi = \sum_{j=-1}^2 \varepsilon |D| \mathcal{P}_{b,j}^{(1)}(\varepsilon D),$$

so by a similar density argument as in the previous step, one shows that $(\mathbf{P}_b^\varepsilon - \Pi) g$ vanishes as ε goes to zero for any $g \in \mathcal{E}^{p, \alpha}$, which concludes the proof. \square

4. STUDY IN THE GAUSSIAN SPACE

Let us define the threshold appearing in Theorem 4 as

$$(4.1) \quad \alpha_*(p) := \max\{\alpha_Q, \alpha_B\} + 1,$$

where α_Q, α_B are defined respectively in (2.9) and (2.6). In particular, $\alpha_*(1) = 3$.

In this section, we prove the estimates necessary to the study of the equation on g^ε in (1.23). Namely, we show that $g \mapsto \Psi^\varepsilon(f, g)$ (Lemma 4.2-4.4) and $\Phi^\varepsilon[h]$ (Lemma 4.9) have small operator norms in several cases (depending on f). Following the idea of [17], the particular case of $f = f^0$ being the solution to (KINSF) will be dealt with by introducing an equivalent norm, which we introduce now. Several results are already present in [17], we prove them for the sake of completeness.

Notations 4.1. For any $\lambda > 0$ and $\beta \geq 0$, we denote X_λ^β the set of continuous functions $g \in \mathcal{C}_b([0, T]; E^\beta)$ satisfying $\|g\|_{X_\lambda^\beta} < \infty$, where

$$\|g\|_{X_\lambda^\beta} := \sup_{0 \leq t < T} \|\Lambda(t, \lambda) \chi_\Omega(t) g(t)\|_{E^\beta},$$

$$\Lambda(t, \lambda) := \exp\left(-\lambda \int_0^t \|f^0(t')\|_{E^\beta}^3 dt'\right),$$

and we denoted $\chi_\Omega(t) := \langle t \rangle^{1/4}$ if $\Omega = \mathbb{R}^2$, and $\chi_\Omega(t) := 1$ otherwise.

The function $t \mapsto \|f^0(t)\|_{E^\beta}$ lies in $L^\infty \cap L^2$ according to Theorem 2 and thus, in particular, in L^3 (any $q > 2$ would suffice but we chose the smallest admissible integer for clarity, see Remark 4.5). This norm therefore satisfies for some $C = C(\lambda) > 0$ and any $f \in X_\lambda^\beta$

$$(4.2) \quad \|f\|_{L_t^\infty E^\beta} \leq \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta} \leq \frac{1}{C} \|f\|_{X_\lambda^\beta} \leq C \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta},$$

showing that $f \mapsto \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta}$ and $f \mapsto \|f\|_{X_\lambda^\beta}$ are equivalent norms. The factor Λ allows not to assume f^0 (and thus $f_{\text{in, WP}}$) to be small thanks to the relation

$$(4.3) \quad \Lambda(t, \lambda)^3 \int_0^t \|\Lambda(\lambda, t')^{-1} f^0(t')\|_{E^\beta}^3 dt' \lesssim \lambda^{-1},$$

and the factor χ_Ω makes the bilinear operator Ψ^ε bounded.

Lemma 4.2. For any $\lambda > 0$, $\beta > d/2 + 1$ and $\omega > 0$, there holds for some positive constant $C = C(\lambda, \omega)$

$$(4.4) \quad \|\Psi^\varepsilon(f, g)\|_{X_\lambda^\beta} \leq C \|f\|_{X_\lambda^\beta} \|g\|_{X_\lambda^\beta}$$

$$(4.5) \quad \|\Psi^\varepsilon(f, g)\|_{X_\lambda^\beta} \leq C \varepsilon \|f\|_{X_\lambda^\beta} \left(\sup_{0 \leq t < T} \left\| e^{\omega t / \varepsilon^2} g(t) \right\|_{E^\beta} \right).$$

Proof. Step 1: Reductions. Using the same notations, a factorization similar to the one used in the proof of (3.34) holds:

$$\begin{aligned}
\Psi^\varepsilon(f, g) &= \frac{1}{\varepsilon} U^\varepsilon * Q(f, g) \\
&= \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon * Q(f, g) + \frac{1}{\varepsilon^2} S^\varepsilon * K U^\varepsilon * Q(f, g) \\
(4.6) \quad &=: \Psi_0^\varepsilon(f, g) + \frac{1}{\varepsilon^2} S^\varepsilon * K \Psi^\varepsilon(f, g).
\end{aligned}$$

Again, denoting $(X, Y) = (E^\gamma, E^{\gamma+1})$ for any $\gamma \geq 0$, or $(X, Y) = (H, E^0)$ (where we recall $H = H_x^s L_v^2(M^{-1/2})$), the regularization property $K \in \mathcal{B}(X; Y)$ and the decay of S^ε imply that:

$$\begin{aligned}
\|\chi_\Omega S^\varepsilon * K \Psi^\varepsilon(t)(f, g)\|_Y &\lesssim \left(\chi_\Omega(t) \int_0^t \frac{e^{-\nu_0(t-t')/\varepsilon^2}}{\chi_\Omega(t')} dt' \right) \|\chi_\Omega \Psi^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty X} \\
&\lesssim \varepsilon^2 \|\chi_\Omega \Psi^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty X},
\end{aligned}$$

where we used Lemma A.1 in the second line. By induction, it is then enough to prove

$$(4.7) \quad \|\chi_\Omega \Psi^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty E^\beta} \lesssim \|\chi_\Omega \Psi_0^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty E^\beta} + \|\chi_\Omega \Psi^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty H}.$$

Step 2: Estimate of Ψ_0^ε . Note that for any $h = h(x, v)$, by (3.35), one has

$$\|S^\varepsilon(t)h(v)\|_{H_x^s} = \exp(-\nu(v)t/\varepsilon^2) \|h\|_{H_x^s},$$

thus, we have

$$\begin{aligned}
\chi_\Omega(t) \langle v \rangle^\beta \|\Psi_0^\varepsilon(f, g)(t, v)\|_{H_x^s} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \langle v \rangle^\beta \chi_\Omega(t) \int_0^t e^{-\nu(v)(t-t')/\varepsilon^2} \|Q(f, g)(t', v)\|_{H_x^s} dt' \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \langle v \rangle \chi_\Omega(t) \int_0^t e^{-\nu(v)(t-t')/\varepsilon^2} \|f(t')\|_{E^\beta} \|g(t')\|_{E^\beta} dt' \\
&\leq \left(\frac{1}{\varepsilon} \chi_\Omega(t) \int_0^t \frac{e^{-\nu(v)(t-t')/\varepsilon^2} \langle v \rangle}{\chi_\Omega(t')^2} dt' \right) \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta} \|\chi_\Omega g\|_{L_t^\infty E^\beta}
\end{aligned}$$

where we used in the second line the following estimate from [17, (B.5)]

$$\|Q(f, g)\|_{E^\gamma} \lesssim \|f\|_{E^{\gamma+1}} \|g\|_{E^{\gamma+1}}.$$

The factor between parenthesis is bounded uniformly in t , ε and v by Lemma A.1 and (1.4), therefore we obtain

$$(4.8) \quad \|\chi_\Omega \Psi_0^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty E^\beta} \lesssim \varepsilon \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta} \|\chi_\Omega g\|_{L_t^\infty E^\beta}.$$

Step 2: Proof of (4.4). Recall that the microscopic laws of elastic collisions imply $\Pi Q = 0$ (see for instance [42, (1.2.7)]), thus one may write

$$\begin{aligned}\Psi^\varepsilon(f, g) &= \frac{1}{\varepsilon} U^\varepsilon * Q(f, g) = W^\varepsilon * Q(f, g), \\ W^\varepsilon &:= \frac{1}{\varepsilon} U^\varepsilon (\text{Id} - \Pi).\end{aligned}$$

By using the decay estimate [17, Lemma 3.2] of W^ε then the bounds [17, (B.5)-(B.6)] on $Q(f, g)$, one has

$$\begin{aligned}\|W^\varepsilon(t-t')Q(f(t'), g(t'))\|_H &\lesssim \tilde{\chi}_\Omega(t-t')\|Q(f(t'), g(t'))\|_{H \cap L_t^\sigma L_x^1(M^{-1/2})} \\ &\lesssim \tilde{\chi}_\Omega(t-t')\|f(t')\|_{E^\beta}\|g(t')\|_{E^\beta}.\end{aligned}$$

where we have denoted for some $\sigma > 0$

$$(4.9) \quad \tilde{\chi}_\Omega(t) := \begin{cases} t^{-1/2}e^{-\sigma t}, & \Omega = \mathbb{T}^d, \\ t^{-1/2}\langle t \rangle^{-d/4}, & \Omega = \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

We thus have the control

$$\begin{aligned}\|\chi_\Omega \Psi^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty H} &\lesssim \int_0^t \|\chi_\Omega(t)W^\varepsilon(t-t')Q(f(t'), g(t'))\|_H dt' \\ &\lesssim \left(\chi_\Omega(t) \int_0^t \frac{\tilde{\chi}_\Omega(t-t')}{\chi_\Omega(t')^2} dt' \right) \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta} \|\chi_\Omega g\|_{L_t^\infty E^\beta} \\ &\lesssim \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta} \|\chi_\Omega g\|_{L_t^\infty E^\beta},\end{aligned}$$

where the last line comes from Lemma A.2. Combined with (4.8), this yields (4.7) hence (4.4).

Step 3: Proof of (4.5). Similarly, we have

$$\begin{aligned}\|\chi_\Omega \Psi^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty H} &\lesssim \int_0^t \|\chi_\Omega(t)W^\varepsilon(t-t')Q(f(t'), g(t'))\|_H dt' \\ &\lesssim \left(\chi_\Omega(t) \int_0^t \frac{\tilde{\chi}_\Omega(t-t')e^{-\omega t'/\varepsilon^2}}{\chi_\Omega(t')} dt' \right) \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta} \left(\sup_{0 \leq t' \leq T} \|e^{\omega t'/\varepsilon^2} g(t')\|_{E^\beta} \right).\end{aligned}$$

Thanks to Lemma A.2 and the control $e^{-\omega t'/\varepsilon^2} \lesssim \varepsilon t'^{-1/2}$, this implies

$$\|\chi_\Omega \Psi^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty H} \lesssim \varepsilon \|\chi_\Omega f\|_{L_t^\infty E^\beta} \left(\sup_{0 \leq t' \leq T} \|e^{\omega t'/\varepsilon^2} g(t')\|_{E^\beta} \right)$$

Again, combined with (4.7) and (4.8), we deduce (4.5). \square

The next lemma deals with the part of the source term \mathcal{S}^ε from Section 1.4 associated with the acoustic waves. These waves, generated by the ill-prepared part $f_{\text{in,IP}}$ of the initial data, satisfy dispersive estimates when $\Omega = \mathbb{R}^d$ (see (3.18)), and are absent when $\Omega = \mathbb{T}^d$ thanks to the well-prepared assumption $f_{\text{in,IP}} = 0$.

Lemma 4.3. *Under the assumptions of Theorem 4, for any $\lambda > 0$, and $\beta > d/2 + 1$, there holds*

$$\begin{aligned} \|\Psi^\varepsilon(U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}, \cdot)\|_{\mathcal{B}(X_\lambda^\beta)} &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, & \text{if } \Omega = \mathbb{R}^d, \\ \Psi^\varepsilon(U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}, \cdot) &= 0, & \text{if } \Omega = \mathbb{T}^d. \end{aligned}$$

Proof. Note that $U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}} = U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}$ by (3.14), so the well-prepared assumption in the case $\Omega = \mathbb{T}^d$ concludes the proof in this case. We only deal with case $\Omega = \mathbb{R}^d$ in the following.

Step 1: Reductions. Let us denote by \mathbf{X} the space

$$\mathbf{X} := \begin{cases} H_x^s, & \text{if } \Omega = \mathbb{R}^3, \\ H_x^s \cap L_x^1, & \text{if } \Omega = \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

As $U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}} = U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}$ by (3.14) and $f_{\text{in,IP}}$ is macroscopic in the sense of Notations 1.1.2, it writes

$$f_{\text{in}}(x, v) = \left(\rho(x) + u(x) \cdot v + \frac{\theta(x)}{2} (|v|^2 - d) \right) M(v)$$

for some functions $\rho, u, \theta \in \mathbf{X}$. Consider a sequence of \mathcal{C}_c^∞ functions ρ_n, u_n, θ_n converging to ρ, u, θ in \mathbf{X} , and denote f_n the corresponding macroscopic distribution. In both cases, there holds thanks to (3.16) and (3.17)

$$\chi_\Omega(t) \|U_{\text{disp}}^\varepsilon(f_{\text{in,IP}} - f_n)\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim \|f_{\text{in,IP}} - f_n\|_{L_v^\infty \mathbf{X}_x(\langle v \rangle^\beta M^{-1/2})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Therefore, by the continuity (4.4) of Ψ^ε on X_λ^β , one only need to check that for each $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\Psi^\varepsilon(U_{\text{disp}}^\varepsilon f_n, \cdot)\|_{\mathcal{B}(X_\lambda^\beta)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Note that by (3.16), there holds $U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}} \in X_\lambda^\beta$ thus we do not need to deal with Ψ_0^ε as we have already proved (4.8).

Step 2: Convergence for smooth functions. Thanks to the following bound for Q from [17, (B.4)]:

$$\|Q(f, g)\|_{H_x^s L_v^2(M^{-1/2})} \lesssim \|f\|_{L_v^\infty W_x^{s, \infty}(\langle v \rangle^\beta M^{-1/2})} \|g\|_{E^\beta}$$

we can use (3.18), thus we have

$$\|\Psi_0^\varepsilon(U_{\text{disp}}^\varepsilon f_n, g)\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim C_{f_n} \varepsilon^{1/2} \left(\chi_\Omega(t) \int_0^t \frac{\tilde{\chi}_\Omega(t-t')}{\chi_\Omega(t')(t')^{1/2}} dt' \right) \|g\|_{X_\lambda^\beta},$$

where C_{f_n} is the constant of (3.18) and $\tilde{\chi}_\Omega$ was defined in (4.9). The integral is bounded uniformly in t by Lemma A.2. We conclude the proof thanks to (4.7) and (4.8). \square

The next lemma shows how the equivalent norm $\|\cdot\|_{X_\lambda^\beta}$ defined in Notations 4.1 makes the norm of the operator $\Psi^\varepsilon(f^0, \cdot)$ arbitrarily small when $\varepsilon \ll 1$ and $\lambda \gg 1$. This is why we do not need to assume that the well-prepared part of the initial data (which generates f^0) to be small.

Lemma 4.4. *For any $\beta > d/2 + 1$, there exists a constant $C > 0$ (independent of λ and ε) such that*

$$\|\Psi^\varepsilon(f^0, g)\|_{X_\lambda^\beta} \leq C \left(\lambda^{-1/5} + \varepsilon \right) \|g\|_{X_\lambda^\beta}.$$

Proof. Note that $t \mapsto \Lambda(\lambda, t)$, defined in Notations 4.1, is a decreasing function, thus for any positive functions $\phi = \phi(t)$, $\psi = \psi(t)$, one has

$$(4.10) \quad \Lambda(\lambda, \cdot) \left(\phi * \psi \right) \leq \phi * \left(\Lambda(\lambda, \cdot) \psi \right),$$

which implies that the bootstrap leading to (4.7) is still valid for the norm of X_λ^β , uniformly in λ :

$$(4.11) \quad \|\Psi^\varepsilon(f, g)\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim \|\Psi_0^\varepsilon(f, g)\|_{X_\lambda^\beta} + \|\chi_\Omega \Lambda(\lambda, \cdot) \Psi^\varepsilon(f, g)\|_{L_t^\infty H}.$$

The term involving Ψ_0^ε is estimated the same way as for (4.8) thanks to (4.10):

$$\|\Psi_0^\varepsilon(f^0, g)\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim \varepsilon \|g\|_{X_\lambda^\beta}.$$

The same goes for Ψ^ε ; the proof of (4.4) leads to the bound

$$\begin{aligned} \|\Psi^\varepsilon(f^0, g)\|_{X_\lambda^\beta} &\lesssim \sup_{t \geq 0} \left(\Lambda(\lambda, t) \chi_\Omega(t) \int_0^t \tilde{\chi}_\Omega(t-t') \|f^0(t')\|_{E^\beta} \|g(t')\|_{E^\beta} dt' \right) \\ &\lesssim \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t \frac{\chi_\Omega(t) \tilde{\chi}_\Omega(t-t')}{\chi_\Omega(t')} \times \chi_\Omega(t') \Lambda(\lambda, t') \|f^0(t')\|_{E^\beta} dt' \right) \|g\|_{X_\lambda^\beta} \end{aligned}$$

where $\tilde{\chi}_\Omega$ is defined in (4.9) and we used the fact that $t \mapsto \Lambda(\lambda, t)$ is non-increasing. The Hölder inequality with exponents $(3/2, 3)$ yields thanks to (4.3)

$$\|\Psi^\varepsilon(f^0, g)\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim \lambda^{-1/3} \|g\|_{X_\lambda^\beta},$$

which concludes the proof. \square

Remark 4.5. *Note that in the previous proof, we use Hölder's inequality with exponents $(3/2, 3)$, but we could actually use any (q, q') as long as $q \in (1, 2)$ so that the singularity of $\tilde{\chi}_\Omega$ be integrable.*

Let us now study the convolution term $\varepsilon^{-2} U^\varepsilon * \mathcal{A}$ appearing in the equation for g^ε in (1.23). We start by introducing its splitting mentioned in Section 1.4, then we prove estimates on both parts.

Notations 4.6. *For any $f = f(t, x, v)$, we denote*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^\varepsilon f &:= \frac{1}{\varepsilon^2} U_\sharp^\varepsilon * \mathcal{A}f - \mathbf{P}_\flat^\varepsilon \exp(t\mathcal{B}^\varepsilon) f(0), \\ \mathcal{T}_\infty^\varepsilon f &:= \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A}f - \mathcal{T}_1^\varepsilon f, \end{aligned}$$

where U_\sharp^ε and $\mathbf{P}_\flat^\varepsilon$ are defined in Section 3.1.

Lemma 4.7. *Let $p \in [1, \infty]$, $\alpha > \alpha_{\mathcal{B}}$ (defined in (2.6)), $\sigma \in (0, \sigma_{\mathcal{B}})$ (defined in Lemma 2.1), $\beta > d/2$. There holds for some $C = C(p, \alpha, \beta, \lambda)$ and any $f \in \mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}$*

$$(4.12) \quad \|\mathcal{T}_1^{\varepsilon} f(t)\|_{E^{\beta}} \leq C e^{-\omega t / \varepsilon^2} \|f\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}},$$

with $\omega := \min\{\sigma, \mathbf{a}\}$, \mathbf{a} being defined in Section 3.1.

Proof. Thanks to the decay estimate (3.34) combined with the boundedness of the operator $\mathcal{A} : \mathcal{E}^{p, \alpha} \rightarrow E^{\beta}$, the definition of the norm $\|f\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}}$ from Notations 2.5, and the decay of $S_{\mathcal{B}^{\varepsilon}}$ coming from (2.3), we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_1^{\varepsilon} f(t)\|_{E^{\beta}} &\lesssim \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} U_{\sharp}^{\varepsilon} * \mathcal{A}f \right\|_{E^{\beta}} + \|\mathbf{P}_b^{\varepsilon} S_{\mathcal{B}^{\varepsilon}}(t) f(0)\|_{E^{\beta}} \\ &\lesssim \frac{1}{\varepsilon^2} \|f\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}} \int_0^t e^{-\mathbf{a}(t-t')/\varepsilon^2} e^{-\sigma t'/\varepsilon^2} dt' + \|f(0)\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha}} \|S_{\mathcal{B}^{\varepsilon}}(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E}^{p, \alpha})} \\ &\lesssim e^{-\omega t / \varepsilon^2} \|f\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

The lemma is proved. \square

Lemma 4.8. *Let $p \in [1, \infty]$, $\alpha > \alpha_*$ (defined in (4.1)), $\sigma \in (0, \sigma_{\mathcal{B}})$ (defined in Lemma 2.1), $\beta > d/2 + 1$. For any $h \in L^{\infty}([0, T]; \mathcal{E}^{p, \alpha}) \cap L^p([0, T]; \mathcal{E}_{\nu}^{p, \alpha})$ and any $g \in L^{\infty}([0, T]; E^{\beta})$, the solution \bar{h} given by Lemma 2.6 to the equation*

$$(4.13) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{h} = \mathcal{B}^{\varepsilon} \bar{h} + \frac{1}{\varepsilon} Q(h, h) + \frac{1}{\varepsilon} Q(h, g), \\ \bar{h}(0) \in \mathcal{E}^{p, \alpha}, \end{cases}$$

is such that for some $C = C(p, \alpha, \beta, \lambda)$

$$(4.14) \quad \|\mathcal{T}_{\infty}^{\varepsilon} \bar{h}\|_{X_{\lambda}^{\beta}} \leq C \varepsilon \|h\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}} \left(\|h\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}} + \|g\|_{X_{\lambda}^{\beta}} \right) + \|U_b^{\varepsilon} \bar{h}(0)\|_{X_{\lambda}^{\beta}}.$$

Furthermore, if \bar{h}_1, \bar{h}_2 are two solutions of the equation (4.13) associated with (h_1, g_1) and (h_2, g_2) respectively, one has the stability estimate

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\infty}^{\varepsilon} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)\|_{X_{\lambda}^{\beta}} &\leq C \varepsilon \|h_1 - h_2\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}} \left(\|h_1 + h_2\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}} + \|g_1\|_{X_{\lambda}^{\beta}} \right) \\ &\quad + C \varepsilon \|g_1 - g_2\|_{X_{\lambda}^{\beta}} \|h_2\|_{\mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}} \\ &\quad + \|U_b^{\varepsilon} (\bar{h}_1(0) - \bar{h}_2(0))\|_{X_{\lambda}^{\beta}}. \end{aligned}$$

Proof. In the first step of the proof, which is entirely algebraic, we derive an expression of $\mathcal{T}_{\infty}^{\varepsilon} \bar{h}$ in terms of $\bar{h}(0)$, h and g . In the next steps, we prove the estimates (4.14) and (4.15). To lighten the notations, we denote

$$\mathcal{X}_{\varepsilon} = \mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}^{p, \alpha}, \quad \mathcal{E}_{\nu} = \mathcal{E}_{\nu}^{p, \alpha},$$

where $\mathcal{X}_{\varepsilon}^{p, \alpha, \sigma}$ is defined in Notations 2.5, and $\mathcal{E}^{p, \alpha}, \mathcal{E}_{\nu}^{p, \alpha}$ in Notations 1.3. We will also need the following factorization formula for semigroups (1.21) applied to the decomposition $\mathcal{L}^{\varepsilon} = \mathcal{B}^{\varepsilon} + \varepsilon^{-2} \mathcal{A}$:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} U^\varepsilon &= S_{\mathcal{B}^\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} S_{\mathcal{B}^\varepsilon}, \\ S_{\mathcal{B}^\varepsilon}(t) &:= \exp(t\mathcal{B}^\varepsilon). \end{aligned}$$

Step 1: Finding an expression for $\mathcal{T}_\infty^\varepsilon$. Using Duhamel's formula, \bar{h} writes

$$\bar{h} = S_{\mathcal{B}^\varepsilon} \bar{h}(0) + \frac{1}{\varepsilon} S_{\mathcal{B}^\varepsilon} * Q(h, h) + \frac{1}{\varepsilon} S_{\mathcal{B}^\varepsilon} * Q(h, g),$$

and thus, convolving with $\varepsilon^{-2} U^\varepsilon \mathcal{A}$, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} \bar{h} &= \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} S_{\mathcal{B}^\varepsilon} \bar{h}(0) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} S_{\mathcal{B}^\varepsilon} * \left(\frac{1}{\varepsilon} Q(h, h) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} S_{\mathcal{B}^\varepsilon} * \left(\frac{1}{\varepsilon} Q(h, g) \right). \end{aligned}$$

Thanks to (4.16), this expression rewrites as

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} \bar{h} &= (U^\varepsilon - S_{\mathcal{B}^\varepsilon}) \bar{h}(0) \\ &\quad + (U^\varepsilon - S_{\mathcal{B}^\varepsilon}) * \left(\frac{1}{\varepsilon} Q(h, h) \right) \\ &\quad + (U^\varepsilon - S_{\mathcal{B}^\varepsilon}) * \left(\frac{1}{\varepsilon} Q(h, g) \right) \end{aligned}$$

or, in a more compact way

$$(4.17) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} \bar{h} = U^\varepsilon \bar{h}(0) - S_{\mathcal{B}^\varepsilon} \bar{h}(0) + A_1 + A_2,$$

where we denoted

$$\begin{aligned} A_1 &:= -\frac{1}{\varepsilon} S_{\mathcal{B}^\varepsilon} * Q(h, h) - \frac{1}{\varepsilon} S_{\mathcal{B}^\varepsilon} * Q(h, g), \\ A_2 &:= \frac{1}{\varepsilon} U^\varepsilon * Q(h, h) + \frac{1}{\varepsilon} U^\varepsilon * Q(h, g). \end{aligned}$$

Using the definitions $U_\flat^\varepsilon = \mathbf{P}_\flat^\varepsilon U^\varepsilon$, $\mathbf{P}_\sharp^\varepsilon = \text{Id} - \mathbf{P}_\flat^\varepsilon$ and $U_\sharp^\varepsilon = \mathbf{P}_\sharp^\varepsilon U^\varepsilon$ from Section 3.1, we deduce from (4.17)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} \bar{h} &= \mathbf{P}_\flat^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} \bar{h} \right) + \mathbf{P}_\sharp^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^2} U^\varepsilon * \mathcal{A} \bar{h} \right) \\ &= U_\flat^\varepsilon \bar{h}(0) - \mathbf{P}_\flat^\varepsilon S_{\mathcal{B}^\varepsilon} \bar{h}(0) + \mathbf{P}_\flat^\varepsilon A_1 + \mathbf{P}_\flat^\varepsilon A_2 + \frac{1}{\varepsilon^2} U_\sharp^\varepsilon * \mathcal{A} \bar{h}, \end{aligned}$$

which allows to identify $\mathcal{T}_\infty^\varepsilon$ as

$$\mathcal{T}_\infty^\varepsilon \bar{h} = \mathbf{P}_b^\varepsilon A_1 + \mathbf{P}_b^\varepsilon A_2 + U_b^\varepsilon \bar{h}(0).$$

Step 2: Estimate of $\mathcal{T}_\infty^\varepsilon$. According to Lemma 2.6, there holds

$$\|A_1\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \lesssim \varepsilon \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \left(\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \|g\|_{X_\lambda^\beta} \right),$$

therefore, by the boundedness of $\mathbf{P}_b^\varepsilon : \mathcal{E} \rightarrow E$ and $\exp(-\sigma t/\varepsilon^2)\chi_\Omega(t) \lesssim 1$, one has

$$(4.18) \quad \|\mathbf{P}_b^\varepsilon A_1\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim \varepsilon \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \left(\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \|g\|_{X_\lambda^\beta} \right).$$

To estimate the term $\mathbf{P}_b^\varepsilon A_2$, recall that the laws of elastic collisions imply $\Pi Q = 0$ (see for instance [42, (1.2.7)]), thus, by Lemma 3.9 (because $\alpha - 1 > \alpha_B$ by (4.1)):

$$\frac{1}{\varepsilon} \|\chi_\Omega(t) U_b^\varepsilon * Q(h, h)(t)\|_E \leq \chi_\Omega(t) \int_0^t (t-t')^{-1/2} \|Q(h(t'), h(t'))\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha-1}} dt'$$

and then, by (2.7) and because $\alpha - 1/p > \alpha_Q$ (by (4.1)),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \|\chi_\Omega(t) U_b^\varepsilon * Q(h, h)(t)\|_E &\lesssim \chi_\Omega(t) \int_0^t (t-t')^{-1/2} \|h(t')\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha-1/p}} \|h(t')\|_{\mathcal{E}^{p, \alpha-1/p}} dt' \\ &\lesssim \chi_\Omega(t) \int_0^t (t-t')^{-1/2} \|h(t')\|_{\mathcal{E}}^2 dt'. \end{aligned}$$

Using the estimates

$$\begin{aligned} \|h(t)\|_{\mathcal{E}} &\lesssim e^{-\sigma t/\varepsilon^2} \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \lesssim \varepsilon t^{-1/2} \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}, \\ \chi_\Omega(t) \|h(t)\|_{\mathcal{E}} &\lesssim \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}, \end{aligned}$$

we also have thanks to Lemma A.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \|\chi_\Omega(t) U_b^\varepsilon * Q(h, h)(t)\|_E &\lesssim \varepsilon \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}^2 \left(\chi_\Omega(t) \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{1/2} (t')^{1/2} \chi_\Omega(t')} dt' \right) \\ &\lesssim \varepsilon \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

By performing the same computation for the term involving g , one can show

$$(4.19) \quad \|\mathbf{P}_b^\varepsilon A_2\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim \varepsilon \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \left(\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \|g\|_{X_\lambda^\beta} \right).$$

We conclude to the estimate of $\mathcal{T}_\infty^\varepsilon$ thanks to (4.18)-(4.19).

Step 3: Stability estimate. To obtain the stability estimates, notice that

$$\partial_t(\bar{h}_1 - \bar{h}_2) = \mathcal{B}^\varepsilon (\bar{h}_1 - \bar{h}_2) + \frac{1}{\varepsilon} Q(h_1 - h_2, h_1 + h_2 + g_1) + \frac{2}{\varepsilon} Q(h_2, g_1 - g_2).$$

By adapting the previous steps, we get the result. Lemma 4.8 is proved. \square

This next lemma provides estimates for the operator $\Phi^\varepsilon[h]$ which was defined in Section 1.4 for any $h = h(t, x, v)$ as

$$\Phi^\varepsilon[h] := 2\Psi^\varepsilon(f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon h + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}, \cdot).$$

Lemma 4.9. Consider $p \in [1, \infty]$, $\alpha > \alpha_*$, $\sigma \in (0, \sigma_{\mathcal{B}})$, $\beta > d/2 + 1$ and $A > 0$. There holds for any $g \in X_\lambda^\beta$, $h \in \mathcal{X}_\varepsilon^{p, \alpha, \sigma}$ satisfying $\|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p, \alpha, \sigma}} \leq A$

$$\|\Phi^\varepsilon[h]g\|_{X_\lambda^\beta} \leq C_{\varepsilon, \lambda, A} \|g\|_{X_\lambda^\beta},$$

and the following stability estimate

$$\|\Phi^\varepsilon[h_1]g_1 - \Phi^\varepsilon[h_2]g_2\|_{X_\lambda^\beta} \leq C_{\varepsilon, \lambda, A} \left(\|g_1 - g_2\|_{X_\lambda^\beta} + \|h_1 - h_2\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p, \alpha, \sigma}} \right),$$

for some constant $C_{\varepsilon, \lambda, A} > 0$ that vanishes as $\max\{\varepsilon, 1/\lambda\} \rightarrow 0$ with A fixed..

Proof. The conclusion is a direct consequence of Lemma 4.4 (for f^0), (4.5) combined with Lemma 4.7 (for $\mathcal{T}_1^\varepsilon h^\varepsilon$), and Lemma 4.3 (for $U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}$). For the same reason, the stability estimate holds if one notices that

$$\Phi^\varepsilon[h_1]g_1 - \Phi^\varepsilon[h_2]g_2 = \Phi[h_1](g_1 - g_2) + 2\Psi^\varepsilon(\mathcal{T}_1^\varepsilon(h_1 - h_2), g_2).$$

This proves the lemma. \square

This next lemma provides estimates for \mathcal{S}^ε , which we recall is defined in Section 1.4 as

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\varepsilon[\bar{h}] &:= \mathcal{S}_0^\varepsilon + \Psi^\varepsilon(\mathcal{T}_1^\varepsilon \bar{h} + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}, 2f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon \bar{h} + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}) + \mathcal{T}_\infty^\varepsilon \bar{h} \\ \mathcal{S}_0^\varepsilon &:= (U^\varepsilon - U_{\text{disp}}^\varepsilon - U^0)(f_{\text{in}} - f_{\text{in},\perp}) + (\Psi^\varepsilon - \Psi^0)(f^0, f^0). \end{aligned}$$

Lemma 4.10. Let $p \in [1, \infty]$, $\alpha > \max\{\alpha_{\mathcal{B}}, \alpha_Q\}$, $\sigma \in (0, \sigma_{\mathcal{B}})$, $\beta > d/2 + 1$, and any $A > 0$. For any $h \in L^\infty([0, T]; \mathcal{E}^{p, \alpha}) \cap L^p([0, T]; \mathcal{E}_\nu^{p, \alpha})$, any $g \in L^\infty([0, T]; E^\beta)$ such that $\|g\|_{X_\lambda^\beta} + \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p, \alpha, \sigma}} \leq A$, the solution \bar{h} given by Lemma 2.6 to the equation

$$\begin{cases} \partial_t \bar{h} = \mathcal{B}^\varepsilon \bar{h} + \frac{1}{\varepsilon} Q(h, h) + \frac{1}{\varepsilon} Q(h, g), \\ \bar{h}(0) = f_{\text{in},\perp}, \end{cases}$$

is such that

$$(4.20) \quad \|\mathcal{S}^\varepsilon[\bar{h}]\|_{X_\lambda^\beta} \leq \eta_\varepsilon(\lambda, A, p, \alpha),$$

where $\eta_\varepsilon(\lambda, A) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ with λ and A fixed. Furthermore, one has the stability estimate

$$(4.21) \quad \|\mathcal{S}^\varepsilon[\bar{h}_1] - \mathcal{S}^\varepsilon[\bar{h}_2]\|_{X_\lambda^\beta} \leq C\varepsilon A \left(\|h_1 - h_2\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p, \alpha, \sigma}} + \|g_1 - g_2\|_{X_\lambda^\beta} \right),$$

where $C = C(p, \alpha, \lambda)$.

Proof. Step 1: Proof of (4.20). One may rewrite $\mathcal{S}_0^\varepsilon$ as

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0^\varepsilon &= (U^\varepsilon - U_{\text{disp}}^\varepsilon - U_\#^\varepsilon - U^0) \Pi f_{\text{in}} \\ &\quad + U_\#^\varepsilon \Pi f_{\text{in}} \\ &\quad + (\Psi^\varepsilon - \Psi^0)(f^0, f^0). \end{aligned}$$

The first line vanishes in X_λ^β in virtue of [17, Lemma 3.5], the second one by (3.37), and the third one by [17, Lemma 4.1].

The term involving Ψ^ε expands as

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon(\mathcal{T}_1^\varepsilon \bar{h} + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}, 2f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon \bar{h} + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}) = \\ \Psi^\varepsilon(\mathcal{T}_1^\varepsilon \bar{h}, 2f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon \bar{h} + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}) \\ + \Psi^\varepsilon(U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}, 2f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon \bar{h} + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}). \end{aligned}$$

The first term is estimated using Lemma 4.7 and (4.5), the second one using Lemma 4.3.

Finally, the term $\mathcal{T}_\infty^\varepsilon \bar{h}$ is estimated using (4.14) and (3.36). This proves (4.20).

Step 2: Proof of (4.21). Note that

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\varepsilon[\bar{h}_1] - \mathcal{S}^\varepsilon[\bar{h}_2] = & \mathcal{T}_\infty^\varepsilon(\bar{h}_1 - \bar{h}_2) \\ & + \Psi^\varepsilon(\mathcal{T}_1^\varepsilon(\bar{h}_1 - \bar{h}_2), \mathcal{T}_1^\varepsilon(\bar{h}_1 + \bar{h}_2)) \\ & + 2\Psi^\varepsilon(\mathcal{T}_1^\varepsilon(\bar{h}_1 - \bar{h}_2), U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in,IP}}). \end{aligned}$$

Using (4.15), and (4.5) with Lemma 4.7, we get

$$\|\mathcal{S}^\varepsilon[\bar{h}_1] - \mathcal{S}^\varepsilon[\bar{h}_2]\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim \varepsilon A \left(\|h_1 - h_2\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} + \|g_1 - g_2\|_{X_\lambda^\beta} \right),$$

which concludes the proof of (4.21), hence of Lemma 4.10. \square

5. PROOF OF THEOREM 4

Let us fix $p \in [1, \alpha]$, $\beta > d/2 + 1$, and recall that f_{in}, f^0 and T are fixed. We now prove Theorem 4 using Banach's fixed point theorem. To do so, we introduce the metric space in which we work:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon} = \mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}^{p,\alpha,\sigma,\beta} := & \left\{ (h, g) \in \mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma} \times X_\lambda^\beta : \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} \leq 2\|f_{\text{in},\perp}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}, \|g\|_{X_\lambda^\beta} \leq A, \right. \\ & \exists (\tilde{h}, \tilde{g}) \in \mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma} \times X_\lambda^\beta, \|\tilde{h}\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} \leq 2\|f_{\text{in},\perp}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}, \|\tilde{g}\|_{X_\lambda^\beta} \leq A, \\ & \left. \partial_t h = \mathcal{B}^\varepsilon h + \frac{1}{\varepsilon} Q(\tilde{h}, \tilde{h}) + \frac{1}{\varepsilon} Q(\tilde{h}, \tilde{g}), h(0) = f_{\text{in},\perp} \right\}, \end{aligned}$$

endowed with the norm

$$\|(h, g)\|_{\mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}} := \|h\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} + \|g\|_{X_\lambda^\beta}.$$

Note that by Lemma 2.6, for ε small enough, this space is non-empty as it contains for instance $(e^{t\mathcal{B}^\varepsilon} f_{\text{in},\perp}, 0)$.

The map Ξ on which we will apply the fixed-point theorem is defined as

$$\begin{aligned} \Xi &: \mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon} \rightarrow \mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}, \quad \Xi(h, g) := (\bar{h}, \bar{g}), \\ \partial_t \bar{h} &= \mathcal{B}^\varepsilon \bar{h} + \frac{1}{\varepsilon} Q(h, h) + \frac{2}{\varepsilon} Q(h, g + f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon h + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}), \quad \bar{h}(0) = f_{\text{in},\perp}, \\ \bar{g} &= \mathcal{S}^\varepsilon[h] + \Psi^\varepsilon(g, g) + \Phi^\varepsilon[h]g, \end{aligned}$$

where we recall the notations

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\varepsilon[h] &:= \mathcal{S}_0^\varepsilon + \Psi^\varepsilon(\mathcal{T}_1^\varepsilon h + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}, 2f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon h + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}) + \mathcal{T}_\infty^\varepsilon h, \\ \mathcal{S}_0^\varepsilon &:= (U^\varepsilon - U_{\text{disp}}^\varepsilon - U^0) \Pi f_{\text{in}} + (\Psi^\varepsilon - \Psi^0)(f^0, f^0), \\ \Phi^\varepsilon[h] &:= 2\Psi^\varepsilon(f^0 + \mathcal{T}_1^\varepsilon h + U_{\text{disp}}^\varepsilon f_{\text{in}}, \cdot). \end{aligned}$$

Proof of Theorem 4. We prove in Step 1 that Ξ is a well-defined contraction of $\mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}$ so that the system (1.23) has a unique solution (h, g) by Banach's fixed point theorem. As explained in Sections 1.4, the functions $f := h + g$ will therefore be a solution of the scaled Boltzmann equation (B $^\varepsilon$). In Step 2, we show that this solution is the unique solution to (1.1) satisfying (1.17). In Step 3, we define the terms u_*^ε and prove they vanish in appropriate topologies.

Step 1: Ξ is a well-defined contraction. Let $(h_j, g_j) \in \mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}$ for $j = 1, 2$, and denote their images by Ξ by $(\bar{h}_j, \bar{g}_j) := \Xi(h_j, g_j)$. According to Lemma 2.6 and (4.2), there holds for some $C(\lambda) > 0$

$$\begin{aligned} \|\bar{h}_j\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} &\leq C(\lambda)\varepsilon(1+A) + \|f_{\text{in},\perp}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}, \\ \|\bar{h}_1 - \bar{h}_2\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} &\lesssim C(\lambda)(1+A)\varepsilon \|(h_1, g_1) - (h_2, g_2)\|_{\mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Furthermore, according to Lemma 4.9, (4.20) and (4.4), we may assume that $C(\lambda)$ also satisfies

$$\begin{aligned} \|\bar{g}_j\|_{X_\lambda^\beta} &\lesssim \|\mathcal{S}^\varepsilon[h_j^\varepsilon]\|_{X_\lambda^\beta} + \|\Psi^\varepsilon(g_j, g_j)\|_{X_\lambda^\beta} + \|\Phi^\varepsilon[h_j]g_j\|_{X_\lambda^\beta} \\ (5.22) \quad &\lesssim \eta_\varepsilon(\lambda, 2\|f_{\text{in},\perp}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}} + A) + \left(C(\lambda)A + C_{\lambda,\varepsilon,2\|f_{\text{in},\perp}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}+A} \right) A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\bar{g}_1 - \bar{g}_2\|_{X_\lambda^\beta} &\leq \|\mathcal{S}^\varepsilon[h_1] - \mathcal{S}^\varepsilon[h_2]\|_{X_\lambda^\beta} + \|\Psi^\varepsilon(g_1 + g_2, g_1 - g_2)\|_{X_\lambda^\beta} \\ &\quad + \|\Phi^\varepsilon[h_1]g_1 - \Phi^\varepsilon[h_2]g_2\|_{X_\lambda^\beta} \\ &\lesssim (\varepsilon C(\lambda)(1+A) + C(\lambda)A + C_{\varepsilon,\lambda,2\|f_{\text{in},\perp}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}}) \|(h_1, g_1) - (h_2, g_2)\|_{\mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}}. \end{aligned}$$

First, set $A = 1$. By Lemma 4.9, one must choose $\varepsilon \ll 1$ and $\lambda \gg 1$ so that the values $C_{\varepsilon,\lambda,2\|f_{\text{in},\perp}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}}$ and $C_{\varepsilon,\lambda,2\|f_{\text{in},\perp}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}+A}$ are small. Then, thanks to Lemma 4.10, there holds up to a reduction of A and ε that $\|\bar{h}_j\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} \leq 2\|f_{\text{in}}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}}$ and $\|\bar{g}_j\|_{X_\lambda^\beta} \leq A$ (the map Ξ is well defined) and $\|(\bar{h}_1, \bar{g}_1) - (\bar{h}_2, \bar{g}_2)\|_{\mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}} \leq \frac{1}{2} \|(h_1, g_1) - (h_2, g_2)\|_{\mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}}$ (the map Ξ is a contraction).

We conclude that Ξ has a unique fixed point $(h^\varepsilon, g^\varepsilon) \in \mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}$, and thus the system (1.23) has a unique solution $(h^\varepsilon, g^\varepsilon) \in \mathcal{X}_{A,\lambda,\varepsilon}$. Therefore, we have constructed a solution $f^\varepsilon := h^\varepsilon + g^\varepsilon$ to the Boltzmann equation (B^ε) .

Step 2: Uniqueness of the solution. To show uniqueness, we may assume that the solution f^ε constructed previously satisfies the bound

$$(5.23) \quad \forall t \in [0, T], \quad \|f^\varepsilon(t)\|_\mathcal{E} < \frac{\sigma_B}{2C_\varepsilon}$$

where C is the constant of Lemma 2.4. Furthermore, by the definitions of α_* (4.1) and α_Q (2.9), one has

$$\alpha > \alpha_*(p) \geq 3 + \frac{d}{p'},$$

thus there exists $\gamma > \alpha_*(1) = 3$ such that $\mathcal{E}^{p,\alpha} \subset \mathcal{E}^{1,\gamma}$ continuously. We therefore assume in this step that $p = 1$. Consider now another solution to (B^ε)

$$f_1^\varepsilon \in \mathcal{C}_b([0, T]; \mathcal{E}) \cap L^p([0, T]; \mathcal{E}_\nu^{p,\alpha})$$

such that $f_1^\varepsilon(0) = f_{\text{in}}$ and define

$$\begin{aligned} D &:= f^\varepsilon - f_1^\varepsilon, \\ S &:= f^\varepsilon + f_1^\varepsilon. \end{aligned}$$

These functions satisfy the following equation:

$$\partial_t D = \mathcal{L}^\varepsilon D + \frac{1}{\varepsilon} Q(D, S) = \mathcal{B}^\varepsilon D + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathcal{A} D + \frac{1}{\varepsilon} Q(D, S).$$

Similar calculations as in the proof of Lemma 2.6 yield for some constant $C > 0$

$$\frac{d}{dt} \|D\|_\mathcal{E} \leq -\frac{\sigma_B}{\varepsilon^2} \|D\|_{\mathcal{E}_\nu} + \frac{C}{\varepsilon} \left(\|D\|_\mathcal{E} \|S\|_{\mathcal{E}_\nu} + \|D\|_{\mathcal{E}_\nu} \|S\|_\mathcal{E} + \frac{1}{\varepsilon} \|D\|_\mathcal{E} \right),$$

which may be rewritten as

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-\phi} \|D\|_\mathcal{E} \right) + \frac{e^{-\phi} \|D\|_{\mathcal{E}_\nu}}{\varepsilon^2} \left(\sigma_B - C\varepsilon \|S\|_\mathcal{E} \right) &\leq 0, \\ \phi(t) &:= \frac{C}{\varepsilon} \int_0^t \|S(t')\|_{\mathcal{E}_\nu} dt' + \frac{Ct}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Define $I = \{t \in [0, T) : D(t) = 0\}$. It is relatively closed in $[0, T)$ because D is continuous, and non-empty since $0 \in I$. For any $t \in I$, assumption (5.23) imply

$$C\varepsilon \|S(t)\|_\mathcal{E} = 2C\varepsilon \|f^\varepsilon(t)\|_\mathcal{E} < \sigma_B,$$

thus, by the continuity of S , there exists some $\delta > 0$ such that

$$\forall t' \in [t, t + \delta), \quad C\varepsilon \|S(t')\|_\mathcal{E} < \sigma_B.$$

We conclude thanks to (5.24) that $[0, t + \delta) \subset I$, thus I is both relatively closed and open in $[0, T)$ and therefore $I = [0, T)$.

Step 3: Convergence of the terms u_^ε .* We define the error terms of Theorem 4 in the following way:

$$\begin{aligned} u_\infty^\varepsilon(t) &:= g(t), \\ u_1^\varepsilon(t) &:= h(t) + \mathcal{T}_1^\varepsilon h(t), \\ u_{\text{ac}}^\varepsilon(t) &:= U_{\text{disp}}^\varepsilon(t) f_{\text{in}}. \end{aligned}$$

The term u_1^ε satisfies by construction and Lemma 4.7

$$\|u_1^\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}} \lesssim \|f_{\text{in}}\|_{\mathcal{E}^{p,\alpha}},$$

which yields the estimate of Theorem 4 by the definition of the norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_\varepsilon^{p,\alpha,\sigma}}$ in Notations 2.5. The term $u_{\text{ac}}^\varepsilon$ vanishes in the senses stated in Theorem 4 thanks to the estimates of Lemma 3.3. Finally, u_∞^ε vanishes uniformly because up to a reduction of the parameters $(G, 1/\lambda, \varepsilon)$ in Step 1, one have from (5.22) and Lemma 4.10

$$\|u_\infty^\varepsilon\|_{X_\lambda^\beta} \lesssim \eta_\varepsilon \rightarrow 0, \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

□

APPENDIX A. TECHNICAL ESTIMATES

Lemma A.1. *Let $a, \omega_0 > 0$, there exists some $C = C(a, \omega_0) > 0$ such that for any $\omega \geq \omega_0$ and $t \geq 0$*

$$\int_0^t \frac{e^{-\omega t'}}{\langle t-t' \rangle^a} dt' \leq \frac{C}{\omega \langle t \rangle^a}.$$

Proof. First, note that there holds

$$\langle t \rangle \leq \langle t' \rangle \langle t-t' \rangle,$$

thus we have

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{e^{-\omega t'}}{\langle t-t' \rangle^a} dt' &\leq \langle t \rangle^{-a} \int_0^t e^{-\omega t'} \langle t' \rangle^a dt' \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-a} \int_0^t e^{-\omega t'} (1 + (t')^a) dt' \\ &\lesssim \frac{1}{\omega \langle t \rangle^a} + \langle t \rangle^{-a} \int_0^t e^{-\omega t'} (t')^a dt'. \end{aligned}$$

Let us perform an integration by parts:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\omega t'} (t')^a dt' &= \frac{a}{\omega} \int_0^t e^{-\omega t'} (t')^{a-1} dt' - \frac{e^{-\omega t}}{\omega} t^a \\ &\lesssim \frac{1}{\omega} \left(\int_0^\infty (t')^{a-1} e^{-\omega_0 t'} dt' - e^{-\omega_0 t} t^a \right). \end{aligned}$$

The factor between parenthesis is bounded because $a-1 > -1$ and thus the integral term converges. □

Lemma A.2. For any $a, \alpha, c, \gamma \in [0, 1)$ and $b, \beta \geq 0$ such that

$$\begin{cases} a + \alpha \leq 1, \\ c \leq a + b, \\ \gamma \leq \alpha + \beta, \end{cases}$$

there exists a constant $C > 0$ such that

$$\int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^a \langle t-t' \rangle^b (t')^\alpha \langle t' \rangle^\beta} \leq C \langle t \rangle^{1-c-\gamma}.$$

Proof. Let us start with the change of variable $t = t'u$:

$$\int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^a \langle t-t' \rangle^b (t')^\alpha \langle t' \rangle^\beta} = t^{1-a-\alpha} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^a \langle t(1-u) \rangle^b u^\alpha \langle tu \rangle^\beta}.$$

This quantity is bounded uniformly in $t \in [0, 1]$ because $a + \alpha \leq 1$. Furthermore,

$$\int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^a \langle t-t' \rangle^b (t')^\alpha \langle t' \rangle^\beta} \leq t^{1-a-\alpha} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^a \langle t(1-u) \rangle^{c-a} u^\alpha \langle tu \rangle^{\gamma-\alpha}},$$

and note that for any $m \in \mathbb{R}$,

$$t^m (t^{-1} + s)^m \lesssim \langle ts \rangle^m,$$

thus the integral can be controlled by

$$\int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^a \langle t-t' \rangle^b (t')^\alpha \langle t' \rangle^\beta} \lesssim t^{1-c-\gamma} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^a (t^{-1} + 1 - u)^{c-a} u^\alpha (t^{-1} + u)^{\gamma-\alpha}}.$$

The last thing to check is that this integral factor in the right hand side is bounded uniformly in $t \geq 1$; on the one hand

$$(1-u)^{-a} (t^{-1} + 1 - u)^{a-c} \leq \begin{cases} (1-u)^{-a} (2-u)^{a-c}, & \text{if } a \geq c, \\ (1-u)^{-c}, & \text{if } a \leq c, \end{cases}$$

and on the other hand

$$u^{-\alpha} (t^{-1} + u)^{\alpha-\gamma} \leq \begin{cases} u^{-\alpha} (1+u)^{\alpha-\gamma}, & \text{if } \alpha \geq \gamma, \\ u^{-\gamma}, & \text{if } \alpha \leq \gamma. \end{cases}$$

In each case, the integral converges because of the assumption $a, \alpha, c, \gamma \in [0, 1)$, which concludes the proof. \square

REFERENCES

- [1] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. Regularizing effect and local existence for the non-cutoff Boltzmann equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 198(1):39–123, 2010.
- [2] R. J. Alonso, B. Lods, and I. Tristani. Fluid dynamic limit of Boltzmann equation for granular hard-spheres in a nearly elastic regime, 2021. arXiv:2008.05173.

- [3] C. Bardos, F. Golse, and C. D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations II Convergence proofs for the Boltzmann equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46:667–753, 1993.
- [4] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations. *Journal of Statistical Physics*, 63:323–344, 1991.
- [5] C. Bardos and S. Ukai. The classical incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1(2):235–257, 1991.
- [6] M. Briant. From the Boltzmann equation to the incompressible Navier-Stokes equations on the torus: A quantitative error estimate. *Journal of Differential Equations*, 259:6072–6141, 2015.
- [7] M. Briant, S. Merino-Aceituno, and C. Mouhot. From Boltzmann to incompressible Navier-Stokes in Sobolev spaces with polynomial weights. *Analysis and Applications*, pages 85–116, 2018.
- [8] R. E. Caflisch. The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33(5):651–666, 1980.
- [9] K. Carrapatoso, M. Rachid, and I. Tristani. Regularization estimates and hydrodynamical limit for the Landau equation, 2021.
- [10] S. Chapman and T. G. Cowling. The mathematical theory of non-uniform gases : an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction, and diffusion in gases, 1952.
- [11] J. Y. Chemin. Remarques sur l’existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(1):20–28, 1992.
- [12] A. de Masi, R. Esposito, and J. L. Lebowitz. Incompressible Navier-Stokes and Euler limits of the Boltzmann equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(8):1189–1214, 1989.
- [13] R. J. DiPerna and P. L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability. *Annals of Mathematics*, 130(2):321–366, 1989.
- [14] R. Ellis and M. Pinsky. The first and second fluid approximations of the linearized Boltzmann equation. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 54:125–156, 1975.
- [15] R. Farwig. Jean Leray: Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace.: Acta math. 63 (1934), 193–248. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 119, 03 2017.
- [16] H. Fujita and T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. i. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16:269–315, 1964.
- [17] I. Gallagher and I. Tristani. On the convergence of smooth solutions from Boltzmann to Navier-Stokes. *Annales Henri Lebesgue*, page 561–614, 2020.
- [18] P. Gervais. A spectral study of the linearized Boltzmann operator in L^2 -spaces with polynomial and Gaussian weights. *Kinetic and related models*, 14:725–747, 2021.
- [19] F. Golse. *Handbook of differential equations*. Esleiver, 2005.
- [20] F. Golse and L. Saint-Raymond. The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels. *Inventiones Mathematicae*, 155:81–161, 2004.
- [21] F. Golse and L. Saint-Raymond. The incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 91:508–552, 05 2009.
- [22] H. Grad. Asymptotic theory of the Boltzmann equation, II. In *Rarefied Gas Dynamics, Volume 1*, volume 1, pages 26–59, Jan. 1963.
- [23] M. P. Gualdani, S. Mischler, and C. Mouhot. Factorization for non-symmetric operators and exponential H-theorem. *Mémoires de la SMF*, 153:3–137, 2017.
- [24] Y. Guo. The Boltzmann equation in the whole space. *Indiana University Mathematics Journal*, 53:1081–1094, 2004.
- [25] Y. Guo. Boltzmann diffusive limit beyond the Navier-Stokes approximation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59:626 – 687, 05 2006.

- [26] F. Hérau, D. Tonon, and I. Tristani. Regularization estimates and Cauchy theory for inhomogeneous Boltzmann equation for hard potentials without cut-off. *Communications in Mathematical Physics*, pages 697–771, 2020.
- [27] D. Hilbert. Sur les problèmes futurs mathématiques. *Compte-Rendu du 2ème Congrès International de Mathématiques, tenu à Paris en 1900 : Gauthier-Villars (Paris, 1902)*, pages 58–114, 1900.
- [28] R. Illner and M. Shinbrot. The Boltzmann equation: global existence for a rare gas in an infinite vacuum. *Communications in Mathematical Physics*, 95(2):217 – 226, 1984.
- [29] N. Jiang, C.-J. Xu, and H. Zhao. Incompressible Navier-Stokes-Fourier limit from the Boltzmann equation: Classical solutions. *Indiana University Mathematics Journal*, 67, 01 2014.
- [30] M. Lachowicz and H. Neunzert. On the initial layer and the existence theorem for the nonlinear Boltzmann equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 9(1):342–366, 1987.
- [31] P.-G. Lemarié. *Recent Development in the Navier–Stokes Problem*. CRC Press, 2002.
- [32] P.-G. Lemarié. *The Navier-Stokes problem in the 21st century*. CRC Press, 2016.
- [33] P.-L. Lions and N. Masmoudi. From the Boltzmann equations to the equations of incompressible fluid mechanics, ii. *Arch Ration Mech Anal*, 158:195–211, 06 2001.
- [34] X. Lu and Y. Zhang. On nonnegativity of solutions of the Boltzmann equation. *Transport Theory and Statistical Physics*, 30(7):641–657, 2001.
- [35] S. Mischler and C. Mouhot. Exponential stability of slowly decaying solutions to the kinetic Fokker-Planck equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 221:677–723, 2016.
- [36] C. Mouhot. Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials. *Communications in Mathematical Physics*, 261:629–672, 2005.
- [37] B. Nicolaenko. Dispersion laws for plane wave propagation. In *Boltzmann equation*, pages 125–172. F. A. Grunbaum, 1971.
- [38] M. Rachid. Incompressible Navier-Stokes-Fourier limit from the landau equation. *Kinetic and Related Models*, 14(4):599–638, 2021.
- [39] T. Rey. A spectral study of the linearized Boltzmann equation for diffusively excited granular media, 2013.
- [40] L. Saint-Raymond. *The Boltzmann equation and its formal hydrodynamic limits*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [41] S. Ukai. Solutions of the Boltzmann equation. 18:37–96, 1986.
- [42] S. Ukai and T. Yang. Mathematical theory of Boltzmann equation. Lecture notes Series-no. 8, Hong Kong: Liu Bie Ju Center for Mathematical Sciences, City University of Hong Kong, 2006.
- [43] T. Yang and H. Yu. Spectrum analysis of some kinetic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 222:731–768, 2016.

Chapitre 6

Boltzmann equation with soft potentials in the whole space

BOLTZMANN EQUATION WITH SOFT POTENTIALS IN THE WHOLE SPACE

KLEBER CARRAPATOSO AND PIERRE GERVAIS

ABSTRACT. We prove the existence of global solutions to the Boltzmann equation when the initial data is a maxwellian plus some small perturbation with polynomial decay. We consider moderately soft potentials (i.e. $-3/2 < \gamma < 0$) either with a strong cutoff assumption (namely $b \in L^\infty$) or without any cutoff assumption.

1. INTRODUCTION

1.1. **The model.** Consider the Boltzmann equation for the unknown $F = F(t, x, v)$, with $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^3$, and $v \in \mathbf{R}^3$:

$$(1.1) \quad \partial_t F + v \cdot \nabla_x F = Q(F, F)$$

complemented with an initial data $F_0 = F_0(x, v)$. The collision operator Q is bilinear and acts only on the velocity variable $v \in \mathbf{R}^3$, which represents the fact that collisions are supposed to be localized in space, and it reads

$$(1.2) \quad Q(f, g)(v) = \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{S}^2} B(v - v_*, \sigma) [f(v'_*)g(v') - f(v_*)g(v)] \, d\sigma \, dv_*.$$

The pre-collision velocities (v', v'_*) and post-collision (v, v_*) are given by

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma \quad \text{and} \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma$$

which is one possible parametrization of the conservation of momentum and energy in an elastic collision

$$v' + v'_* = v + v_* \quad \text{and} \quad |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2.$$

The collision kernel $B(v - v_*, \sigma)$ encodes the physics of the interaction between particles. It is assumed to be nonnegative and to depend only on the relative velocity $|v - v_*|$ and the angle $\cos \theta = \sigma \cdot \frac{(v - v_*)}{|v - v_*|}$ as

$$(1.3) \quad B(v - v_*, \sigma) = |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta),$$

and we will assume in this work that $\gamma \in (-3/2, 0)$. The angular part b is a smooth function (except maybe at $\theta = 0$) which we will assume to satisfy

- in the case of so-called *long range interactions* or non-cutoff interactions

$$\sin \theta b(\cos \theta) \approx \sin^{-(1+2s)} \theta, \quad s \in (0, 1),$$

together with the bound $\gamma + 2s \leq 0$,

- or a strong form of *Grad's cutoff assumption* : $b \in L^\infty$.

Consider the equilibrium $\mu(v) = (2\pi)^{-3/2} e^{-|v|^2/2}$ and define the perturbation

$$F = \mu + f$$

which satisfies

$$(1.4) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{L}f + Q(f, f)$$

complemented with an initial data $f_0 = F_0 - \mu$ and where \mathcal{L} is the linearized collision operator given by

$$(1.5) \quad \mathcal{L}f = Q(\mu, f) + Q(f, \mu).$$

We also denote by Λ the full linearized operator

$$(1.6) \quad \Lambda := \mathcal{L} - v \cdot \nabla_x.$$

It is well known (see for instance [36]) that \mathcal{L} is a nonnegative self-adjoint operator on the space $L_v^2(\mu^{-1}dv)$ with kernel given by

$$\ker(\mathcal{L}) = \text{span}\{\mu, v\mu, |v|^2\mu\}.$$

We define π to be the orthogonal projection onto $\ker(\mathcal{L})$ so that we can decompose

$$f = \pi f + f^\perp, \quad f^\perp := f - \pi f$$

with

$$\pi f = \left(\rho + u \cdot v + \theta \frac{(|v|^2 - 3)}{2} \right) \mu$$

where

$$\rho = \int_{\mathbf{R}^3} f \, dv, \quad u = \int_{\mathbf{R}^3} v f \, dv, \quad \theta = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{(|v|^2 - 3)}{3} f \, dv$$

1.2. State of the art. Let us present the history of the cauchy theory for the Boltzmann equation near equilibrium.

1.2.1. Cutoff case. By working near equilibrium, Grad constructed in 1965 [18] the first spatially inhomogeneous solutions in short times. Ukai gave in the 1970's a new impulse to the Cauchy and established, in the case of hard potentials, the existence of global solutions in $L_v^\infty H_x^s(\langle v \rangle^k \mu^{-1}dv)$, first in the periodic box in 1974 [33], then in the whole space in 1976 [34], by relying on spectral studies of the linearized equation [33, 16, 36] (let us mention also [28]). The case of soft potentials was then treated in 1980 by Caffisch [9], then in 1982 by Asano and Ukai [36] (only for $\gamma \in (-1, 0)$, but his approach was extended to the full range $\gamma \in (-3, 0)$ by Sun and Wu in 2021 [38] then Deng in 2022 [14]). These results were then proven using energy methods in spaces of the form $L_v^2 H_x^s(\mu^{-1}dvdx)$ by Kawashima [25], Liu, Yang and Yu [26], Guo [22] and Strain [31, 32], as well as Duan [15].

In 2017, Gualdani, Mischler and Mouhot, in the line of [27], relaxed the integrability conditions of previous results and constructed solutions in $W_v^{\ell,p} W_x^{s,q}(\langle v \rangle^k dvdx)$ in the case of hard spheres, then the case of soft potentials was studied by Cao [10].

1.2.2. Without cutoff. The first existence result near equilibrium in the non cutoff case is attributed to Ukai [35]; he constructed local solutions for analytic initial data in (x, v) having gaussian decay using the Cauchy-Kowalewski theorem. Between 2011 and 2012, Gressman and Strain [20, 19, 30] and Alexandre, Morimoto, Ukai, Xu, Yang [5, 4, 6] constructed the first global solutions in spaces of the form $H_{x,v}^s(\langle v \rangle^k \mu^{-1}dx dv)$ by working with anisotropic norms. Sohinger extended these results with Strain to some Besov spaces in 2014 [29], and Fang relaxed some technical regularity and integrability assumptions in 2022 [37]. Let us also mention the work of Deng [13] who worked with an anisotropic norm defined from the pseudo-differential study of Alexandre, Hérau and Li [2].

Initial data having polynomial decay were then considered following the impulse given by [21] and thanks to the nonlinear estimates established in [23]. When the domain is the torus, the case of hard potentials was treated in [24, 7], and that of soft potentials in [11].

1.3. Notations. The relation denoted $A \lesssim B$ is to be understood as $A \leq CB$ for some uniform constant $C > 0$, and $A \approx B$ as both $A \lesssim B$ and $B \lesssim A$.

We denote $S_L(t) = \exp(tL)$ the semigroup generated by a linear operator L .

We denote for any function $f = f(x, v)$ the quantity

$$\Phi_r[f](x, v) := f(x, v)|f(x, v)|^{r-2}\|f(v)\|_{L_x^r}^{2-r},$$

which will appear during energy estimates and is such that

$$(1.7) \quad \int f(x, v)\Phi_r[f](x, v)dvdx = \|\Phi_r[f]\|_{L_x^{r'}}^2 = \|f(v)\|_{L_x^r}^2, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|f(t)\|_{L_v^2 L_x^r}^2 = \int \partial_t f(t, v)\Phi_r[f(t)](x, v)dvdx.$$

Note that, in the particular case $r = 2$, one has $\Phi_2[f] = f$.

1.4. Functional spaces and norms. If X is a function space and w a non-negative measurable function, we define the weighted space $X(w)$ as the space associated to the norm

$$\|f\|_{X(w)} := \|wf\|_X.$$

We will consider in this paper some polynomial weight function $m(v) := \langle v \rangle^k$ where $k > 0$.

1.4.1. Velocity spaces in the non-cutoff case. For polynomially weighted spaces, we introduce the anisotropic dissipation space $H^{s,*}(m)$ inspired from the one presented in [24]

$$\|f\|_{H^{s,*}(m)}^2 := \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 + \|f\|_{H^{s,*}(m)}^2, \\ \|g\|_{H^{s,*}(m)}^2 := \int b(\cos \theta) \mu_* \langle v \rangle^\gamma (\mathcal{G} - \mathcal{G}')^2 dv dv_* d\sigma, \quad \mathcal{G} := m \langle v \rangle^{\gamma/2} g,$$

which satisfies the following bound [24, Lemma 2.1]:

$$(1.8) \quad \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{H^s(m)} \lesssim \|f\|_{H^{s,*}(m)} \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2+2s} f\|_{H^s(m)}.$$

We present the norms for gaussian spaces used in [6]:

$$\|f\|_E^2 := \|f\|_{L_v^2(\mu^{-1/2})}^2, \\ \|f\|_{E^*}^2 := \|\langle v \rangle^{\gamma/2+2s} f\|_{L^2(\mu^{-1/2})}^2 + \int B(|v - v_*|, \sigma) \mu_*(\mathcal{F}' - \mathcal{F})^2 d\sigma dv_* d\sigma,$$

where we denoted $\mathcal{F} := \mu^{-1/2} f$. Let us recall that this norm can be compared to isotropic Sobolev norms [6, Proposition 2.2]:

$$\|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{H^s(\mu^{-1/2})} \lesssim \|f\|_{E^*} \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2+2s} f\|_{H^s(\mu^{-1/2})}.$$

1.4.2. Velocity-position spaces in the non-cutoff case. We also define the following polynomially weighted spaces.

$$\|f\|_{\mathbf{X}(m)}^2 := \|f\|_{L_{x,v}^2(m)}^2 + \|\langle v \rangle^{-6s} \nabla_x^3 f\|_{L_{x,v}^2(m)}^2, \\ \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 := \|f\|_{L_x^2 H_v^{s,*}(m)}^2 + \|\langle v \rangle^{-6s} \nabla_x^3 f\|_{L_x^2 H_v^{s,*}(m)}^2.$$

We introduce the gaussian spaces inspired from the ones considered in [30].

$$\|f\|_{\mathbf{E}}^2 := \|f\|_{H_x^3 L_v^2(\mu^{-1/2})}^2, \\ \|f\|_{\mathbf{E}^*}^2 := \|\nabla_x \pi f\|_{H_x^2 L_v^2(\mu^{-1/2})}^2 + \|f^\perp\|_{H_x^3 E^*}^2.$$

Finally, we introduce an equivalent norm $\|\cdot\|_{\mathbf{E}} \approx \|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ induced by the scalar product

$$(1.9) \quad \langle\langle f, g \rangle\rangle_{\mathbf{E}} := \langle f, g \rangle_{\mathbf{E}} + B[f, g],$$

for some bilinear form B which is a small multiple of the one defined in [30, Lemma 2.1] and of the form

$$(1.10) \quad \begin{aligned} B[u, v] := & \sum_{(a, \alpha) \in A} \left\{ \langle \nabla_x u_a, v_\alpha \rangle_{H_x^2} + \langle \nabla_x v_a, u_\alpha \rangle_{H_x^2} \right\} \\ & + \sum_{(b, b') \in B} \left\{ \langle \nabla_x u_b, v_{b'} \rangle_{H_x^2} + \langle \nabla_x v_b, u_{b'} \rangle_{H_x^2} \right\}, \end{aligned}$$

where we denoted for some polynomials $P_\alpha = P_\alpha(v)$ and any function $w = w(x, v)$

$$\begin{aligned} w_c(x) &= \langle w(x, \cdot), \varphi_c \rangle_{L^2(\mu^{-1/2})}, \quad \varphi_c \in \ker(\mathcal{L}), \quad c = a, b, b', \\ w_\alpha(x) &= \langle w(x, \cdot), \psi_\alpha \rangle_{L^2(\mu^{-1/2})}, \quad \psi_\alpha = P_\alpha \mu \in \ker(\mathcal{L})^\perp. \end{aligned}$$

1.4.3. *Functional spaces in the cutoff case.* We will define in the cutoff case

$$\mathbf{X}(m) := H_x^2 L_v^2(m), \quad \mathbf{Y}(m) := H_x^2 L_v^2(\langle v \rangle^{\gamma/2} m), \quad \mathbf{Z}(m) := L_v^2 L_x^1(m).$$

1.5. **Main results.** The main results of this paper are the following.

Theorem 1.1 (Cutoff case). *Assume $\gamma \in (-3/2, 0)$ and consider some polynomial decay rate $k > 3/2 + \max\{1, 2|\gamma|\}$ as well as $k_1 = k + 3|\gamma|/4$. There exists $\varepsilon_0 > 0$ such that any initial data $f_0 \in \mathbf{X}(m_1)$ satisfying $\|f_0\|_{\mathbf{X}(m_1)} + \|f_0\|_{\mathbf{Z}(m_1)} \leq \varepsilon_0$ gives rise to a unique global solution $f \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathbf{X}(m))$ to (1.4) which satisfies the decay estimate*

$$\sup_{t \geq 0} (1+t)^{3/4} \|f(t)\|_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|f_0\|_{\mathbf{X}(m_1)} + \|f_0\|_{\mathbf{Z}(m_1)}.$$

Theorem 1.2 (Non cutoff case). *Assume $s \in (0, 1)$ and $\gamma \in (-3/2, -2s]$ as well as a decay rate $k > \frac{11}{2} + 2s + \max\{7|\gamma|/2, 3|\gamma| + 4s\}$. There exists some small $\varepsilon_0 > 0$ such that, any initial data $f_0 \in \mathbf{X}(m)$ satisfying $\|f_0\|_{\mathbf{X}(m)} \leq \varepsilon_0$ gives rise to a unique global solution f to (1.4) which satisfies the energy estimate*

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\|_{\mathbf{X}(m)}^2 + \int_0^\infty \left(\|f^\perp(t)\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 + \|\nabla_x \pi f(t)\|_{H_x^2 L_v^2}^2 \right) dt \lesssim \|f_0\|_{\mathbf{X}(m)}^2.$$

1.6. **Outline of the paper.** In the cutoff case, the solution to (1.4) in the cutoff case will be constructed by applying a fixed point theorem to the integral form of the equation. This will require estimates on Q (Section 2), as well as decay estimates for $S_\Lambda(t)$ (Section 3) which relies on a factorization argument extending the dispersive estimates from [30] to the space $\mathbf{X}(m)$ we work in. We then show the existence of an unique solution in Section 5.

Following the strategy of [8], the solution in the non-cutoff case will be considered under the form $f = h + g$ where $h(t) \in \mathbf{X}(m)$ evolves according to a «nice» semilinear equation, and g evolves according to the Boltzmann equation plus some coupling term coming from h with convenient decay properties in time and velocity. This system will then be solved using an iterative scheme and an energy method. In Section 2 we prove the necessary estimates on Q and in Section 3 we prove the necessary coercive-type estimate on the linear part of the equation for h and recall those related to the equation for g . We then proceed to prove the existence of a unique solution in Section 4.

2. ESTIMATES ON THE COLLISION OPERATOR

2.1. **Homogeneous estimates in the non-cutoff case.** We cite below the main non-linear estimate [6, Theorem 1.2] established by AMUXY, in a slightly simplified version using the fact that $\gamma + 2s \leq 0$.

Lemma 2.1. *The following bound holds:*

$$\langle Q(f, g), h \rangle_E \lesssim \|h\|_{E^*} (\|f\|_E \|g\|_{E^*} + \|f\|_{E^*} \|g\|_E),$$

in particular, we have

$$\langle Q(g, f), f \rangle_E \lesssim \|f\|_{E^*}^2 \|g\|_E + \|f\|_E \|f\|_{E^*} \|g\|_{E^*}.$$

The goal of this section is to establish similar estimates in spaces with polynomial weights, which we state below.

Proposition 2.2. *Assume $k > 9/2 - |\gamma|/2 + 2s$. There holds for any $\ell > 7/2 + |\gamma| + 2s$*

$$(2.1) \quad \langle Q(f, g), h \rangle_{L_v^2(m)} \lesssim \|h\|_{H^{s,*}(m)} \left(\|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|f\|_{H^{s,*}(m)} + \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{2s} g\|_{H^{s,*}(m)} \right)$$

and for any $\ell > 11/2 + 2|\gamma|$

$$(2.2) \quad \langle Q(g, f), f \rangle_{L_v^2(m)} \lesssim \|f\|_{H_v^{s,*}(m)}^2 \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_{L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)},$$

These estimates will be proved by combining commutator estimates (Lemma 2.4) with He's estimates in L_v^2 (Proposition 2.3, for (2.1)) or new anisotropic estimates in $L^2(m)$ (for (2.2)). Let us start by recalling the estimate established in [23, Theorem 1.1].

Lemma 2.3. *For any $w_1, w_2 \geq 0$ such that $w_1 + w_2 = \gamma + 2s$ and $a, b \in [0, 2s]$ such that $a + b = 2s$, any $\ell > 3/2 + |\gamma + 2s|$, there holds*

$$\langle Q(f, g), h \rangle_{L_v^2} \lesssim \|f\|_{L^2(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{H^a(\langle v \rangle^{w_1})} \|h\|_{H^b(\langle v \rangle^{w_2})}.$$

Let us now state and prove the commutator estimates required to prove Proposition 2.2.

Lemma 2.4. *Suppose $k > 9/2 - |\gamma|/2 + 2s$, there holds for any $\ell > 7/2 + |\gamma| + 2s$*

$$|\langle Q(f, g), h \rangle_{L_v^2(m)} - \langle Q(f, mg), mh \rangle_{L_v^2}| \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)} \left(\|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} + \|g\|_{H_v^{s,*}(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \right),$$

Proof. This proof is adapted from the proof of [7, Proposition 3.1]. Their authors originally considered hard potentials ($\gamma \geq 0$), so we start back from their decomposition (with Γ_0 corresponding to $\Gamma_{1,1}^{(1)}$ and Γ_1 corresponding to $\Gamma_{1,1}^{(2)}$):

$$\langle Q(f, g), h \rangle_{L_v^2(m)} - \langle Q(f, mg), mh \rangle_{L_v^2} = \int B f'_* g' H(m - m') d\sigma dv_* dv = \sum_{j=0}^6 \Gamma_j,$$

where the terms, under the assumption $k > 9/2 + \gamma/2 + 2s$, were shown to satisfy

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\lesssim I \left((\langle v \rangle^{k-1} g)^2; \langle v \rangle^2 f \right)^{1/2} \times I \left(\langle v \rangle^2 f; (mh)^2 \right)^{1/2}, \\ \Gamma_1 &\lesssim \int b(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma \sin \frac{\theta}{2} \langle v \rangle (\mathcal{G} - \mathcal{G}') (\langle v \rangle^2 f)_* (mh)' d\sigma dv_* dv, \\ \Gamma_2 &\lesssim I(g; (mf)^2)^{1/2} \times I(g; (mh)^2), \\ \Gamma_3 &\lesssim I \left((\langle v \rangle^{k-1} f)^2; \langle v \rangle g \right)^{1/2} \times I((mh)^2; \langle v \rangle g)^{1/2}, \\ \Gamma_4 &\lesssim I \left((\langle v \rangle^2 f)^2; \langle v \rangle^{k-2} g \right) \times I(\langle v \rangle^{k-2} g; (mh)^2), \\ \Gamma_5 &\lesssim I \left(\langle v \rangle^{k-4} g; (\langle v \rangle^4 f)^2 \right)^{1/2} \times I(\langle v \rangle^{k-4} g; (mh)^2)^{1/2}, \\ \Gamma_6 &\lesssim I(f; (mg)^2)^{1/2} \times I(f; (mh)^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

and we denoted for compactness

$$\mathcal{G} := \langle v \rangle^{k-2} g, \quad I(\varphi; \Phi) := \int |v - v_*|^\gamma \varphi_* \Phi dv dv_*.$$

First, in virtue of (A.1), we have for some $\ell > 4 + 3/2$ the following estimate:

$$\sum_{j=2}^6 \Gamma_j + \Gamma_0 \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)} \left(\|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_{L_v^2(m)} + \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} \right).$$

Second, using Hölder's inequality for the remaining term, we have for $n > 3/2 - \gamma/2 + s$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\lesssim \int b^{1/2}(\cos \theta) |v - v_*|^{\gamma/2} \sin \frac{\theta}{2} (mh)' (\langle v \rangle^2 f)_*^{1/2} d\sigma dv_* dv \\ &\quad \times b^{1/4}(\cos \theta) \langle v - v_* \rangle^{\gamma/4} \langle v \rangle |\mathcal{G} - \mathcal{G}'|^{1/2} (\langle v \rangle^{2+n} f)_*^{1/2} d\sigma dv_* dv \\ &\quad \times b^{1/4}(\cos \theta) |v - v_*|^{\gamma/2} \langle v - v_* \rangle^{-\gamma/4} |\mathcal{G} - \mathcal{G}'|^{1/2} \langle v_* \rangle^{-n/2} d\sigma dv_* dv \\ &\lesssim \left(\int b(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} [(mh)']^2 (\langle v \rangle^2 f)_* d\sigma dv_* dv \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) \langle v - v_* \rangle^\gamma \langle v \rangle^2 (\mathcal{G} - \mathcal{G}')^2 (\langle v \rangle^{2+n} f)_*^2 d\sigma dv_* dv \right)^{1/4} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) |v - v_*|^{2\gamma} \langle v - v_* \rangle^{-\gamma} (\mathcal{G} - \mathcal{G}')^2 \langle v_* \rangle^{-2n} d\sigma dv_* dv \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Using the change of variable (A.4) followed by (A.1) in the first integral factor, and using Lemma A.6 in the third one (note that $2n > 1 + 2s + \gamma$ and $2\gamma > -3$), we get for $\ell > 2 + 3/2$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\lesssim \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}^{1/2} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) \langle v - v_* \rangle^\gamma \langle v \rangle^2 (\mathcal{G} - \mathcal{G}')^2 (\langle v \rangle^{2+n} f)_*^2 d\sigma dv_* dv \right)^{1/4} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) \langle v - v_* \rangle^\gamma (\mathcal{G} - \mathcal{G}')^2 \langle v_* \rangle^{-2n} d\sigma dv_* dv \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

The inequality $\langle v \rangle \leq \langle v - v_* \rangle \langle v_* \rangle$ and the fact that $\gamma \leq 0$ then imply

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\lesssim \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}^{1/2} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) \langle v \rangle^{2+\gamma} (\mathcal{G} - \mathcal{G}')^2 (\langle v \rangle^{2+n-\gamma/2} f)_*^2 d\sigma dv_* dv \right)^{1/4} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) \langle v \rangle^\gamma (\mathcal{G} - \mathcal{G}')^2 \langle v_* \rangle^{-2n-\gamma} d\sigma dv_* dv \right)^{1/4} \\ &=: \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}^{1/2} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)} \times \mathbf{I}_1^{1/4} \times \mathbf{I}_2^{1/4}. \end{aligned}$$

Let us investigate \mathbf{I}_1 . Denoting $G := \langle v \rangle^{k-1+\gamma/2} g = \langle v \rangle^{1+\gamma/2} \mathcal{G}$, we rewrite this integral as

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &\lesssim \int b(\cos \theta) (G - G')^2 (\langle v \rangle^{2+n-\gamma/2} f)_*^2 d\sigma dv_* dv \\ &\quad + \int b(\cos \theta) (G')^2 (\langle v \rangle^{1+\gamma/2} - \langle v' \rangle^{1+\gamma/2})^2 (\langle v \rangle^{2+n-\gamma/2} f)_*^2 d\sigma dv_* dv \end{aligned}$$

The first part was studied in [24, Proof of Lemma 2.3-(ii)] and corresponds to their term I_{11}^δ ; the authors showed that

$$\int b(\cos \theta) (\langle v \rangle^{\gamma/2} \psi m - (\langle v \rangle^{\gamma/2} \psi m)')^2 \varphi_* d\sigma dv_* dv \lesssim \|\psi\|_{H^{s,*}(m)}^2 \|\varphi\|_{L_v^1(\langle v \rangle^{2s})},$$

thus in our case, for $\ell = 2 + n - \gamma/2 + s > 7/2 - \gamma + 2s$

$$\int b(\cos \theta) (G - G')^2 \left(\langle v \rangle^{2+n-\gamma/2} f \right)_*^2 d\sigma dv_* dv \lesssim \|g\|_{\dot{H}^{s,*}(\langle v \rangle^{k-1})} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)},$$

and the second part is dealt with using the inequality [24, (2.7)] valid for any $\alpha \leq 1$:

$$|\langle v \rangle^\alpha - \langle v' \rangle^\alpha| \lesssim \sin \frac{\theta}{2} \langle v' \rangle^\alpha \langle v_* \rangle^{2-\alpha},$$

which yields for the same ℓ

$$\begin{aligned} \int b(\cos \theta) \mathcal{G}' \left(\langle v \rangle^{1+\gamma/2} - \langle v' \rangle^{1+\gamma/2} \right)^2 \left(\langle v \rangle^{2+n-\gamma/2} f \right)_*^2 d\sigma dv_* dv \\ \lesssim \int b(\cos \theta) \sin^2 \frac{\theta}{2} (G')^2 \left(\langle v \rangle^{2+n-\gamma/2} f \right)_*^2 d\sigma dv_* dv \\ \lesssim \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}^2 \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^{k-1+\gamma/2})}, \end{aligned}$$

because the θ -integral will therefore be convergent. To sum up, the term \mathbf{I}_1 satisfies the estimate

$$\mathbf{I}_1 \lesssim \|g\|_{H^{s,*}(\langle v \rangle^{k-1})} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}^2.$$

Similarly, we have (note that $n + \gamma/2 - s > 3/2$)

$$\mathbf{I}_2 \lesssim \|g\|_{\dot{H}^{s,*}(\langle v \rangle^{k-1})}^2 \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^{k-1+\gamma/2})}.$$

In the end, the term Γ_1 is the only part of the commutator containing a derivative ; for any $\ell > 7/2 - \gamma + 2s$

$$\Gamma_1 \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{\dot{H}^{s,*}(\langle v \rangle^{k-1})},$$

which concludes the proof. \square

We can now prove the main estimates of this section, that is to say those of Proposition 2.2.

Proof of Proposition 2.2. In this proof, we denote $F := mf$, $G := mg$ and $H := mh$.

Step 1: Proof of (2.1). The first estimate (2.1) is a combination of Lemmas 2.3 and 2.4. Lemma 2.3 with $w_1 = k + \gamma/2 + 2s$, $w_2 = k + \gamma/2$ and $a = b = s$ yield

$$\begin{aligned} \langle Q(f, G), H \rangle_{L^2} &\lesssim \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2+2s} g\|_{H^s(m)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{H^s(m)} \\ &\lesssim \|f\|_{L^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{2s} g\|_{H^{s,*}(m)} \|h\|_{H^{s,*}(m)}, \end{aligned}$$

where we used (1.8) in the last line. Lemma 2.4 yield

$$\begin{aligned} |\langle Q(f, g), h \rangle_{L_v^2(m)} - \langle Q(f, G), H \rangle_{L_v^2}| \\ \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)} \left(\|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} + \|g\|_{H_v^{s,*}(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \right) \\ \lesssim \|h\|_{H^{s,*}(m)} \left(\|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|f\|_{H_v^{s,*}(m)} + \|g\|_{H_v^{s,*}(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \right). \end{aligned}$$

Put together, these estimates give (2.1).

Step 2: Reductions for the proof of (2.2). First, we decompose the trilinear form using a commutator:

$$\langle Q(g, f), f \rangle_{L_v^2(m)} = \langle Q(g, F), F \rangle_{L_v^2} + \mathbf{I}_3,$$

where we denoted

$$\mathbf{I}_3 := \langle Q(g, f), f \rangle_{L_v^2(m)} - \langle Q(g, F), F \rangle_{L_v^2}.$$

Second, we decompose the remaining term as

$$\begin{aligned}\langle Q(g, F), F \rangle_{L_v^2(m)} &= \int B(v - v_*, \sigma) (g'_* F' - g_* F) F d\sigma dv dv_* \\ &= \frac{1}{2} \int B(v - v_*, \sigma) (2g'_* F' F - g_* F^2 - g_* (F')^2) d\sigma dv dv_* \\ &\quad + \frac{1}{2} \int B(v - v_*, \sigma) g_* ((F')^2 - F^2) d\sigma dv dv_*.\end{aligned}$$

Using the change of variables (A.5) in the first term of the first integral and the cancellation lemma A.4 in the second integral, we obtain for some $c > 0$

$$\begin{aligned}\langle Q(g, F), F \rangle_{L_v^2(m)} &= - \int B(v - v_*, \sigma) g_* (F' - F)^2 d\sigma dv dv_* - c \int |v - v_*|^\gamma g_* F^2 dv dv_* \\ &=: \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2,\end{aligned}$$

To sum up, we have the decomposition

$$\langle Q(g, f), f \rangle_{L_v^2(m)} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3.$$

The term \mathbf{I}_2 satisfies by Lemma A.1 for any $\ell > 3/2$

$$\mathbf{I}_2 \lesssim \|g\|_{L^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L^2(m)}^2,$$

and the term \mathbf{I}_3 satisfies by Lemma 2.4 for any $\ell > 7/2 + |\gamma|/2 + 2s$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_3 &\lesssim \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} \|f\|_{H^{s,*}(m)} \\ &\quad + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_{L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)},\end{aligned}$$

so that, together, they yield the estimate

$$\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 \lesssim \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|f\|_{H^{s,*}(m)}^2 + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_{L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}.$$

Step 3: Estimate of \mathbf{I}_1 . Let us turn to \mathbf{I}_1 . Using the Cauchy-Schwarz inequality with some positive m to choose later, we have

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &= \int b(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma g_* (F' - F)^2 d\sigma dv dv_* \\ &\leq \left(\int b(\cos \theta) |v - v_*|^{2\gamma} \langle v - v_* \rangle^{-\gamma} \langle v_* \rangle^{-m} (F' - F)^2 d\sigma dv dv_* \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) \langle v - v_* \rangle^\gamma \left(\langle v \rangle^{m/2} g \right)_*^2 (F' - F)^2 d\sigma dv dv_* \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Assuming $m > 3 + \gamma + 2s$, we remove the singularity in the integral prefactor using Lemma A.6, and then use the inequality $\langle v - v_* \rangle^\gamma \leq \langle v \rangle^\gamma \langle v_* \rangle^{-\gamma}$ in both integrals:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_1 &\lesssim \left(\int b(\cos \theta) \langle v - v_* \rangle^\gamma \langle v_* \rangle^{-m} (F' - F)^2 d\sigma dv dv_* \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) \langle v - v_* \rangle^\gamma \left(\langle v \rangle^{m/2} g \right)_*^2 (F' - F)^2 d\sigma dv dv_* \right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\int b(\cos \theta) \langle v_* \rangle^{-m-\gamma} \langle v \rangle^\gamma (F' - F)^2 d\sigma dv dv_* \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int b(\cos \theta) \left(\langle v \rangle^{m/2-\gamma/2} g \right)_*^2 \langle v \rangle^\gamma (F' - F)^2 d\sigma dv dv_* \right)^{1/2} \\ &=: \mathbf{J} [\langle \cdot \rangle^{-m-\gamma}]^{1/2} \mathbf{J} \left[\left(\langle \cdot \rangle^{m/2-\gamma/2} g \right)^2 \right]^{1/2},\end{aligned}$$

where \mathbf{J} is defined as the following integral:

$$\mathbf{J}[\varphi] := \int b(\cos \theta) \varphi_* \langle v \rangle^\gamma (F' - F)^2 d\sigma dv dv_*.$$

Denote $\mathcal{F} := \langle v \rangle^{\gamma/2} F$. This expression will be estimated using results from [24], which requires to split it as

$$\begin{aligned} \mathbf{J}[\varphi] &\lesssim \int b(\cos \theta) \varphi_* (\mathcal{F}' - \mathcal{F})^2 d\sigma dv dv_* \\ &\quad + \int b(\cos \theta) \varphi_* (F')^2 \left(\langle v \rangle^{\gamma/2} - \langle v' \rangle^{\gamma/2} \right)^2 d\sigma dv dv_* =: \mathbf{J}_1[\varphi] + \mathbf{J}_2[\varphi]. \end{aligned}$$

Concerning the term \mathbf{J}_1 , it was studied in [24, Proof of Lemma 2.3-(ii)] and corresponds to their term I_{11}^δ ; the authors showed that

$$\mathbf{J}_1[\varphi] \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{s,*(m)}}^2 \|\varphi\|_{L_v^1(\langle v \rangle^{2s})}.$$

Concerning the term \mathbf{J}_2 , they also showed in [24, (2.7)] that as soon as $\gamma \leq 2$

$$|\langle v \rangle^{\gamma/2} - \langle v' \rangle^{\gamma/2}| \lesssim \theta \langle v' \rangle^{\gamma/2} \langle v_* \rangle^{2-\gamma/2},$$

which then implies, using the change of variable (A.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2[\varphi] &\lesssim \int b(\cos \theta) \theta^2 (\langle v \rangle^{4-\gamma} \varphi)_* (\mathcal{F}')^2 d\sigma dv' dv \\ &\lesssim \int (\langle v \rangle^{4-\gamma} \varphi)_* \mathcal{F}^2 dv_* dv \\ &\lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 \|\varphi\|_{L_v^1(\langle v \rangle^{4-\gamma})}. \end{aligned}$$

To sum up, \mathbf{J} satisfies the bound

$$\mathbf{J}[\varphi] \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{s,*(m)}}^2 \|\varphi\|_{L_v^1(\langle v \rangle^{4-\gamma})}.$$

Going back to \mathbf{I}_1 , we have established that it is controlled as follows:

$$\mathbf{I}_1 \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{s,*(m)}}^2 \|\langle v \rangle^{-m-2\gamma+4}\|_{L_v^1}^{1/2} \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^{m/2-\gamma+2})}.$$

For the second factor to be finite, we need $m > 7-2\gamma$, so in conclusion, for any $\ell > 11/2+2|\gamma|$

$$\mathbf{I}_1 \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{s,*(m)}}^2 \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}.$$

The lemma is proved. \square

2.2. Inhomogeneous estimates in the non-cutoff case. In this section, we prove inhomogeneous nonlinear estimates.

We start by proving the estimates we will use to prove the stability of the iterative scheme from Section 4. Note that the term $\langle v \rangle^{-6s}$ in the definition of $\mathbf{X}(m)$ was included precisely in order to cope with the loss $\langle v \rangle^{2s}$ in the right-hand side of (2.6) which otherwise would prevent to express (2.3) solely in terms of the energy norm $\mathbf{X}(m)$ and the dissipated norm $\mathbf{X}^*(m)$.

Proposition 2.5. *Assume $k > 11/2 + \max\{5|\gamma|/2, 2|\gamma| + 4s\}$, there holds*

$$(2.3) \quad \langle Q(g, f), f \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}(m)} \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{X}^*(m)},$$

$$(2.4) \quad \langle Q(g, f), f \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{E}} + \|f\|_{\mathbf{X}(m)} \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{E}^*}.$$

Proof. Following the strategy of [30], in this proof, we will need the following key inequality:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \|\langle v \rangle^a g\|_{L_x^\infty \dot{H}^{s,*(m)}} &\leq \|\langle v \rangle^a \pi g\|_{L_x^\infty \dot{H}^{s,*(m)}} + \|\langle v \rangle^a g^\perp\|_{L_x^\infty \dot{H}^{s,*(m)}} \\ &\lesssim \|\langle v \rangle^a \nabla_x \pi g\|_{H_x^2 L_v^2} + \|\langle v \rangle^a g^\perp\|_{H_x^2 \dot{H}^{s,*(m)}} \lesssim \|g\|_{\mathbf{E}^*}, \end{aligned}$$

where $a \in \mathbf{R}$, which follows from the $L^\infty - W^{1,6}$ Morrey inequality followed by the $L^6 - L^2$ Gagliardo-Nirenberg inequality and the Sobolev embedding $H_x^2 \hookrightarrow L^6$:

$$\|\varphi\|_{L_x^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{W_x^{1,6}} \approx \|\varphi\|_{L_x^6} + \|\nabla_x \varphi\|_{L_x^6} \lesssim \|\nabla_x \varphi\|_{L_x^2} + \|\nabla_x \varphi\|_{H_x^2} \approx \|\nabla_x \varphi\|_{H_x^2}.$$

We only take care of estimate (2.4), the other one requiring only minor adjustments.

Let us start by expanding the inner product:

$$\begin{aligned} \langle Q(g, f), f \rangle_{\mathbf{X}(m)} &= \langle Q(g, f), f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} + \langle \nabla_x^3 Q(g, f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m\langle v \rangle^{-6s})} \\ &= \langle Q(g, f), f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} + \sum_{\alpha+\beta=3} \langle Q(\nabla_x^\alpha g, \nabla_x^\beta f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m\langle v \rangle^{-6s})} \end{aligned}$$

The first term is bounded using (2.2) for some $\theta > 11/2 + 2|\gamma|$:

$$\begin{aligned} \langle Q(g, f), f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} &\lesssim \int \left\{ \|f(x)\|_{H^{s,*}(m)}^2 \|g(x)\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g(x)\|_{L_v^2(m)} \|f(x)\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)}^2 \right\} dx \\ &\lesssim \|g\|_{L_x^\infty L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \int \|f(x)\|_{H^{s,*}(m)}^2 dx \\ &\quad + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_{L_x^\infty L_v^2(m)} \int \|f(x)\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)}^2 dx \\ &\lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{E}} + \|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\theta)}^2. \end{aligned}$$

If $k + \gamma/2 \geq \theta$ and $k \geq \theta + 4s$, then $\|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\theta)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}$ and $\|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\theta)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}(m)}$, thus

$$\langle Q(g, f), f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{E}} + \|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\theta)} \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}.$$

When $\beta = 3$, we obtain the same estimate:

$$\langle Q(g, \nabla_x^3 f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{E}} + \|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\theta)} \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}.$$

When $\beta = 0$, we use (2.1) with some $\theta > 7/2 + |\gamma| + 2s$:

$$\begin{aligned} \langle Q(\nabla_x^3 g, f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m\langle v \rangle^{-6s})} &\lesssim \int \left\{ \|\nabla_x^3 f\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \|\nabla_x^3 g\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla_x^3 f\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x^3 g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \|f\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-4s})} \right\} dx \\ &\lesssim \|f\|_{L_x^\infty L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \int \|\nabla_x^3 f\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x^3 g\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} dx \\ &\quad + \|f\|_{L_x^\infty H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-4s})} \int \|\nabla_x^3 g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \|\nabla_x^3 f\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} dx \\ &\lesssim \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^{\theta+4s})} \|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

When $\beta = 1$, we use again (2.1) with some $\theta > 7/2 + |\gamma| + 2s$, then follow with the $L^2 - L^3 - L^6$ Hölder inequality:

$$\begin{aligned} \langle Q(\nabla_x^2 g, \nabla_x f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m\langle v \rangle^{-6s})} &\lesssim \int \left\{ \|\nabla_x^3 f\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \|\nabla_x^2 g\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla_x^3 f\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x^2 g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \|\nabla_x f\|_{H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-4s})} \right\} dx \\ &\lesssim \|\nabla_x^3 f\|_{L_x^2 H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x f\|_{L_x^3 L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \|\nabla_x^2 g\|_{L_x^6 H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \\ &\quad + \|\nabla_x^3 f\|_{L_x^2 H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x^2 g\|_{L_x^3 L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \|\nabla_x f\|_{L_x^6 H^{s,*}(m\langle v \rangle^{-4s})}. \end{aligned}$$

We conclude using the embedding $H_x^1 \hookrightarrow L_x^3 \cap L_x^6$:

$$\langle Q(\nabla_x^2 g, \nabla_x f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m\langle v \rangle^{-6s})} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^{\theta+4s})} \|g\|_{\mathbf{X}^*(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{E}}.$$

Arguing similarly when $\beta = 2$, we obtain the same bound:

$$\langle Q(\nabla_x g, \nabla_x^2 f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m\langle v \rangle^{-6s})} \lesssim \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^{\theta+4s})} \|g\|_{\mathbf{X}^*(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g\|_{\mathbf{E}}.$$

This concludes the proof of the first estimate. The second one is proved in the same way. \square

We now prove the estimates which we will use to prove the convergence of the iterative scheme in Section 4.

Proposition 2.6. *Assume $k > 11/2 + \max\{5|\gamma|/2, 2|\gamma| + 4s\}$, there holds*

$$(2.6) \quad \langle Q(f, g), h \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|\langle v \rangle^{2s} g\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|f\|_{\mathbf{X}(m)}),$$

furthermore, when g has gaussian decay, we have

$$(2.7) \quad \langle Q(f, g), h \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{E}} + \|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}(m)}),$$

$$(2.8) \quad \langle Q(g, f), h \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}(m)} + \|\langle v \rangle^{2s} f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{E}}),$$

Proof. Step 1: Proof of the first estimate. Let us start by expanding the inner product:

$$\begin{aligned} \langle Q(g, f), f \rangle_{\mathbf{X}(m)} &= \langle Q(g, f), f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} + \langle \nabla_x^3 Q(g, f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m \langle v \rangle^{-6s})} \\ &= \langle Q(g, f), f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} + \sum_{\alpha+\beta=3} \langle Q(\nabla_x^\alpha g, \nabla_x^\beta f), \nabla_x^3 f \rangle_{L_x^2 L_v^2(m \langle v \rangle^{-6s})}. \end{aligned}$$

The first term is estimated using (2.1):

$$\begin{aligned} \langle Q(f, g), h \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} &\lesssim \int \left\{ \|h\|_{H^{s,*}(m)} \|f\|_{H^{s,*}(m)} \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \right. \\ &\quad \left. + \|h\|_{H^{s,*}(m)} \|\langle v \rangle^{2s} g\|_{H^{s,*}(m)} \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \right\} dx \\ &\lesssim \|h\|_{L_x^2 H^{s,*}(m)} \|f\|_{L_x^2 H^{s,*}(m)} \|g\|_{L_x^\infty L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \\ &\quad + \|h\|_{L_x^2 H^{s,*}(m)} \|\langle v \rangle^{2s} g\|_{L_x^2 H^{s,*}(m)} \|f\|_{L_x^\infty L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \\ &\lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{E}} + \|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^{\theta+4s})}) \end{aligned}$$

Similar computations as in the proof of Proposition 2.5 yield the following estimate for $(\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 1)$:

$$\langle Q(\nabla_x^\alpha f, \nabla_x^\beta g), \nabla_x^3 h \rangle_{L_x^2 L_v^2(m \langle v \rangle^{-6s})} \lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{E}}).$$

We also have by (2.1)

$$\begin{aligned} \langle Q(\nabla_x^3 f, g), \nabla_x^3 h \rangle_{L_x^2 L_v^2(m \langle v \rangle^{-6s})} &\lesssim \int \left\{ \|\nabla_x^3 h\|_{H^{s,*}(m \langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x^3 f\|_{H^{s,*}(m \langle v \rangle^{-6s})} \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla_x^3 h\|_{H^{s,*}(m \langle v \rangle^{-6s})} \|g\|_{H^{s,*}(m \langle v \rangle^{-4s})} \|\nabla_x^3 f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \right\} dx \\ &\lesssim \|\nabla_x^3 h\|_{L_x^2 H^{s,*}(m \langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x^3 f\|_{L_v^2 H^{s,*}(m \langle v \rangle^{-6s})} \|g\|_{L_x^\infty L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \\ &\quad + \|\nabla_x^3 h\|_{L_x^2 H^{s,*}(m \langle v \rangle^{-6s})} \|\nabla_x^3 f\|_{L_x^2 L_v^2(\langle v \rangle^\theta)} \|g\|_{L_x^\infty H^{s,*}(m \langle v \rangle^{-4s})} \\ &\lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\theta)} \|g\|_{\mathbf{E}^*}), \end{aligned}$$

and similarly

$$\langle Q(f, \nabla_x^3 g), \nabla_x^3 h \rangle_{L_x^2 L_v^2(m \langle v \rangle^{-6s})} \lesssim \|h\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|g\|_{\mathbf{E}^*} \|f\|_{\mathbf{X}(m)} + \|f\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g\|_{\mathbf{E}}).$$

This concludes the proof. The proof of the other estimates is similar. \square

Proposition 2.7. *The following estimates holds for the twisted gaussian scalar product:*

$$(2.9) \quad \langle\langle Q(f, g), h \rangle\rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \|h\|_{\mathbf{E}^*} (\|f\|_{\mathbf{E}} \|g\|_{\mathbf{E}^*} + \|f\|_{\mathbf{E}^*} \|g\|_{\mathbf{E}}),$$

furthermore, for any $k \geq 0$ and any bounded compactly supported function χ , we also have for any $\ell > 0$

$$(2.10) \quad \langle\langle f, \chi g \rangle\rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \|f\|_{\mathbf{E}} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)},$$

$$(2.11) \quad \langle\langle f, \chi g \rangle\rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \|f\|_{\mathbf{E}^*} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} + \|\pi f\|_{L_x^2} \|g\|_{\mathbf{X}^*(m)}.$$

Proof. We start by proving (2.9) then comment on how to prove (2.10) and (2.11).

Step 1: Bound of $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ for (2.9). First, since Q is \mathbf{E} -orthogonal to πh , we have

$$\langle Q(f, g), h \rangle_{\mathbf{E}} = \langle Q(f, g), h^\perp \rangle_{L_x^2 L_v^2(\mu^{-1/2})} + \sum_{\alpha+\beta=3} \langle Q(f, g), h^\perp \rangle_{L_x^2 L_v^2(\mu^{-1/2})}.$$

The proof of Proposition 2.6 can then be adapted (and simplified) to get from the homogeneous estimate of Lemma 2.1 in the current setting

$$\langle Q(f, g), h \rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \|h\|_{\mathbf{E}^*} (\|f\|_{\mathbf{E}} \|g\|_{\mathbf{E}^*} + \|f\|_{\mathbf{E}^*} \|g\|_{\mathbf{E}}).$$

The main adjustment is that we need the following adaptation of the bound (2.5):

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \|g\|_{L_x^\infty E^*} &\leq \|\pi g\|_{L_x^\infty E^*} + \|g^\perp\|_{L_x^\infty E^*} \\ &\lesssim \|\nabla_x \pi g\|_{H_x^2 L_v^2} + \|g^\perp\|_{H_x^2 E^*} \approx \|g\|_{\mathbf{E}^*}. \end{aligned}$$

A detailed proof is given in [30, Section 3.1] from which Proposition 2.6 is inspired (note that the authors require more derivative because of their homogeneous nonlinear estimates).

Step 2: Bound of $B[\cdot, \cdot]$ for (2.9). In this step, we use the notation from the definition (1.10) of B . Before considering any estimate, note that because Q is $L_v^2(\mu^{-1/2})$ -orthogonal to $\ker(\mathcal{L})$, denoting $u = Q(f, g)$, we have

$$u_a = u_b = u_{b'} = 0,$$

which leaves us with fewer terms that we estimate using the Cauchy-Schwarz inequality:

$$B[u, h] = \sum_{(a, \alpha) \in A} \langle \nabla_x h_a, u_\alpha \rangle_{H_x^2} \lesssim \sum_{(a, \alpha) \in A} \|\nabla_x h_a\|_{H_x^2} \|u_\alpha\|_{H_x^2}.$$

Using Lemma 2.1 and the fact that $\psi_a \in E^*$, we have

$$\|u_\alpha\|_{H_x^2}^2 \lesssim \sum_{0 \leq m+n \leq 2} \int \left\{ \|\nabla_x^m f\|_E \|\nabla_x^n f\|_{E^*} + \|\nabla_x^m f\|_E \|\nabla_x^n f\|_{E^*} \right\}^2 dx.$$

Combined with the embedding $H_x^2 \hookrightarrow L_x^\infty$ and (2.12), this yields

$$\|u_\alpha\|_{H_x^2} \lesssim \|f\|_{\mathbf{E}} \|g\|_{\mathbf{E}^*} + \|f\|_{\mathbf{E}^*} \|g\|_{\mathbf{E}}.$$

Finally, since $\varphi_a \in \ker(\mathcal{L})$, we get

$$\|\nabla_x h_a\|_{H_x^2} \lesssim \|\nabla_x \pi h\|_{H_x^2 E} \lesssim \|h\|_{\mathbf{E}^*}.$$

To sum up, we have shown

$$B[Q(f, g), h] \lesssim \|h\|_{\mathbf{E}^*} (\|f\|_{\mathbf{E}} \|g\|_{\mathbf{E}^*} + \|f\|_{\mathbf{E}^*} \|g\|_{\mathbf{E}}).$$

Step 3: Proof of and (2.10) and (2.11). Brutal bounds lead to (2.10). The proof of (2.11)

is immediate from (1.8) which implies

$$\langle f, \chi g \rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2+s} f\|_{\mathbf{E}} \|\chi \langle v \rangle^\ell g\|_{\mathbf{E}} \lesssim (\|f\|_{\mathbf{E}^*} + \|\pi\|_{L_x^2}) \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)}.$$

Similar arguments from the previous step also lead to

$$B[f, \chi g] \lesssim \|f\|_{\mathbf{E}^*} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)}.$$

This concludes the proof. \square

2.3. Estimates in the cutoff case. The goal of this section is to prove the following estimates.

Proposition 2.8. *Assume $k > 3/2 + |\gamma|/2$, there holds for any $\ell > 3/2 + 1$*

$$\langle Q(f, g), h \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|h\|_{\mathbf{Y}(m)} \left(\|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{\mathbf{Y}(m)} + \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|f\|_{\mathbf{Y}(m)} \right),$$

and if $k > 3/2 + |\gamma|$, we have

$$\begin{aligned} \|Q(f, g)\|_{\mathbf{X}(m)} &\lesssim \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^\gamma g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|\langle v \rangle^\gamma f\|_{\mathbf{X}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)}, \\ \|Q(f, g)\|_{L_v^2 L_x^1(m)} &\lesssim \|\langle v \rangle^\ell f\|_{L_x^2 L_v^2} \|\langle v \rangle^\gamma g\|_{L_x^2 L_v^2(m)} + \|\langle v \rangle^\gamma f\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^\ell g\|_{L_x^2 L_v^2}. \end{aligned}$$

Let us start by first proving the space homogeneous estimates for Q .

Lemma 2.9. *Assume $k > 3/2 + |\gamma|/2$, there holds for any $\ell > 3/2 + 1$*

$$\langle Q(f, g), h \rangle_{L_v^2(m)} \lesssim \left(\|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_{L_v^2(m)} + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \right) \|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{L_v^2(m)}.$$

Proof. Denote

$$F := mf, \quad G := mg, \quad H := mh.$$

With these notations, (A.9) yields

$$f'_* g' m \lesssim (\langle v \rangle f')'_* G' + \theta^{k-1} F'_* g'.$$

This allows to split the trilinear form as

$$\begin{aligned} |\langle Q(f, g), h \rangle_{L^2(m)}| &= \left| \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) (f'_* g' m H - f_* G H) \, d\sigma dv_* dv \right| \\ &\lesssim \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) \left((\langle v \rangle f')'_* G' H + \theta^{k-1} F'_* g' H + f_* G H \right) \, d\sigma dv_* dv \\ &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3, \end{aligned}$$

where we denoted

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &:= \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) (\langle v \rangle f')'_* G' H \, d\sigma dv_* dv, \\ \mathbf{I}_2 &:= \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) \theta^{k-1} F'_* g' H \, d\sigma dv_* dv, \\ \mathbf{I}_3 &:= \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) f_* G H \, d\sigma dv_* dv. \end{aligned}$$

For \mathbf{I}_1 , we rewrite it using (A.5) and then use the Cauchy-Schwarz inequality:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &\lesssim \left(\int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) (\langle v \rangle f')'_* (H')^2 \, d\sigma dv_* dv \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) (\langle v \rangle f')'_* G'^2 \, d\sigma dv_* dv \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

We use (A.4) in the prefactor, which does not create a singularity:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &\lesssim \left(\int |v - v_*|^\gamma b(2 \cos \theta) (\langle v \rangle f')'_* H^2 \, d\sigma dv_* dv \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) (\langle v \rangle f')'_* G^2 \, d\sigma dv_* dv \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

and then integrate in σ :

$$\mathbf{I}_1 \lesssim \left(\int |v - v_*|^\gamma (\langle v \rangle f')'_* H^2 \, dv_* dv \right)^{1/2} \times \left(\int |v - v_*|^\gamma (\langle v \rangle f')'_* G^2 \, dv_* dv \right)^{1/2}.$$

For \mathbf{I}_2 , we get with the same manipulations (using (A.3) this time)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &\lesssim \left(\int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) F_*^2 g d\sigma dv_* dv \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int |v - v_*|^\gamma b(\cos(\pi - 2\theta)) (\pi - 2\theta)^{k-3-\gamma} g_* H^2 d\sigma dv_* dv \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

The σ -integral in the postfactor converges because $k > \gamma + 1$, thus

$$\mathbf{I}_2 \lesssim \left(\int |v - v_*|^\gamma F_*^2 g dv_* dv \right)^{1/2} \times \left(\int |v - v_*|^\gamma g_* H^2 dv_* dv \right)^{1/2}.$$

For \mathbf{I}_3 , we only require the Cauchy-Schwarz inequality to obtain (after integrating in σ)

$$\mathbf{I}_3 \lesssim \left(\int |v - v_*|^\gamma f_* G^2 dv_* dv \right)^{1/2} \times \left(\int |v - v_*|^\gamma f_* H^2 dv_* dv \right)^{1/2}.$$

Each of these integral bounds are estimated using for some $\ell > 3/2$ the following control:

$$\int |v - v_*|^\gamma \varphi_* \Psi dv dv_* \lesssim \|\langle v \rangle^\ell \varphi\|_{L_v^2} \|\langle v \rangle^\gamma \Psi\|_{L_v^1},$$

which comes from (A.1). This concludes the proof. \square

We can now prove the main nonlinear estimates of this section, that is to say those of Proposition 2.8.

Proof of Proposition 2.8. In the first step, we prove the first estimate, and then proceed to deduce the other ones by duality arguments.

Step 1: First estimate. We first write the scalar product as

$$\begin{aligned} \langle Q(f, g), h \rangle_{\mathbf{X}(m)} &= \langle Q(f, g), h \rangle_{L_{x,v}^2(m)} + \langle \nabla_x^2 Q(f, g), \nabla_x^2 h \rangle_{L_{x,v}^2(m)} \\ &= \langle Q(f, g), h \rangle_{L_{x,v}^2(m)} + \langle Q(\nabla_x^2 f, g), \nabla_x^2 h \rangle_{L_{x,v}^2(m)} \\ &\quad + \langle Q(f, \nabla_x^2 g), \nabla_x^2 h \rangle_{L_{x,v}^2(m)} + \langle Q(\nabla_x f, \nabla_x g), \nabla_x^2 h \rangle_{L_{x,v}^2(m)}. \end{aligned}$$

The first term is estimated using Lemma 2.9 and by applying Hölder's inequality:

$$\begin{aligned} \langle Q(f, g), h \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} &\lesssim \|\langle v \rangle^\ell f\|_{L_x^\infty L_v^2} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} g\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} h\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \\ &\quad + \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^\ell g\|_{L_x^\infty L_v^2} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} h\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \end{aligned}$$

from which we deduce using the Sobolev embedding $H_x^2(\mathbf{R}^3) \hookrightarrow L_x^\infty(\mathbf{R}^3)$

$$\langle Q(f, g), h \rangle_{L_{x,v}^2(m)} \lesssim \|h\|_{\mathbf{Y}(m)} \left(\|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{\mathbf{Y}(m)} + \|f\|_{\mathbf{Y}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \right).$$

The second term is estimated the same way:

$$\begin{aligned} \langle Q(\nabla_x^2 f, g), \nabla_x^2 h \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} &\lesssim \|\langle v \rangle^\ell \nabla_x^2 f\|_{L_x^2 L_v^2} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} g\|_{L_x^\infty L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \nabla_x^2 h\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \\ &\quad + \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \nabla_x^2 f\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^\ell g\|_{L_x^\infty L_v^2} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \nabla_x^2 h\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \\ &\lesssim \|h\|_{\mathbf{Y}(m)} \left(\|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{\mathbf{Y}(m)} + \|f\|_{\mathbf{Y}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \right), \end{aligned}$$

and similarly, we have

$$\langle Q(f, \nabla_x^2 g), \nabla_x^2 h \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} \lesssim \|h\|_{\mathbf{Y}(m)} \left(\|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{\mathbf{Y}(m)} + \|f\|_{\mathbf{Y}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \right).$$

The last term is estimated using the Hölder inequality $L^4 - L^2 - L^2$ followed by the Sobolev embedding $H_x^1(\mathbf{R}^3) \hookrightarrow L_x^4(\mathbf{R}^3)$:

$$\begin{aligned} \langle Q(\nabla_x f, \nabla_x g), \nabla_x^2 h \rangle_{L_x^2 L_v^2(m)} &\lesssim \|\langle v \rangle^\ell \nabla_x f\|_{L_x^4 L_v^2} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \nabla_x g\|_{L_x^4 L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \nabla_x^2 h\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \\ &\quad + \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \nabla_x f\|_{L_x^4 L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^\ell \nabla_x g\|_{L_x^4 L_v^2} \|\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} \nabla_x^2 h\|_{L_x^2 L_v^2(m)} \end{aligned}$$

$$\lesssim \|h\|_{\mathbf{Y}(m)} \left(\|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{\mathbf{Y}(m)} + \|f\|_{\mathbf{Y}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \right).$$

This concludes this step.

Step 2: Second estimate. Assume that $k + \frac{\gamma}{2} > \frac{3}{2}$. We use a duality argument together.

$$\begin{aligned} \|mQ(f, g)\|_{H_x^2 L_v^2} &= \sup_{\|\psi\|_{H_x^2 L_v^2} \leq 1} \langle mQ(f, g), \psi \rangle_{H_x^2 L_v^2} \\ &= \sup_{\|\psi\|_{H_x^2 L_v^2} \leq 1} \langle Q(f, g), \langle v \rangle^{-\gamma} m^{-1} \psi \rangle_{\mathbf{X}(m \langle v \rangle^{\gamma/2})}. \end{aligned}$$

Using the first estimate, we have

$$\begin{aligned} \|mQ(f, g)\|_{H_x^2 L_v^2} &\lesssim \sup_{\|\psi\|_{H_x^2 L_v^2} \leq 1} \left(\|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^\gamma g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|\langle v \rangle^\gamma f\|_{\mathbf{X}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \right) \|\psi\|_{H_x^2 L_v^2} \\ &= \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|\langle v \rangle^\gamma g\|_{\mathbf{X}(m)} + \|\langle v \rangle^\gamma f\|_{\mathbf{X}(m)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)}. \end{aligned}$$

this concludes this step.

Step 3: Third estimate. Arguing by duality and using Lemma 2.9, we have

$$\begin{aligned} \|mQ(f, g)\|_{L_v^2} &= \sup_{\|\psi\|_{L_v^2} \leq 1} \langle mQ(f, g), \psi \rangle_{L_v^2} \\ &= \sup_{\|\psi\|_{L_v^2} \leq 1} \langle Q(f, g), \langle v \rangle^{-\gamma} m^{-1} \psi \rangle_{L_v^2(\langle v \rangle^{\gamma/2} m)} \\ &\lesssim \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^{\gamma m})} + \|f\|_{L_v^2(\langle v \rangle^{\gamma m})} \|g\|_{L_v^2(\langle v \rangle^\ell)}. \end{aligned}$$

We then integrate in x to deduce the (non-optimal but sufficient) bound

$$\begin{aligned} \|Q(f, g)\|_{L_x^1 L_v^2(m)} &= \int_{\mathbf{R}^3} \|Q(f, g)\|_{L_v^2(m)} \, dx \\ &\lesssim \int_{\mathbf{R}^3} \|\langle v \rangle^\ell f\|_{L_v^2} \|\langle v \rangle^\gamma g\|_{L_v^2(m)} + \|\langle v \rangle^\gamma f\|_{L_v^2(m)} \|\langle v \rangle^\ell g\|_{L_v^2} \, dx \\ &\lesssim \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^{\gamma m})} + \|f\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^{\gamma m})} \|g\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\ell)}. \end{aligned}$$

This concludes this step. □

3. LINEAR THEORY

3.1. Estimates on \mathcal{L} . The goal of this section is to prove the following proposition.

Proposition 3.1. *Suppose $\gamma \in (0, 3/2)$, there holds for cutoff potentials, $k > 3/2 + |\gamma|/2$ and $r \in [1, 2]$*

$$(3.1) \quad \int (\mathcal{L}f) \Phi_r[f] m^2 \, dx \, dv \leq -c \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 + C \|f\|_{L_v^2 L_x^r}^2,$$

for non-cutoff potentials and $k > 7/2 - |\gamma|/2 + 2s$

$$(3.2) \quad \int (\mathcal{L}f) f m^2 \, dx \, dv \leq -c \|f\|_{L_x^2 H_v^{s,*}(m)}^2 + C \|f\|_{L_{x,v}^2}^2.$$

Let us separate introduce a splitting of the angular cross section $b(\cos \theta)$ so as to separate the grazing collisions part and the non-grazing one:

$$b(\cos \theta) = b(\cos \theta) \mathbf{1}_{|\theta| \leq \delta} + b(\cos \theta) \mathbf{1}_{|\theta| \geq \delta} =: b_\delta(\cos \theta) + b_\delta^c(\cos \theta),$$

which induces the following splitting \mathcal{L} as a singular regularizing part and a weakly coercive non-singular part:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\delta + \mathcal{L}_\delta^c.$$

Denote ν_δ the approximate collision frequency defined as

$$\nu_\delta(v) = \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{S}^2} |v - v_*|^\gamma b_\delta^c(\cos \theta) \mu(v_*) \, d\sigma \, dv_*$$

which satisfies, according to the cutoff case (see for instance [17]), for some positive constants $\nu_0, \nu_1 > 0$

$$(3.3) \quad \nu_0 \delta^{-2s} \langle v \rangle^\gamma \leq \nu_\delta(v) \leq \nu_1 \delta^{-2s} \langle v \rangle^\gamma, \quad \forall v \in \mathbf{R}^3.$$

The cutoff part of the linearized collision operator then splits

$$(3.4) \quad \mathcal{L}_\delta^c f = -\nu_\delta f + \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{S}^2} |v - v_*|^\gamma b_\delta^c(\cos \theta) [f(v'_*)\mu(v') - f(v_*)\mu(v) + \mu(v'_*)f(v')] \, d\sigma \, dv_*.$$

We first turn to the part of \mathcal{L} which is associated to the non-grazing collisions.

Lemma 3.2 (Non-grazing collisions). *Suppose $k > 3/2 + |\gamma|/2$. For any $r \in [1, 2]$, there holds in the cutoff case*

$$(3.5) \quad \int (\mathcal{L}f) \Phi_r[f] m^2 \, dx \, dv \leq -c \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 + C \|f\|_{L_v^2 L_x^r}^2,$$

and in the non-cutoff case

$$(3.6) \quad \int (\mathcal{L}_\delta^c f) f m^2 \, dx \, dv \leq -c \delta^{-2s} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_{x,v}^2(m)}^2 + C_\delta \|f\|_{L_{x,v}^2}^2.$$

Proof. In this proof, using (1.7), we will denote as to lighten the notations

$$\begin{aligned} g(v) &:= \|f(v)\|_{L_x^r} = \|\Phi_r[f](v)\|_{L_x^{r'}}, \\ G(v) &:= \|mf(v)\|_{L_x^r} = \|\Phi_r[mf](v)\|_{L_x^{r'}}. \end{aligned}$$

Step 1: Reductions. Firstly, in the case of cutoff potentials, we will be led to consider

$$\begin{aligned} \int (\mathcal{L}f) \Phi_r[f] m^2 \, dv \, dx &= -\|\nu^{1/2} f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 + \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^c(\cos \theta) f'_* \mu' \Phi_r[mf] m \, d\sigma \, dv_* \, dx \, dv \\ &\quad - \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) f_* \mu \Phi_r[mf] m \, d\sigma \, dv_* \, dx \, dv \\ &\quad + \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) \mu'_* f' \Phi_r[mf] m \, d\sigma \, dv_* \, dx \, dv, \end{aligned}$$

so that by Holder's inequality and the bounds (3.3) on ν , we have

$$\begin{aligned} \int (\mathcal{L}f) \Phi_r[f] m^2 \, dx \, dv + \nu_0 \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 &\leq \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3, \\ \mathbf{I}_1 &:= \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) g'_* \mu' G m \, d\sigma \, dv_* \, dv, \\ \mathbf{I}_2 &:= \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) g_* \mu G m \, d\sigma \, dv_* \, dv, \\ \mathbf{I}_3 &:= \int |v - v_*|^\gamma b(\cos \theta) \mu'_* g' G m \, d\sigma \, dv_* \, dv. \end{aligned}$$

Secondly, in the case of non-cutoff potentials, for similar reasons, we will be led to consider

$$\begin{aligned} \int (\mathcal{L}_\delta^c f) f m^2 \, dx \, dv + \nu_0 \delta^{-2s} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_{x,v}^2(m)}^2 &\leq \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3, \\ \mathbf{I}_1 &:= \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^c(\cos \theta) g'_* \mu' G m \, d\sigma \, dv_* \, dv, \\ \mathbf{I}_2 &:= \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^c(\cos \theta) g_* \mu G m \, d\sigma \, dv_* \, dv, \\ \mathbf{I}_3 &:= \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^c(\cos \theta) \mu'_* g' G m \, d\sigma \, dv_* \, dv. \end{aligned}$$

We will perform the computations for the non-cutoff case, the cutoff case corresponding roughly to taking (for instance) $\delta = 1$ or $s = 0$.

In Step 2, we prove that the terms $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_3$ satisfy the bound

$$(3.7) \quad \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_3 \lesssim \delta^{-1-\gamma/2-2s} \int |v - v_*|^\gamma G^2 \varphi_* \, dv \, dv_*,$$

where φ denotes a Schwartz function (typically of the form $\mu^a \langle v \rangle^b$) from which we will deduce using Lemma A.2 with $\eta = \varepsilon \delta^{1+\gamma/2}$ that there holds

$$(3.8) \quad \mathbf{I}_j \leq \varepsilon \delta^{-2s} \left\| \langle v \rangle^{\gamma/2} g \right\|_{L_v^2(m)}^2 + C_{\varepsilon, \delta} \|g\|_{L_v^2}^2.$$

In Step 3, we will prove that \mathbf{I}_2 satisfies (3.8). This will indeed prove the lemma by taking ε small enough.

Step 2: Proof of (3.7) for \mathbf{I}_1 and \mathbf{I}_3 . We start by splitting \mathbf{I}_1 using (A.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) g'_* \mu' m G \, d\sigma \, dv_* \, dv \\ &\lesssim \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) (\langle v \rangle g)'_* (\mu m)' G \, d\sigma \, dv_* \, dv \\ &\quad + \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) G'_* \mu' G \, d\sigma \, dv_* \, dv =: \mathbf{I}_{11} + \mathbf{I}_{12}, \end{aligned}$$

Rewriting \mathbf{I}_{11} thanks to (A.5), using the Cauchy-Schwarz inequality, then integrating in σ one obtains

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{11} &= \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) (\langle v \rangle g)'_* (\mu m) G' \, d\sigma \, dv_* \, dv \\ &\leq \left(\int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) (\langle v \rangle g)'_* (\mu m) \, d\sigma \, dv_* \, dv \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) (\mu m) (G')^2 \, d\sigma \, dv_* \, dv \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Using the change of variables (A.3) in the post-factor, then integrating in σ we get

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{11} &\lesssim \left(\int b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma (\langle v \rangle g)'_* (\mu m) \, dv_* \, dv \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int b_\delta^\varepsilon(\cos(\pi - 2\theta)) |v - v_*|^\gamma (\pi - 2\theta)^{-2-\gamma} (\mu m) G_*^2 \, dv_* \, dv \right)^{1/2} \\ &\lesssim \delta^{-1-\gamma/2-2s} \int |v - v_*|^\gamma (\mu m) G_*^2 \, dv_* \, dv. \end{aligned}$$

To bound the part \mathbf{I}_{12} , we start again with the Cauchy-Schwarz inequality:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{12} &= \int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) G'_* \mu' G \, d\sigma \, dv_* \, dv \\ &\leq \left(\int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) (G'_*)^2 \mu' \, d\sigma \, dv_* \, dv \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int |v - v_*|^\gamma b_\delta^\varepsilon(\cos \theta) \mu' G^2 \, d\sigma \, dv_* \, dv \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Up to the pre-post change of variables (A.5) in the prefactor, this term is dealt with in the same way as \mathbf{I}_{11} . Similar computations (using (A.4) this time) lead to

$$\mathbf{I}_3 \lesssim \delta^{-2s} \int |v - v_*|^\gamma (\mu m) G_*^2 \, dv_* \, dv.$$

This concludes this step.

Step 3: Proof of (3.8) for \mathbf{I}_2 . For \mathbf{I}_2 , we integrate in σ to get the factor δ^{-2s} , then in v_* using the estimate (A.1) with the power $\theta = k + \gamma/2 > 3/2$, which yields

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \int b_\delta^c(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma g_* \mu G \, dv_* dv \\ &\lesssim \delta^{-2s} \left\| \langle v \rangle^\theta g \right\|_{L_v^2} \int \langle v \rangle^\gamma \mu G \, dv \\ &\lesssim \varepsilon \delta^{-2s} \left\| \langle v \rangle^{\gamma/2} g \right\|_{L_v^2(m)} + C_{\varepsilon, \delta} \|g\|_{L_v^2}, \end{aligned}$$

where the last line comes from Young's inequality. \square

We now turn to the part of \mathcal{L} associated with the grazing collisions (in the non-cutoff case).

Lemma 3.3 (Grazing collisions). *Suppose $s \in (0, 1)$ and $k > 7/2 - |\gamma|/2 + 2s$. There exists some $c > 0$ such that for any $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$*

$$(3.9) \quad \langle \mathcal{L}_\delta f, f \rangle_{L_v^2(m)} \leq \varepsilon \|f\|_{\dot{H}^{s,*}}^2 + C_\varepsilon \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2,$$

$$(3.10) \quad \langle \mathcal{L} f, f \rangle_{L_v^2(m)} \leq -c \|f\|_{\dot{H}^{s,*}(m)}^2 + C \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2,$$

for some $C_\varepsilon > 0$.

Proof. We start by splitting the Dirichlet form using commutators:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\delta f, f \rangle_{L_v^2(m)} &= \langle Q_\delta(\mu, f), f \rangle_{L_v^2(m)} + \langle Q_\delta(f, \mu), f \rangle_{L_v^2(m)} \\ &= \langle Q_\delta(\mu, F), F \rangle_{L_v^2} + R_1 + R_2 + R_3, \end{aligned}$$

where we denoted

$$\begin{aligned} R_1 &:= \langle Q_\delta(f, m\mu), F \rangle_{L_v^2}, \\ R_2 &:= \langle Q_\delta(\mu, f), f \rangle_{L_v^2(m)} - \langle Q_\delta(\mu, F), F \rangle_{L_v^2}, \\ R_3 &:= \langle Q_\delta(f, \mu), f \rangle_{L_v^2(m)} - \langle Q_\delta(f, m\mu), F \rangle_{L_v^2}. \end{aligned}$$

The first term is estimated using Lemma 2.3 (where we choose $w_1 = \gamma/2 + 2s$, $w_2 = \gamma/2$ for the weights, $a = 2s$ and $b = 0$ for the derivatives):

$$R_1 \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2,$$

and the two other ones using Lemma 2.4 and Young's inequality:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &\leq C \left(\|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)} \|f\|_{\dot{H}^{s,*}(m)} \right) \\ &\leq C_\varepsilon \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 + \varepsilon \|f\|_{\dot{H}^{s,*}(m)}^2. \end{aligned}$$

We then focus on the first term which provides the anisotropic dissipation $\dot{H}^{s,*}(m)$:

$$\begin{aligned} \langle Q_\delta(\mu, F), F \rangle_{L_v^2(m)} &= \int B_\delta(v - v_*, \sigma) (\mu'_* F' - \mu_* F) F \, d\sigma dv_* dv \\ &= \frac{1}{2} \int B_\delta(v - v_*, \sigma) (2\mu'_* F' F - \mu_* F^2 - \mu'_* F^2) \, d\sigma dv_* dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \int B_\delta(v - v_*, \sigma) (\mu'_* - \mu_*) F^2 \, d\sigma dv_* dv. \end{aligned}$$

We use (A.5) to change the term $\mu'_* F^2$ of the first integral into $\mu_*(F')^2$, and the cancellation lemma (Proposition A.4) in the second integral:

$$\begin{aligned} \langle Q_\delta(\mu, F), F \rangle_{L_v^2(m)} &= -\frac{1}{2} \int B_\delta(v - v_*, \sigma) \mu'_* (F' - F)^2 \, d\sigma dv_* dv \\ &\quad + C_\delta \int |v - v_*|^\gamma \mu_* F^2 \, dv_* dv, \end{aligned}$$

where $C_\delta \lesssim 1$. We thus have in virtue of (A.1)

$$\langle Q_\delta(\mu, F), F \rangle_{L_v^2(m)} + \frac{1}{2} \int B_\delta(v - v_*, \sigma) \mu'_*(F' - F)^2 d\sigma dv_* dv \lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2.$$

Next, using (A.5), and then $|v - v_*| \leq \langle v \rangle \langle v_* \rangle$ combined with the fact that $\gamma \leq 0$, we have

$$\begin{aligned} & - \int B_\delta(v - v_*, \sigma) \mu'_*(F' - F)^2 d\sigma dv_* dv \\ &= - \int b_\delta(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma \mu'_*(F' - F)^2 d\sigma dv_* dv \\ &\leq - \int b_\delta(\cos \theta) \langle v \rangle^\gamma (\mu \langle v \rangle^{-\gamma})_*(F' - F)^2 d\sigma dv_* dv \\ &= - \int b_\delta(\cos \theta) (\mu \langle v \rangle^\gamma)_*(\mathcal{F}' - \mathcal{F})^2 d\sigma dv_* dv \\ &\quad - 2 \int b_\delta(\cos \theta) (\mu \langle v \rangle^\gamma)_* (\langle v \rangle^{\gamma/2} - \langle v' \rangle^{\gamma/2}) F' (\mathcal{F}' - \mathcal{F}) d\sigma dv_* dv \\ &\quad - \int b_\delta(\cos \theta) (\mu \langle v \rangle^\gamma)_* (\langle v \rangle^{\gamma/2} - \langle v' \rangle^{\gamma/2})^2 (F')^2 d\sigma dv_* dv, \end{aligned}$$

where we denoted $\mathcal{F} =: m \langle v \rangle^{\gamma/2} f$. The second term is then absorbed using Young's inequality $2ab \leq \frac{1}{2}a^2 + 2b^2$:

$$\begin{aligned} & - \int B_\delta(v - v_*, \sigma) \mu'_*(F' - F)^2 d\sigma dv_* dv \\ &\leq - \frac{1}{2} \int b_\delta(\cos \theta) (\mu \langle v \rangle^\gamma)_*(\mathcal{F}' - \mathcal{F})^2 d\sigma dv_* dv \\ &\quad + \int b_\delta(\cos \theta) (\mu \langle v \rangle^\gamma)_* (\langle v \rangle^{\gamma/2} - \langle v' \rangle^{\gamma/2})^2 (F')^2 d\sigma dv_* dv, \end{aligned}$$

The singularity in the second term is canceled by the difference $\langle v \rangle^{\gamma/2} - \langle v' \rangle^{\gamma/2}$. Indeed, using the following inequality [24, (2.7)] valid for any $\gamma \leq 2$

$$|\langle v \rangle^{\gamma/2} - \langle v' \rangle^{\gamma/2}| \lesssim \theta \langle v' \rangle^{\gamma/2} \langle v_* \rangle^{2-\gamma/2},$$

followed by the change of variable (A.4), we obtain

$$\begin{aligned} & - \int B_\delta(v - v_*, \sigma) \mu'_*(F' - F)^2 d\sigma dv_* dv + \frac{1}{2} \int b_\delta(\cos \theta) (\mu \langle v \rangle^\gamma)_*(\mathcal{F}' - \mathcal{F})^2 d\sigma dv_* dv \\ &\lesssim \int b_\delta(\cos 2\theta) \theta^2 (\mu \langle v \rangle^{2-\gamma/2})_* \mathcal{F}^2 d\sigma dv_* dv \\ &\lesssim \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2. \end{aligned}$$

Together with the previous estimates, we conclude that

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\delta f, f \rangle_{L_v^2(m)} &\leq - \frac{1}{2} \int b_\delta(\cos \theta) (\mu \langle v \rangle^\gamma)_*(\mathcal{F}' - \mathcal{F})^2 d\sigma dv_* dv \\ &\quad + \varepsilon \|f\|_{\dot{H}^{s,*}(m)}^2 + C_\varepsilon \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2. \end{aligned}$$

The second term being non-positive, we conclude that (3.9) holds. Furthermore, this proof works when replacing b_δ by b (which corresponds, in a way, to taking δ large), thus (3.10) also holds. \square

We now deduce the main estimates of this section.

Proof of Proposition 3.1. The cutoff estimate (3.1) is just Lemma 3.2, so we only take care of the non-cutoff estimate (3.2). We get from Lemmas 3.2 and (3.9) that for δ small enough

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} f, f \rangle_{L_v^2(m)} &= \langle \mathcal{L}_\delta^c f, f \rangle_{L_v^2(m)} + \langle \mathcal{L}_\delta f, f \rangle_{L_v^2(m)} \\ &= \left\{ \varepsilon \|f\|_{\dot{H}^{s,*}(m)}^2 + C_\varepsilon \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 \right\} + \left\{ -c\delta^{-2s} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 + C \|f\|_{L_v^2(m)}^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \|f\|_{\dot{H}^{s,*}(m)}^2 - \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 + C \|f\|_{L_v^2(m)}^2.$$

We interpolate this estimate with (3.10): for any $\theta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}f, f \rangle_{L_v^2(m)} &\leq [\theta\varepsilon - (1-\theta)c] \|f\|_{\dot{H}^{s,*}(m)}^2 \\ &\quad + [-\theta + (1-\theta)C] \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2(m)}^2 + \theta C \|f\|_{L_v^2(m)}^2. \end{aligned}$$

We deduce (3.2) by taking θ close enough to 1 and ε small enough. \square

3.2. Estimates on Λ . We already know from [30, (2.20)] that in the gaussian space \mathbf{E} , the linearized operator Λ dissipates the \mathbf{E}^* -norm. We recall here this result.

Proposition 3.4. *In the case of non-cutoff potentials, the equivalent scalar product defined in (1.9) satisfy the coercive-type estimate:*

$$\langle \Lambda f, f \rangle_{\mathbf{E}} \lesssim -\|f\|_{\mathbf{E}^*}^2.$$

Concerning the polynomial space $\mathbf{X}(m)$, we will adopt two different strategies in the cutoff and non-cutoff case. In both cases, we will rely on the following splitting of the linearized operator Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mathcal{A} + \mathcal{B}, \\ \mathcal{A} &:= M\chi_R, \quad \mathcal{B} := \Lambda - \mathcal{A}, \end{aligned}$$

where χ_R is a smooth function satisfying $\mathbf{1}_{|v| \leq R} \leq \chi_R \leq \mathbf{1}_{|v| \leq 2R}$. The parameters $M, R > 0$ will be tuned later in order to make \mathcal{B} dissipative.

Proposition 3.5. *Assume $k > 3/2 + |\gamma|/2$. In the case of cutoff potentials, there holds for $N \geq 0$ and $r \in [1, 2]$*

$$\|S_{\mathcal{B}}(t)f\|_{L_v^2 L_x^r(m)} \lesssim \langle t \rangle^{-N/|\gamma|} \|\langle v \rangle^N f\|_{L_v^2 L_x^r(m)},$$

and in the case of non-cutoff potentials

$$\langle \mathcal{B}f, f \rangle_{L_{x,v}^2(m)} \lesssim -\|f\|_{L_x^2 \dot{H}_v^{s,*}(m)}^2,$$

where we assumed M and R to be large enough in both cases.

Proof. We focus on the cutoff estimate, the non-cutoff one being a particular case of Step 1 with $r = 2$. Let us denote in this proof $f(t) := S_{\mathcal{B}}(t)f_0$. In the first step, we prove a hierarchy of differential inequalities for the $L^2(\langle v \rangle^\ell)$ -norms of $f(t)$, and in the second we interpolate these inequalities to obtain the decay estimate.

Step 1: Differential inequality. The norm of $f(t)$ satisfies the following estimate :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|f(t)\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 = \langle \mathcal{L} - \mathcal{A}f, \Phi_r[f] \rangle_{L_{x,v}^2} - \langle v \cdot \nabla_x f, \Phi_r[f] \rangle_{L_{x,v}^2}.$$

The second term vanishes in virtue of its gradient structure :

$$(\nabla_x f) \Phi_r[f] = \nabla_x (|f|^r) \|f(v)\|_{L_x^r}^{2-r},$$

thus by Proposition 3.1, we have in both cutoff and non-cutoff cases for some $\eta > 0$ small enough and $C > 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 \leq -c \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 + C \|f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 - M \|\chi_R f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2.$$

This inequality rewrites

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 \leq -\frac{c}{2} \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 - \int \left(\frac{c}{2} \langle v \rangle^\gamma - m^{-2} + M\chi_R \right) \|f(v)\|_{L_x^r}^2 m^2 dv.$$

For large values of $|v|$, we have that $\eta\langle v \rangle^\gamma - m^{-2} > 0$ by the assumption $k > |\gamma|/2$, thus for M and R large enough we have

$$\frac{c}{2}\langle v \rangle^\gamma - m^{-2} + M\chi_R > 0,$$

from which we deduce

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 \leq -\lambda \|\langle v \rangle^{\gamma/2} f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2.$$

Step 2: Interpolation argument. We may assume that M and R are such that also

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\langle v \rangle^N f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 \leq 0,$$

so that by interpolation we get, denoting $a = 2N/\gamma$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 \leq -\lambda \frac{\left(\|f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2\right)^{1+1/a}}{\left(\|\langle v \rangle^N f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2\right)^{1/a}} \leq -\lambda \frac{\left(\|f\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2\right)^{1+1/a}}{\left(\|\langle v \rangle^N f_0\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2\right)^{1/a}}.$$

From this differential inequality we deduce, for all $t \geq 0$,

$$\|f(t)\|_{L_v^2 L_x^r(m)}^2 \lesssim \langle t \rangle^{-a} \|f_0\|_{L_v^2 L_x^r(m_1)}^2,$$

which completes the proof. \square

Proposition 3.6. *Consider the case of cutoff potentials. For any $k > 3/2 + 2|\gamma|$ and any $k_1 \geq k + \frac{3}{4}|\gamma|$, there holds*

$$\|S_\Lambda(t)f\|_{\mathbf{x}(m) \cap \mathbf{z}(m)} \lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|f\|_{\mathbf{x}(m_1) \cap \mathbf{z}(m_1)}.$$

Proof. The time decay of S_Λ is an immediate consequence of the Duhamel formula

$$S_\Lambda(t)f = S_B f + \int_0^t S_\Lambda(t-\tau) \mathcal{A} S_B(\tau) d\tau f$$

and the decay estimates for S_B from Proposition 3.5 combined with the integrability gain induced by \mathcal{A} . More precisely, Proposition 3.5 under the assumption $k_1 > k + \frac{3}{4}|\gamma|$ implies

$$\|S_B(t)f\|_{L_v^2 H_x^2(m) \cap L_v^2 L_x^1(m)} \lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|f\|_{L_v^2 H_x^2(m_1) \cap L_v^2 L_x^1(m_1)},$$

as well as, under the assumption $k > 3/2 + |\gamma|/2 + 3/2|\gamma|$

$$\|\langle v \rangle^a \mathcal{A} S_B(t)f\|_{H_x^2 L_v^2(\mu^{-1/2}) \cap L_v^2 L_x^r(\mu^{-1/2})} \lesssim \langle t \rangle^{-3/2} \|f\|_{L_v^2 H_x^2(m) \cap L_v^2 L_x^r(m)},$$

where we took $a > 0$ large enough so that we have from [30, (2.6)]:

$$\|S_\Lambda(t)f\|_{H_x^2 L_v^2(\mu^{-1/2})} \lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|\langle v \rangle^a f\|_{H_x^2 L_v^2(\mu^{-1/2}) \cap L_v^2 L_x^r(\mu^{-1/2})}.$$

Plugging these estimates in the Duhamel formula, we then obtain:

$$\begin{aligned} \|S_\Lambda(t)f\|_{H_x^2 L_v^2(m) \cap L_v^2 L_x^r(m)} &\lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|f\|_{H_x^2 L_v^2(m_1) \cap L_v^2 L_x^r(m_1)} \\ &\quad + \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-3/4} \langle \tau \rangle^{-3/2} d\tau \|f\|_{H_x^2 L_v^2(m_1) \cap L_v^2 L_x^r(m_1)} \\ &\lesssim \langle t \rangle^{-3/4} \|f\|_{H_x^2 L_v^2(m_1) \cap L_v^2 L_x^r(m_1)}. \end{aligned}$$

This concludes the proof. \square

4. CAUCHY THEORY IN THE NON-CUTOFF CASE

Drawing inspiration from [8], we seek a solution to (1.4) of the form

$$f(t) = h(t) + g(t) \in \mathbf{X}(m) + \mathbf{E}$$

where the two parts evolves according to the differential system

$$\begin{cases} \partial_t h = \mathcal{B}h + Q(h, h) + Q(g, h) + Q(h, g), \\ \partial_t g = \Lambda g + Q(g, g) + \mathcal{A}h, \\ h(0, x, v) = f_0(x, v), \quad g(0, x, v) = 0. \end{cases}$$

We will construct a solution to this system by building a sequence of approximate solutions $(h_N, g_N)_{N=0}^\infty$ initialized as $(h_0, g_0) = 0$ and defined inductively by

$$\begin{cases} \partial_t h_{N+1} = \mathcal{B}h_{N+1} + Q(h_N, h_{N+1}) + Q(g_N, h_{N+1}) + Q(h_{N+1}, g_N), \\ \partial_t g_{N+1} = \Lambda g_{N+1} + Q(g_N, g_{N+1}) + \mathcal{A}h_N, \\ h_{N+1}(0, x, v) = f_0(x, v), \quad g_{N+1}(0, x, v) = 0. \end{cases}$$

To do so, we introduce the following functional spaces \mathcal{E} and \mathcal{X} :

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{X}(m)}^2 &:= \sup_{t \geq 0} \|h(t)\|_{\mathbf{X}(m)}^2 + \int_0^\infty \|h(t)\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 dt, \\ \|h\|_{\mathcal{X}(m_0)}^2 &:= \sup_{t \geq 0} \langle t \rangle^\theta \|h(t)\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2 + \int_0^\infty \langle t \rangle^\theta \|h(t)\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 dt, \\ \|g\|_{\mathcal{E}}^2 &:= \sup_{t \geq 0} \|g(t)\|_{\mathbf{E}}^2 + \int_0^\infty \|g(t)\|_{\mathbf{E}^*}^2 dt, \end{aligned}$$

where the parameter θ and the weight function $m_0(v) = \langle v \rangle^{k_0}$ are such that

$$2 < \theta < \frac{2(k - k_0)}{|\gamma|}.$$

4.1. Stability of the scheme. In this section, we will show by induction that for some small $\varepsilon, \eta > 0$ to tune later, if the initial data is small:

$$\|f_0\|_{\mathbf{X}(m)} = \eta\varepsilon,$$

then the following bounds hold:

$$\|h_N\|_{\mathcal{X}(m)} + \|h_N\|_{\mathcal{X}(m_0)} + \|g_N\|_{\mathcal{E}} \lesssim \varepsilon^2 + \|f_0\|_{\mathbf{X}(m)}.$$

This is of course true for $N = 0$. Assume this bound for some $N \geq 0$ and let us deduce it for $N + 1$. Note that, if η, ε are small enough, we have in particular

$$(4.1) \quad \|h_N\|_{\mathcal{X}(m)} + \|h_N\|_{\mathcal{X}(m_0)} + \|g_N\|_{\mathcal{E}} \leq \varepsilon.$$

4.1.1. Stability of h_{N+1} in norm $\mathcal{X}(m)$. We start with the first equation. The weak coercivity estimate on \mathcal{B} from Proposition 3.5 gives for some $\lambda > 0$

$$\langle \mathcal{B}h_{N+1}, h_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(m)} \leq -\lambda \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2,$$

and the non-linear terms are estimated using Proposition 2.5:

$$\begin{aligned} \langle Q(h_N, h_{N+1}), h_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(m)} &\lesssim \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|h_N\|_{\mathbf{X}(m)} \\ &\quad + \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m)} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|h_N\|_{\mathbf{X}^*(m)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Q(g_N, h_{N+1}), h_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(m)} &\lesssim \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g_N\|_{\mathbf{E}} \\ &\quad + \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m)} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}, \end{aligned}$$

as well as the bound (2.7):

$$\langle Q(h_{N+1}, g_N), h_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(m)} \lesssim \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 \|g_N\|_{\mathbf{E}}$$

$$+ \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|h_N\|_{\mathbf{X}(m)} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}.$$

To sum up, we have the following energy estimate for h_{N+1} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m)}^2 + \lambda \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 &\lesssim \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)}^2 (\|g_N\|_{\mathbf{E}} + \|h_N\|_{\mathbf{X}(m)}) \\ &\quad + \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m)} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)} (\|h_N\|_{\mathbf{X}^*(m)} + \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}) \\ &\quad + \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m)} \|h_N\|_{\mathbf{X}(m)} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}. \end{aligned}$$

Integrating in time and simplifying by $\|h_{N+1}\|_{\mathcal{X}(m)}$, we obtain using the bounds (4.1)

$$\|h_{N+1}\|_{\mathcal{X}(m)} \lesssim \varepsilon \|h_{N+1}\|_{\mathcal{X}(m)} + \varepsilon^2 + \|f_0\|_{\mathbf{X}(m)},$$

which, assuming ε small enough, simplifies as

$$(4.2) \quad \|h_{N+1}\|_{\mathcal{X}(m)} \lesssim \varepsilon^2 + \|f_0\|_{\mathbf{X}(m)}.$$

This concludes this step.

4.1.2. *Stability of h_{N+1} in norm $\mathcal{Y}(m_0)$.* As for the estimates with the weight m , we have for some $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2 + \lambda \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 &\lesssim \varepsilon \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 + \varepsilon \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*} \\ &\quad + \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m_0)} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} (\|h_N\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} + \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}), \end{aligned}$$

which, assuming ε small enough, simplifies as

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 &\lesssim \varepsilon \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*} \\ &\quad + \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m_0)} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} (\|h_N\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} + \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}), \end{aligned}$$

Moreover, since we have $\|\langle v \rangle^{\gamma/2} h\|_{\mathbf{X}(m_0)} \leq \|h\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}$, the following interpolation inequality holds for any $R > 0$:

$$\langle R \rangle^{-|\gamma|} \|h\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2 \leq \|h\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 + \langle R \rangle^{-|\gamma|-2(k-k_0)} \|h\|_{\mathbf{X}(m)}^2,$$

thus, taking $\langle R \rangle = (\frac{\lambda}{2\theta})^{1/|\gamma|} (1+t)^{1/|\gamma|}$, we have

$$\frac{2\theta}{\lambda} (1+t)^{-1} \|h\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2 \leq \|h\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 + \frac{2\theta}{\lambda} (1+t)^{-1-\frac{2(k-k_0)}{|\gamma|}} \|h\|_{\mathbf{X}(m)}^2.$$

We now plug this control in the energy estimate:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2 + \frac{\lambda}{4} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 + \frac{\theta}{2} (1+t)^{-1} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 \\ \lesssim \varepsilon \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*} + (1+t)^{-1-\frac{2(k-k_0)}{|\gamma|}} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m)}^2 \\ + \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m_0)} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} (\|h_N\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} + \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}), \end{aligned}$$

and then multiply both sides by $(1+t)^\theta$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ (1+t)^\theta \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2 \right\} + \frac{\lambda}{2} (1+t)^\theta \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)}^2 \\ \lesssim \varepsilon (1+t)^\theta \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*} + (1+t)^{\theta-1-\frac{2(k-k_0)}{|\gamma|}} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m)}^2 \\ + (1+t)^\theta \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}(m_0)} \|h_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} (\|h_N\|_{\mathbf{X}^*(m_0)} + \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}). \end{aligned}$$

Integrating in time, we get

$$\|h_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(m_0)}^2 \lesssim \varepsilon^2 \|h_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(m_0)} + \|h_{N+1}\|_{\mathcal{X}(m)}^2 + \varepsilon \|h_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(m_0)}^2 + \|f_0\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2,$$

where we used the fact that $\theta - 1 - \frac{2(k-k_0)}{|\gamma|} < -1$. Assuming ε small enough, this bound simplifies as

$$\|h_{N+1}\|_{\mathcal{D}(m_0)}^2 \lesssim \|h_{N+1}\|_{\mathcal{D}(m)}^2 + \|f_0\|_{\mathbf{X}(m_0)}^2,$$

and plugging in (4.2), we finally get

$$(4.3) \quad \|h_{N+1}\|_{\mathcal{D}(m_0)} \lesssim \varepsilon^2 + \|f_0\|_{\mathbf{X}(m_0)}.$$

This concludes this step.

4.1.3. *Stability of g_{N+1} in norm \mathcal{E} .* We now turn to the second equation. The weak coercivity estimate from Proposition 3.4 gives us for some $\lambda > 0$

$$\langle\langle \Lambda g_{N+1}, g_{N+1} \rangle\rangle_{\mathbf{E}} \leq -\lambda \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}^*}^2.$$

The nonlinear term is estimated using (2.9):

$$\langle\langle Q(g_N, g_{N+1}), g_{N+1} \rangle\rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \varepsilon \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}^*}^2 + \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}^*} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}.$$

The coupling term is estimated using (2.11):

$$\langle\langle \mathcal{A}h_N, g_{N+1} \rangle\rangle_{\mathbf{E}} \lesssim \|h_N\|_{\mathbf{X}(m_0)} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}}.$$

Together, these bounds give the following energy estimate for g_{N+1} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}(m)}^2 + \lambda \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}^*}^2 &\lesssim \varepsilon \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}^*}^2 + \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}^*} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*} \\ &\quad + \|h_N\|_{\mathbf{X}(m_0)} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}}, \end{aligned}$$

which, assuming ε small enough, simplifies as

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}(m)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}^*}^2 \lesssim \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}^*} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*} + \|h_N\|_{\mathbf{X}(m_0)} \|g_{N+1}\|_{\mathbf{E}}.$$

Integrating in time and simplifying by $\|g_{N+1}\|_{\mathcal{E}}$, we finally get

$$\|g_{N+1}\|_{\mathcal{E}} \lesssim \varepsilon^2 + \|h_N\|_{\mathcal{D}(m_0)} \lesssim \varepsilon^2 + \|f_0\|_{\mathbf{X}(m)}.$$

where we used the assumption $\|h_N\|_{\mathcal{D}(m_0)} \lesssim \varepsilon^2 + \|f_0\|_{\mathbf{X}(m)}$ in the second inequality. This concludes this step.

4.2. **Convergence of the scheme.** Let us denote $\underline{m}(v) = m(v)\langle v \rangle^{-2s}$, the successive differences of $(h_N)_{N=0}^\infty$ by $d_{N+1} := h_{N+1} - h_N$, that of $(g_N)_{N=0}^\infty$ by $e_{N+1} := g_{N+1} - g_N$, and consider the equations satisfied by d_{N+1}

$$\begin{aligned} \partial_t d_{N+1} &= \mathcal{B}d_{N+1} + Q(h_N, d_{N+1}) + Q(d_N, h_N) \\ &\quad + Q(g_N, d_{N+1}) + Q(e_N, h_N) \\ &\quad + Q(d_{N+1}, g_N) + Q(h_N, e_N), \\ d_{N+1}(0, x, v) &= 0, \end{aligned}$$

as well as that satisfied by e_{N+1} :

$$\begin{aligned} \partial_t e_{N+1} &= \Lambda e_{N+1} + Q(g_N, e_{N+1}) + Q(e_N, g_N) + \mathcal{A}d_N, \\ e_{N+1}(0, x, v) &= 0. \end{aligned}$$

In this section, we establish recursive estimates on e_N and g_N which we will use to deduce

$$\|e_N\|_{\mathcal{E}}, \|d_N\|_{\mathcal{D}(\underline{m})}, \|d_N\|_{\mathcal{D}(\underline{m}_0)} \lesssim \varepsilon^{N/3},$$

thus implying the convergence of h_N and g_N for ε small enough.

4.2.1. *Recursive estimates for d_N in norm $\mathcal{X}(\underline{m})$ and for e_N in norm \mathcal{E} .* We start by considering the first equation. The estimates of Proposition 2.5 give the following control:

$$\begin{aligned} \langle Q(h_N, d_{N+1}), d_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(\underline{m})} &\lesssim \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 \|h_N\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} \\ &\quad + \|h_N\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}, \\ \langle Q(g_N, d_{N+1}), d_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(\underline{m})} &\lesssim \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 \|g_N\|_{\mathbf{E}} \\ &\quad + \|g_N\|_{\mathbf{E}^*} \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}, \end{aligned}$$

the estimate (2.7) gives

$$\begin{aligned} \langle Q(d_{N+1}, g_N), d_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(\underline{m})} &\lesssim \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 \|g_N\|_{\mathbf{E}} \\ &\quad + \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|g_N\|_{\mathbf{E}^*} \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}, \\ \langle Q(h_N, e_N), d_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(\underline{m})} &\lesssim \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|h_N\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|e_N\|_{\mathbf{E}} \\ &\quad + \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|e_N\|_{\mathbf{E}^*} \|h_N\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}, \end{aligned}$$

and the estimates (2.8) and (2.6) give respectively the bounds which force to work in the larger space $\mathbf{X}(\underline{m})$ instead of $\mathbf{X}(\underline{m})$:

$$\begin{aligned} \langle Q(e_N, h_N), d_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(\underline{m})} &\lesssim \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|e_N\|_{\mathbf{E}^*} \|h_N\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} \\ &\quad + \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|h_N\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|e_N\|_{\mathbf{E}}, \\ \langle Q(d_N, h_N), d_{N+1} \rangle_{\mathbf{X}(\underline{m})} &\lesssim \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|d_N\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|h_N\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} \\ &\quad + \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|h_N\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|d_N\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}. \end{aligned}$$

As in the step of stability, we put these bounds together and integrate the resulting energy estimate to obtain the following control:

$$\begin{aligned} \|d_{N+1}\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} &\lesssim \|d_{N+1}\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} (\|h_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} + \|g_N\|_{\mathcal{E}}) \\ &\quad + \|g_N\|_{\mathcal{E}} \|d_{N+1}\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} + \|e_N\|_{\mathcal{E}} \|h_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} \\ &\quad + \|h_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} (\|e_N\|_{\mathcal{E}} + \|d_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})}) \\ &\lesssim \varepsilon \|d_{N+1}\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} + \varepsilon \|e_N\|_{\mathcal{E}} + \varepsilon \|d_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})}, \end{aligned}$$

where we used the stability estimates (4.1). Assuming ε small enough, this simplifies as

$$(4.4) \quad \|d_{N+1}\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} \lesssim \varepsilon \|e_N\|_{\mathcal{E}} + \varepsilon \|d_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})}.$$

Similarly, the equation on e_{N+1} gives the following control:

$$\|e_{N+1}\|_{\mathcal{E}} \lesssim \|g_N\|_{\mathcal{E}} \|e_{N+1}\|_{\mathcal{E}} + \|g_N\|_{\mathcal{E}} \|e_N\|_{\mathcal{E}} + \|d_N\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)},$$

which, using the stability estimates and assuming ε small enough, simplifies as

$$\|e_{N+1}\|_{\mathcal{E}} \lesssim \varepsilon \|e_N\|_{\mathcal{E}} + \|d_N\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)}.$$

4.2.2. *Recursive estimate for d_N in norm $\mathcal{Y}(\underline{m}_0)$.* Arguing as in the step of stability, we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ (1+t)^\theta \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}(\underline{m}_0)}^2 \right\} &+ \frac{\lambda}{2} (1+t)^\theta \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m}_0)}^2 \\ &\lesssim (1+t)^\theta \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}(\underline{m}_0)} \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m}_0)} (\|h_N\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m}_0)} + \|g_N\|_{\mathbf{E}^*}) \\ &\quad + (1+t)^\theta \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m}_0)} \|h_N\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m}_0)} (\|e_N\|_{\mathbf{E}} + \|d_N\|_{\mathbf{X}(\underline{m}_0)}) \\ &\quad + (1+t)^\theta \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m}_0)} \|h_N\|_{\mathbf{X}(\underline{m}_0)} (\|e_N\|_{\mathbf{E}^*} + \|d_N\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m}_0)}) \\ &\quad + (1+t)^{\theta-1-\frac{2(k-k_0)}{|\gamma|}} \|d_{N+1}\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2. \end{aligned}$$

After integrating and using the bounds from the stability estimate, we are left with

$$\begin{aligned} \|d_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)}^2 &\lesssim \varepsilon \|d_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)}^2 + \|d_{N+1}\|_{\mathcal{X}(\underline{m})}^2 \\ &\quad + \varepsilon \|d_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)} \left(\|e_N\|_{\mathcal{E}} + \|d_N\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)} \right) \\ &\lesssim \varepsilon \|d_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)}^2 + \varepsilon \left(\|e_N\|_{\mathcal{E}}^2 + \|d_N\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)}^2 \right) + \|d_{N+1}\|_{\mathcal{X}(\underline{m})}^2, \end{aligned}$$

where we used Young's inequality in the last line. Assuming ε small enough and plugging (4.4) in, this bound simplifies as

$$\|d_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)} \lesssim \varepsilon \|e_N\|_{\mathcal{E}} + \varepsilon \|d_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m}_0)} + \varepsilon \|d_N\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)}.$$

4.2.3. *Proof of convergence.* We have established that for any $N \geq 0$

$$\begin{cases} \|d_{N+1}\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} \lesssim \varepsilon \|d_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} + 0 + \varepsilon \|e_N\|_{\mathcal{E}}, \\ \|d_{N+1}\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)} \lesssim \varepsilon \|d_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} + \varepsilon \|d_N\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)} + \varepsilon \|e_N\|_{\mathcal{E}}, \\ \|e_{N+1}\|_{\mathcal{E}} \lesssim 0 + \|d_N\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)} + \varepsilon \|e_N\|_{\mathcal{E}}. \end{cases}$$

Since the eigenvalues of this system are of order $\varepsilon^{1/3}$, we deduce

$$\|e_N\|_{\mathcal{E}} + \|d_N\|_{\mathcal{X}(\underline{m})} + \|d_N\|_{\mathcal{Y}(\underline{m}_0)} \lesssim \varepsilon^{N/3},$$

and consequently, assuming ε small enough, that $(h_N, g_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (h, g)$ in $\mathcal{X}(\underline{m}) \times \mathcal{E}$. In virtue of the stability estimates, the limit thus satisfies the bounds

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|h(t)\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2 + \int_0^\infty \|h(t)\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 dt &\lesssim \|f_0\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2, \\ \sup_{t \geq 0} \langle t \rangle^\theta \|h(t)\|_{\mathbf{X}(\underline{m}_0)}^2 + \int_0^\infty \langle t \rangle^\theta \|h(t)\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m}_0)}^2 dt &\lesssim \|f_0\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2, \\ \sup_{t \geq 0} \|g(t)\|_{\mathbf{E}}^2 + \int_0^\infty \|g(t)\|_{\mathbf{E}^*}^2 dt &\lesssim \|f_0\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2. \end{aligned}$$

The solution thus constructed to the original equation perturbation equation (1.4) is given by letting $f := h + g$, which thus satisfies

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2 + \int_0^\infty \left(\|f^\perp(t)\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 + \|\nabla_x \pi f(t)\|_{H_x^2 L_v^2}^2 \right) dt \lesssim \|f_0\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2.$$

4.3. **Uniqueness of the solution.** Consider another solution \tilde{f} with the same initial condition f_0 and such that

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t)\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2 + \int_0^\infty \left(\|f^\perp(t)\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 + \|\nabla_x \pi f(t)\|_{H_x^2 L_v^2}^2 \right) dt \lesssim \varepsilon^2.$$

Denote $d := f - \tilde{f}$ the difference of these solutions, which satisfies

$$\partial_t d = \mathcal{B}d + \mathcal{A}d + Q(d, f) + Q(\tilde{f}, d).$$

Arguing as in the previous steps, one gets for some $\lambda > 0$ the control

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|d\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2 + \lambda \|d\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 &\lesssim \|d\|_{\mathbf{X}(\underline{m})}^2 + \|d\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 \|f\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} + \|d\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|d\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} \|f\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \\ &\quad + \|d\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}^2 \|\tilde{f}\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} + \|d\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})} \|d\|_{\mathbf{X}(\underline{m})} \|\tilde{f}\|_{\mathbf{X}^*(\underline{m})}, \end{aligned}$$

which, once integrated from $t = 0$ to $t = T < \infty$, gives (with obvious notation)

$$\begin{aligned} \|d\|_{\mathcal{X}(\underline{m}; T)}^2 &\lesssim \left(T + \|f\|_{L^\infty([0, T]; \mathbf{X}(\underline{m}))} + \|f\|_{L^2([0, T]; \mathbf{X}^*(\underline{m}))} \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{f}\|_{L^\infty([0, T]; \mathbf{X}(\underline{m}))} + \|\tilde{f}\|_{L^2([0, T]; \mathbf{X}^*(\underline{m}))} \right) \|d\|_{\mathcal{X}(\underline{m}; T)}^2. \end{aligned}$$

Using the uniform bounds on f and \tilde{f} , this becomes

$$\|d\|_{\mathcal{X}(\underline{m};T)}^2 \lesssim \left(T + \varepsilon + \|f\|_{L^2([0,T];\mathbf{X}^*(m))} + \|\tilde{f}\|_{L^2([0,T];\mathbf{X}^*(m))} \right) \|d\|_{\mathcal{X}(\underline{m};T)}^2.$$

Letting T go to zero, we have $T + \|f\|_{L^2([0,T];\mathbf{X}^*(m))} + \|\tilde{f}\|_{L^2([0,T];\mathbf{X}^*(m))} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$, thus, on some small time interval $[0, T]$ with T small enough assuming $T > 0$ small enough, we have (for instance)

$$\|d\|_{\mathcal{X}(\underline{m};T)}^2 \leq \frac{1}{2} \|d\|_{\mathcal{X}(\underline{m};T)}^2,$$

which means that $d = 0$, or equivalently $f = \tilde{f}$, on interval $[0, T]$. By continuing this argument, we deduce that f_0 gives rise to a unique (global) solution, namely, f .

5. CAUCHY THEORY IN THE CUTOFF CASE

Denote $m_1(v) = \langle v \rangle^{k_1}$ and assume

$$k > 3/2 + \max\{1, 2|\gamma|\}, \quad \frac{3}{4} \leq \frac{k_1 - k}{|\gamma|} \leq 1.$$

Denote the space \mathcal{X} by

$$\mathcal{X} := \left\{ f \in L_t^\infty(\mathbf{X}(m)) \mid \|f\|_{\mathcal{X}} := \sup_{t \geq 0} (1+t)^{3/4} \|f(t)\|_{\mathbf{X}(m)} < +\infty \right\},$$

as well as the map $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ defined as

$$\Phi[f](t) := S_\Lambda(t)f_0 + \int_0^t S_\Lambda(t-s)Q(f(s), f(s)) \, ds.$$

We will construct the unique solution to (1.4) by showing that Φ is a contraction of a small ball of \mathcal{X} centered at 0.

For all $t \geq 0$, we have that

$$\|\Phi[f](t)\|_{\mathbf{X}(m)} \leq \|S_\Lambda(t)f_0\|_{\mathbf{X}(m)} + \int_0^t \|S_\Lambda(t-s)Q(f(s), f(s))\|_{\mathbf{X}(m)} \, ds.$$

By Proposition 3.6, the linear part satisfies

$$\|S_\Lambda(t)f_0\|_{\mathbf{X}(m)} \lesssim (1+t)^{-3/4} (\|f_0\|_{\mathbf{X}(m_1)} + \|f_0\|_{\mathbf{Z}_r(m_1)}),$$

and the nonlinear part

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|S_\Lambda(t-s)Q(f(s), f(s))\|_{\mathbf{X}(m)} \, ds \\ & \lesssim \int_0^t (1+(t-s))^{-3/4} (\|Q(f(s), f(s))\|_{\mathbf{X}(m_1)} + \|Q(f(s), f(s))\|_{\mathbf{Z}(m_1)}) \, ds. \end{aligned}$$

Furthermore, Proposition 2.8 imply that, for some $\theta \in (3/2 + 1, k]$, there holds

$$\begin{aligned} \|Q(f(s), f(s))\|_{\mathbf{X}(m_1) \cap \mathbf{Z}(m_1)} & \lesssim \|f(s)\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\theta)} \|f(s)\|_{\mathbf{X}(\langle v \rangle^\gamma m_1)} \\ & \lesssim \|f(s)\|_{\mathbf{X}(m)}^2, \end{aligned}$$

where we used the fact that $k > \frac{3}{2} + 1$ and $k_1 + \gamma \leq k$. Hence, the nonlinear term is estimated as follows:

$$\begin{aligned} \int_0^t \|S_\Lambda(t-s)Q(f(s), f(s))\|_{\mathbf{X}(m)} \, ds & \lesssim \int_0^t (1+(t-s))^{-3/4} \|f(s)\|_{\mathbf{X}(m)} \, ds \\ & \lesssim \|f\|_{\mathcal{X}}^2 \int_0^t (1+(t-s))^{-3/4} (1+s)^{-3/2} \, ds \\ & \lesssim (1+t)^{-3/4} \|f\|_{\mathcal{X}}^2. \end{aligned}$$

Put together, these estimates mean that Φ is a well defined map:

$$\|\Phi[f]\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|f_0\|_{\mathbf{X}(m_1) \cap \mathbf{Z}(m_1)} + \|f\|_{\mathcal{X}}^2.$$

Moreover, arguing as before, we also have

$$\begin{aligned} \|\Phi[f](t) - \Phi[g](t)\|_{\mathbf{X}(m)} &\lesssim \int_0^t \|S_\Lambda(t-s)Q((f+g)(s), (f-g)(s))\|_{\mathbf{X}(m)} ds \\ &\lesssim (1+t)^{-3/2} \|f+g\|_{\mathcal{X}} \|f-g\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

or, in other words,

$$\|\Phi[f] - \Phi[g]\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|f-g\|_{\mathcal{X}} \|f+g\|_{\mathcal{X}}.$$

Thus, if $\|f_0\|_{\mathbf{X}(m_1)} + \|f_0\|_{\mathbf{Z}(m_1)}$ is small enough, Φ is a contraction from some closed ball of \mathcal{X} to itself, which concludes the proof.

APPENDIX A. AUXILIARY RESULTS

This first lemma will be used to estimate integrals against the kinetic part $|v-v_*|^\gamma$ of the collision kernel $B(v-v_*, \sigma)$.

Lemma A.1. *Let $0 < \alpha < 3$.*

(1) *If $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ then for any $\theta > \frac{3}{2}$ one has*

$$(A.1) \quad \int_{\mathbf{R}^3} |v-v_*|^{-\alpha} |f(v_*)| dv_* \lesssim \langle v \rangle^{-\alpha} \|\langle v \rangle^\theta f\|_{L_v^2}.$$

(2) *If $\frac{3}{2} \leq \alpha < \frac{5}{2}$ then for any $\theta > \frac{5}{2}$ one has*

$$\int_{\mathbf{R}^3} |v-v_*|^{-\alpha} |f(v_*)| dv_* \lesssim \langle v \rangle^{-\alpha} \|\langle v \rangle^\theta f\|_{H_v^1}.$$

(3) *If $\frac{5}{2} \leq \alpha < 3$ then for any $\theta > 3$ one has*

$$\int_{\mathbf{R}^3} |v-v_*|^{-\alpha} |f(v_*)| dv_* \lesssim \langle v \rangle^{-\alpha} \|\langle v \rangle^\theta f\|_{H_v^2}.$$

Proof. From [12, Lemma 3.3] one has, for any $0 < \beta < 3$ and $\vartheta > 3$,

$$(A.2) \quad \int_{\mathbf{R}^3} |v-v_*|^{-\beta} \langle v_* \rangle^{-\vartheta} dv_* \lesssim \langle v \rangle^{-\beta}, \quad \forall v \in \mathbf{R}^3.$$

We now write for $p \in [1, \infty]$, thanks to Hölder inequality,

$$\int_{\mathbf{R}^3} |v-v_*|^{-\alpha} |f(v_*)| dv_* \leq \left(\int_{\mathbf{R}^3} |v-v_*|^{-\alpha \frac{p}{p-1}} \langle v_* \rangle^{-\theta \frac{p}{p-1}} dv_* \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\langle v \rangle^\theta f\|_{L_v^p}.$$

We then conclude by using (A.2) with:

- If $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ we choose $p = 2$.
- If $\frac{3}{2} \leq \alpha < \frac{5}{2}$ we choose $p = 6$ and use the Sobolev embedding $H^1(\mathbf{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbf{R}^3)$.
- If $\frac{5}{2} \leq \alpha < 3$ we choose $p = \infty$ and use the Sobolev embedding $H^2(\mathbf{R}^3) \hookrightarrow L^\infty(\mathbf{R}^3)$. □

Lemma A.2. *Let $\varphi = \varphi(v)$ be a Schwartz function, $\alpha \in (-3, 0)$ and $\eta \in (0, 1)$, there holds*

$$\int_{\mathbf{R}^3} |v-v_*|^{-\alpha} \varphi(v_*) dv_* \leq \eta \langle v \rangle^{-\alpha} + \mathcal{O}(\langle v \rangle^{-\infty}).$$

Proof. Denoting $u := v - v_*$, we split the integral for some $M \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int |v-v_*|^\gamma \varphi(v_*) du &\leq \int_{|v-v_*| \geq M} |v-v_*|^\gamma \varphi(v_*) dv_* + \int_{|v-v_*| \leq M} |v-v_*|^\gamma \varphi(v_*) dv_* \\ &\lesssim \langle v \rangle^\gamma \int_{|u| \geq M} \langle u \rangle^2 \varphi(u)^2 du + \langle v \rangle^{-\ell} \int_{|v-v_*| \leq M} |v-v_*|^\gamma \langle v-v_* \rangle^\ell dv_*, \end{aligned}$$

where we used Lemma A.1 with $\theta = 2$ in the first part, and $\langle v_* \rangle^{-\ell} \leq \langle v - v_* \rangle^\ell \langle v \rangle^{-\ell}$ for some arbitrary $\ell \geq 0$. We conclude by taking M and ℓ large enough. \square

Proposition A.3. *The following change of variables formulas hold:*

$$(A.3) \quad \int b(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma f(v, v', \theta) d\sigma dv_* \\ \approx \int b(\cos(\pi - 2\theta)) |v - v_*|^\gamma \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^{-2-\gamma} f(v, v_*, \pi - 2\theta) d\sigma dv_*,$$

$$(A.4) \quad \int b(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma f(v', v_*, \theta) d\sigma dv \approx \int b(\cos 2\theta) |v - v_*|^\gamma f(v, v_*, 2\theta) d\sigma dv,$$

$$(A.5) \quad \int B(v - v_*, \sigma) f(v, v_*, v', v'_*, \theta) d\sigma dv_* dv = \int B(v - v_*, \sigma) f(v', v'_*, v, v_*, \theta) d\sigma dv_* dv.$$

Proof. The pre-post collisional change of variables (A.5) is known to be involutive with Jacobian 1 and it is easy to check that $|v - v_*| = |v' - v'_*|$. We only deal with the first two change of variables. Recall the definition of v' :

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \sigma \frac{|v - v_*|}{2}.$$

Denote $k := \frac{v - v_*}{|v - v_*|}$ and recall that θ is the angle (k, σ) . The differentials of v' with respect to v and v_* writes in the basis (k, σ, w) where $w \perp k, \sigma$ (at least when k and σ are not colinear)

$$(A.6) \quad \frac{dv'}{dv} = \frac{1}{2} (\text{Id} + \langle \cdot, k \rangle \sigma) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 + \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(A.7) \quad \frac{dv'}{dv_*} = \frac{1}{2} (\text{Id} - \langle \cdot, k \rangle \sigma) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thus, the following identities hold:

$$\left| \frac{dv'}{dv} \right| = \frac{1}{8} (1 + \cos \theta) = \frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \left| \frac{dv'}{dv_*} \right| = \frac{1}{8} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Furthermore, the definition of v' also implies

$$|v' - v_*|^2 = \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |v - v_*|^2, \\ |v' - v|^2 = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |v - v_*|^2.$$

The angle φ formed by $v' - v_*$ and σ and the angle ψ formed by $v' - v$ and σ are related to θ by

$$\varphi = \frac{\theta}{2}, \quad \psi = \frac{\pi - \theta}{2},$$

thus the integrals are estimated as follows:

$$\int b(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma f(v, v', \theta) d\sigma dv_* \\ \approx \int b(\cos(\pi - 2\psi)) |v - v|^\gamma \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)^{-2-\gamma} f(v, v_*, \pi - 2\psi) d\sigma dv',$$

$$\int b(\cos \theta) |v - v_*|^\gamma f(v', v_*, \theta) d\sigma dv \approx \int b(\cos 2\varphi) |v - v_*|^\gamma f(v', v_*, 2\varphi) d\sigma dv'.$$

We conclude to (A.4) and (A.3) by renaming the integration variables. \square

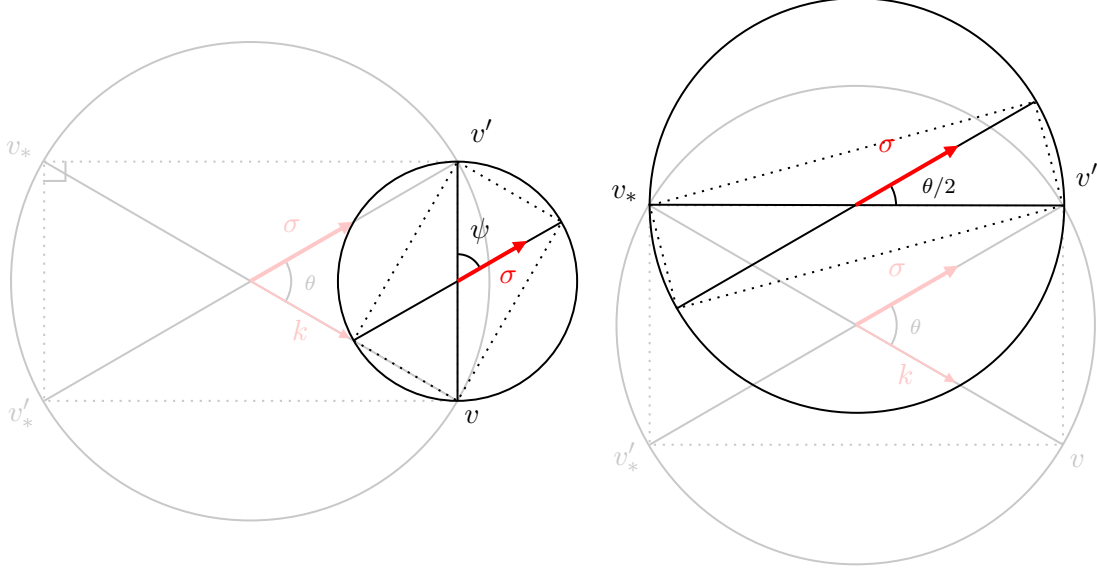


FIGURE 1. The changes of variables $(v, v') \rightarrow (v, v_*)$ and $(v', v_*) \rightarrow (v, v_*)$.

We state the so-called *Cancellation lemma* from [1, Lemma 1].

Proposition A.4 (Cancellation lemma). *The following cancellation formula holds:*

$$\int B(v - v_*, \sigma) (f' - f) dv_* d\sigma = (f * S)(v),$$

where the function $S = S(z)$ is defined as

$$S(z) := 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \left(\frac{1}{\cos^3 \theta} B\left(\frac{|z|}{\cos(\theta/2)}, \cos \theta\right) - B(|z|, \cos \theta) \right) d\theta.$$

In the particular case of the collision kernel $B_\delta(v - v_*, \sigma) = B(v - v_*, \sigma) \mathbf{1}_{|\theta| \leq \delta}$, the corresponding function S_δ satisfies

$$S_\delta(z) \approx \delta^{2-2s} |z|^\gamma.$$

The following lemma is from [3, Lemma 2.3] and will be used to establish commutator estimates.

Lemma A.5. *Let $m = \langle v \rangle^k$ with $k \geq 0$, there holds*

$$(A.8) \quad m \lesssim m' + m'_*,$$

$$(A.9) \quad |m - m'| \lesssim \theta m' \langle v'_* \rangle + \theta^k m'_*$$

This lemma will serve to remove the kinetic singularity $|v - v_*|^\gamma$ in some integrals involving the collision kernel $B(v - v_*, \sigma)$.

Lemma A.6. *For any $a > -3$, $b \in \mathbf{R}$ and $m > 3 + 2s + a + b$, there holds*

$$\begin{aligned} & \int b(\cos \theta) |v - v_*|^a \langle v - v_* \rangle^b \langle v_* \rangle^{-m} f(v, v') d\sigma dv_* dv \\ & \approx \int b(\cos \theta) \langle v - v_* \rangle^{a+b} \langle v_* \rangle^{-m} f(v, v') d\sigma dv_* dv \end{aligned}$$

Proof. As we cannot simply control $|v - v_*|^a \langle v - v_* \rangle^b$ by $\langle v - v_* \rangle^{a+b}$, we resort to using Carleman's representation:

$$\begin{aligned} & \int b(\cos \theta) |v - v_*|^a \langle v - v_* \rangle^b \langle v_* \rangle^{-m} f(v, v') d\sigma dv dv_* \\ & \approx \int_{\substack{v, h \in \mathbf{R}^3, \\ y \perp h, |y| \geq |h|}} \frac{|y|^{1+2s+a}}{|h|^{1+2s}} \langle y \rangle^b \langle v + y \rangle^{-m} f(v, v + h) dy dh dv, \\ & = \int K_{\text{sing}}(v, h) \frac{f(v, v + h)}{|h|^{1+2s}} dh dv, \end{aligned}$$

where we denoted the singular y -integral, which is well-defined because $1+2s+a+b-m < -2$ and $1+2s+a > -2$

$$K_{\text{sing}}(v, h) := \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq |h|}} |y|^{1+2s+a} \langle y \rangle^b \langle v + y \rangle^{-m} dh$$

and aim to prove

$$K_{\text{sing}}(v, h) \approx K_{\text{reg}}(v, h) := \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq |h|}} |y|^{1+2s} \langle y \rangle^{a+b} \langle v + y \rangle^{-m} dh.$$

To do so, we split K_{sing} for $|y| \leq \varepsilon$ and $|y| \geq \varepsilon$ where $\varepsilon > 0$ will be chosen later:

$$\begin{aligned} K_{\text{sing}}(v, h) &= \int_{\substack{y \perp h, \\ \varepsilon \geq |y| \geq |h|}} |y|^{1+2s+a} \langle y \rangle^b \langle v + y \rangle^{-m} dh \\ &\quad + \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq \max\{|h|, \varepsilon\}}} |y|^{1+2s+a} \langle y \rangle^b \langle v + y \rangle^{-m} dh. \end{aligned}$$

Concerning the first part, if ε is small enough, the assumption $|y| \leq \varepsilon$ implies $\langle v + y \rangle^{-m} \approx \langle v \rangle^{-m}$ uniformly in y . Concerning the second part, the assumption $|y| \geq \varepsilon$ implies $\langle y \rangle \approx |y|$ uniformly in y . Thus we have

$$\begin{aligned} K_{\text{sing}}(v, h) &= \int_{\substack{y \perp h, \\ \varepsilon \geq |y| \geq |h|}} |y|^{1+2s+a} \langle y \rangle^b \langle v + y \rangle^{-m} dh + \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq \max\{|h|, \varepsilon\}}} |y|^{1+2s+a} \langle y \rangle^b \langle v + y \rangle^{-m} dh \\ &\approx \langle v \rangle^{-m} \int_{\substack{y \perp h, \\ \varepsilon \geq |y| \geq |h|}} |y|^{1+2s+a} \langle y \rangle^b dh + \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq \max\{|h|, \varepsilon\}}} |y|^{1+2s} \langle y \rangle^{a+b} \langle v + y \rangle^{-m} dh \\ &\approx \langle v \rangle^{-m} + \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq \max\{|h|, \varepsilon\}}} |y|^{1+2s} \langle y \rangle^{a+b} \langle v + y \rangle^{-m} dh \end{aligned}$$

With the same reasoning, we have

$$\begin{aligned} K_{\text{reg}}(v, h) &= \int_{\substack{y \perp h, \\ \varepsilon \geq |y| \geq |h|}} |y|^{1+2s} \langle y \rangle^{a+b} \langle v + y \rangle^{-m} dh + \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq \max\{|h|, \varepsilon\}}} |y|^{1+2s} \langle y \rangle^{a+b} \langle v + y \rangle^{-m} dh \\ &\approx \langle v \rangle^{-m} \int_{\substack{y \perp h, \\ \varepsilon \geq |y| \geq |h|}} |y|^{1+2s} \langle y \rangle^{a+b} dh + \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq \max\{|h|, \varepsilon\}}} |y|^{1+2s} \langle y \rangle^{a+b} \langle v + y \rangle^{-m} dh \\ &\approx \langle v \rangle^{-m} + \int_{\substack{y \perp h, \\ |y| \geq \max\{|h|, \varepsilon\}}} |y|^{1+2s} \langle y \rangle^{a+b} \langle v + y \rangle^{-m} dh. \end{aligned}$$

We conclude that $K_{\text{sing}} \approx K_{\text{reg}}$, which concludes this step. \square

REFERENCES

- [1] ALEXANDRE, R., DESVILLETES, L., VILLANI, C., AND WENNBERG, B. Entropy dissipation and long-range interactions. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 152, 4 (2000), 327–355.
- [2] ALEXANDRE, R., HÉRAU, F., AND LI, W.-X. Global hypoelliptic and symbolic estimates for the linearized Boltzmann operator without angular cutoff. *J. Math. Pures Appl. (9)* 126 (2019), 1–71.

- [3] ALEXANDRE, R., MORIMOTO, Y., UKAI, S., XU, C.-J., AND YANG, T. Regularizing effect and local existence for the non-cutoff Boltzmann equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 198 (2009), 39–123.
- [4] ALEXANDRE, R., MORIMOTO, Y., UKAI, S., XU, C.-J., AND YANG, T. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space. II: Global existence for hard potential. *Anal. Appl., Singap.* 9, 2 (2011), 113–134.
- [5] ALEXANDRE, R., MORIMOTO, Y., UKAI, S., XU, C.-J., AND YANG, T. Global existence and full regularity of the Boltzmann equation without angular cutoff. *Commun. Math. Phys.* 304, 2 (2011), 513–581.
- [6] ALEXANDRE, R., MORIMOTO, Y., UKAI, S., XU, C.-J., AND YANG, T. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space. I: global existence for soft potential. *J. Funct. Anal.* 262, 3 (2012), 915–1010.
- [7] ALONSO, R., MORIMOTO, Y., SUN, W., AND YANG, T. Non-cutoff Boltzmann equation with polynomial decay perturbations. *Rev. Mat. Iberoam.* 37, 1 (2021), 189–292.
- [8] BRIANT, M., MERINO-ACEITUNO, S., AND MOUHOT, C. From Boltzmann to incompressible Navier-Stokes in Sobolev spaces with polynomial weight. *Anal. Appl., Singap.* 17, 1 (2019), 85–116.
- [9] CAFLISCH, R. E. The Boltzmann equation with a soft potential. II: Nonlinear, spatially- periodic. *Commun. Math. Phys.* 74 (1980), 97–109.
- [10] CAO, C. Cutoff boltzmann equation with polynomial perturbation near maxwellian, 2022. arXiv:2207.10272.
- [11] CAO, C., HE, L.-B., AND JI, J. Propagation of moments and sharp convergence rate for inhomogeneous non-cutoff boltzmann equation with soft potentials, 2022.
- [12] CARRAPATOSO, K., TRISTANI, I., AND WU, K.-C. Cauchy problem and exponential stability for the inhomogeneous Landau equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 221, 1 (2016), 363–418.
- [13] DENG, D. Global existence of non-cutoff Boltzmann equation in weighted Sobolev space. *J. Stat. Phys.* 188, 3 (2022), 51. Id/No 25.
- [14] DENG, D. On the Cauchy problem of Boltzmann equation with a very soft potential. *J. Evol. Equ.* 22, 1 (2022), 58. Id/No 17.
- [15] DUAN, R. On the Cauchy problem for the Boltzmann equation in the whole space: Global existence and uniform stability in $L^2_\xi(H^N_x)$. *J. Differ. Equations* 244, 12 (2008), 3204–3234.
- [16] ELLIS, R. S., AND PINSKY, M. A. The first and second fluid approximation to the linearized Boltzmann equation. *J. Math. Pures Appl. (9)* 54 (1975), 125–156.
- [17] GLASSEY, R. T. *The Cauchy problem in kinetic theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
- [18] GRAD, H. Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and nonlinear Boltzmann equations. *Proc. Sympos. Appl. Math.* 17, 154-183 (1965)., 1965.
- [19] GRESSMAN, P. T., AND STRAIN, R. M. Global classical solutions of the Boltzmann equation without angular cut-off. *J. Am. Math. Soc.* 24, 3 (2011), 771–847.
- [20] GRESSMAN, P. T., AND STRAIN, R. M. Sharp anisotropic estimates for the Boltzmann collision operator and its entropy production. *Adv. Math.* 227, 6 (2011), 2349–2384.
- [21] GUALDANI, M. P., AND MOUHOT, C. Factorization of non-symmetric operators and exponential H -theorem. *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.* 153 (2017), 3–137.
- [22] GUO, Y. Classical solutions to the Boltzmann equation for molecules with an angular cutoff. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 169, 4 (2003), 305–353.
- [23] HE, L.-B. Sharp bounds for Boltzmann and Landau collision operators. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 51, 5 (2018), 1253–1341.
- [24] HÉRAU, F., TONON, D., AND TRISTANI, I. Regularization estimates and Cauchy theory for inhomogeneous Boltzmann equation for hard potentials without cut-off. *Commun. Math. Phys.* 377, 1 (2020), 697–771.
- [25] KAWASHIMA, S. The Boltzmann equation and thirteen moments. *Japan J. Appl. Math.* 7, 2 (1990), 301–320.
- [26] LIU, T.-P., YANG, T., AND YU, S.-H. Energy method for Boltzmann equation. *Physica D* 188, 3-4 (2004), 178–192.
- [27] MOUHOT, C. Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials. *Commun. Math. Phys.* 261, 3 (2006), 629–672.
- [28] SHIZUTA, Y. On the classical solutions of the Boltzmann equation. *Commun. Pure Appl. Math.* 36 (1983), 705–754.
- [29] SOHINGER, V., AND STRAIN, R. M. The Boltzmann equation, Besov spaces, and optimal time decay rates in \mathbb{R}^n_x . *Adv. Math.* 261 (2014), 274–332.
- [30] STRAIN, R. M. Optimal time decay of the non cut-off Boltzmann equation in the whole space. *Kinet. Relat. Models* 5, 3 (2012), 583–613.

- [31] STRAIN, R. M., AND GUO, Y. Almost exponential decay near Maxwellian. *Commun. Partial Differ. Equations* 31, 1-3 (2006), 417–429.
- [32] STRAIN, R. M., AND GUO, Y. Exponential decay for soft potentials near Maxwellian. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 187, 2 (2008), 287–339.
- [33] UKAI, S. On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation. *Proc. Japan Acad.* 50 (1974), 179–184.
- [34] UKAI, S. Les solutions globales de l'équation de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans le demi-espace. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A* 282 (1976), 317–320.
- [35] UKAI, S. Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff. *Japan J. Appl. Math.* 1, 1 (1984), 141–156.
- [36] UKAI, S., AND ASANO, K. On the Cauchy problem of the Boltzmann equation with a soft potential. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 18 (1982), 477–519.
- [37] WANG, H., AND FANG, Z. Global existence and time decay of the non-cutoff Boltzmann equation with hard potential. *Nonlinear Anal., Real World Appl.* 63 (2022), 32. Id/No 103416.
- [38] WU, Y., AND SUN, J. Asymptotic behavior of linearized Boltzmann equations for soft potentials with cut-off. *Electron. J. Differ. Equ.* 2021 (2021), 21. Id/No 46.

Bibliographie

- [1] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani, and B. Wennberg. Entropy dissipation and long-range interactions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 152(4) :327–355, 2000.
- [2] R. Alexandre, F. Hérau, and W.-X. Li. Global hypoelliptic and symbolic estimates for the linearized Boltzmann operator without angular cutoff. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 126 :1–71, 2019.
- [3] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space. II : Global existence for hard potential. *Anal. Appl., Singap.*, 9(2) :113–134, 2011.
- [4] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space : qualitative properties of solutions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 202(2) :599–661, 2011.
- [5] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. Global existence and full regularity of the Boltzmann equation without angular cutoff. *Commun. Math. Phys.*, 304(2) :513–581, 2011.
- [6] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space. I : global existence for soft potential. *J. Funct. Anal.*, 262(3) :915–1010, 2012.
- [7] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. Local existence with mild regularity for the Boltzmann equation. *Kinet. Relat. Models*, 6(4) :1011–1041, 2013.
- [8] R. Alexandre and C. Villani. On the Landau approximation in plasma physics. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 21(1) :61–95, 2004.
- [9] R. Alonso, Y. Morimoto, W. Sun, and T. Yang. Non-cutoff Boltzmann equation with polynomial decay perturbations. *Rev. Mat. Iberoam.*, 37(1) :189–292, 2021.
- [10] R. J. Alonso, V. Bagland, and B. Lods. Convergence to self-similarity for ballistic annihilation dynamics. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 138 :88–163, 2020.
- [11] R. J. Alonso, B. Lods, and I. Tristani. From Boltzmann equation for granular gases to a modified Navier-Stokes-Fourier system. *J. Stat. Phys.*, 187(3) :31, 2022. Id/No 28.

- [12] G. A. G. G. U. L. H. P. M. U. N. F. S. U. [Arendt, W. *One-parameter semigroups of positive operators*, volume 1184 of *Lect. Notes Math.* Springer, Cham, 1986.
- [13] L. Arkeryd. On the Boltzmann equation. I : Existence. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 45 :1–16, 1972.
- [14] L. Arkeryd. On the Boltzmann equation. II : The full initial value problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 45 :17–34, 1972.
- [15] L. Arkeryd. Intermolecular forces of infinite range and the Boltzmann equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 77 :11–21, 1981.
- [16] L. Arkeryd. L^∞ estimates for the space-homogeneous Boltzmann equation. *J. Stat. Phys.*, 31 :347–361, 1983.
- [17] L. Arkeryd. Existence theorems for certain kinetic equations and large data. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 103(2) :139–149, 1988.
- [18] L. Arkeryd, R. Esposito, and M. Pulvirenti. The Boltzmann equation for weakly inhomogeneous data. *Communications in Mathematical Physics*, 111(3) :393 – 407, 1987.
- [19] A. A. Arsen'ev and O. E. Buryak. On a connection between the solution of the Boltzmann equation and the solution of the Landau-Fokker-Planck equation. *Mat. Sb.*, 181(4) :435–446, 1990.
- [20] D. Arsénio. On the global existence of mild solutions to the Boltzmann equation for small data in L^D . *Commun. Math. Phys.*, 302(2) :453–476, 2011.
- [21] D. Arsénio. From Boltzmann's equation to the incompressible Navier-Stokes-Fourier system with long-range interactions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 206(2) :367–488, 2012.
- [22] C. Baranger and C. Mouhot. Explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials. *Rev. Mat. Iberoam.*, 21(3) :819–841, 2005.
- [23] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations. *Journal of Statistical Physics*, 63 :323–344, 1991.
- [24] C. Bardos and S. Ukai. The classical incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1(2) :235–257, 1991.
- [25] D. Bernoulli. *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. Johannis Reinholdi Dulseckeri.
- [26] A. Bobylev. The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for maxwell molecules. *Soviet Scientific Reviews. Section C*, 7 :111–233, 01 1988.
- [27] A. V. Bobylev and C. Cercignani. On the rate of entropy production for the Boltzmann equation. *J. Stat. Phys.*, 94(3-4) :603–618, 1999.

- [28] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and S. Simonella. One-sided convergence in the Boltzmann-Grad limit. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)*, 27(5) :985–1022, 2018.
- [29] N. N. Bogolyubov. Problems of a dynamical theory in statistical physics. *Stud. Stat. Mech.* 1, 1-118 (1962)., 1962.
- [30] L. Boltzmann. Weitere studien über das wärmeleichgewicht unter gasmolekülen. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, (66), 1872.
- [31] L. Boltzmann. Über die Prinzipien der Mechanik. Zwei akademische Antrittsreden. *Phys. Z.*, 4 :247–256, 274–277, 1903.
- [32] M. Born and H. S. Green. A general kinetic theory of liquids. I. The molecular distribution functions. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 188 :10–18, 1946.
- [33] D. L. Boudin, Laurent. On the singularities of the global small solutions of the full Boltzmann equation. *Monatsh. Math.*, 131(2) :91–108, 2000.
- [34] M. Briant. From the Boltzmann equation to the incompressible navier–stokes equations on the torus : A quantitative error estimate. *Journal of Differential Equations*, 259(11) :6072–6141, 2015.
- [35] M. Briant, S. Merino-Aceituno, and C. Mouhot. From Boltzmann to incompressible Navier-Stokes in Sobolev spaces with polynomial weight. *Anal. Appl., Singap.*, 17(1) :85–116, 2019.
- [36] R. E. Caflisch. The Boltzmann equation with a soft potential. II : Nonlinear, spatially-periodic. *Commun. Math. Phys.*, 74 :97–109, 1980.
- [37] R. E. Caflisch. The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 33 :651–666, 1980.
- [38] R. E. Caflisch and G. C. Papanicolaou. The fluid-dynamical limit of a nonlinear model Boltzmann equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 32 :589–616, 1979.
- [39] C. Cao. Cutoff Boltzmann equation with polynomial perturbation near maxwellian, 2022. arXiv :2207.10272.
- [40] C. Cao, L.-B. He, and J. Ji. Propagation of moments and sharp convergence rate for inhomogeneous non-cutoff Boltzmann equation with soft potentials, 2022.
- [41] T. Carleman. Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann. *Acta Math.*, 60 :91–146, 1933.
- [42] T. Carleman. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. Publications Scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler. 2. Uppsala : Almqvist & Wiksells 112 p. (1957)., 1957.
- [43] E. A. Carlen and M. C. Carvalho. Strict entropy production bounds and stability of the rate of convergence to equilibrium for the Boltzmann equation. *J. Stat. Phys.*, 67(3-4) :575–608, 1992.

- [44] K. Carrapatoso and P. Gervais. The Boltzmann equation with soft potentials and polynomial weights in the whole space. In preparation.
- [45] K. Carrapatoso and S. Mischler. Landau equation for very soft and Coulomb potentials near maxwellians. *Ann. PDE*, 3(1) :65, 2017. Id/No 1.
- [46] K. Carrapatoso, M. Rachid, and I. Tristani. Regularization estimates and hydrodynamical limit for the Landau equation, 2021. arXiv :2107.12044.
- [47] K. Carrapatoso, I. Tristani, and K.-C. Wu. Cauchy problem and exponential stability for the inhomogeneous Landau equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 221(1) :363–418, 2016.
- [48] J. A. Carrillo, J. Hu, Z. Ma, and T. Rey. *Recent Development in Kinetic Theory of Granular Materials : Analysis and Numerical Methods*, pages 1–36. Springer International Publishing, Cham, 2021.
- [49] C. Cercignani. On the Boltzmann equation for rigid spheres. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 2 :211–225, 1972.
- [50] C. Cercignani. H-theorem and trend to equilibrium in the kinetic theory of gases. *Arch. Mech.*, 34 :231–241, 1982.
- [51] C. Cercignani. *The Boltzmann equation and its applications*, volume 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [52] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. *The mathematical theory of dilute gases*, volume 106 of *Appl. Math. Sci.* New York, NY : Springer-Verlag, 1994.
- [53] I. Csiszár. Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations. *Stud. Sci. Math. Hung.*, 2 :299–318, 1967.
- [54] A. De Masi, R. Esposito, and J. L. Lebowitz. Incompressible Navier-Stokes and Euler limits of the Boltzmann equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 42(8) :1189–1214, 1989.
- [55] P. Degond and B. Lucquin-Desreux. The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 02(02) :167–182, 1992.
- [56] D. Deng. Global existence of non-cutoff Boltzmann equation in weighted Sobolev space. *J. Stat. Phys.*, 188(3) :51, 2022. Id/No 25.
- [57] D. Deng. On the Cauchy problem of Boltzmann equation with a very soft potential. *J. Evol. Equ.*, 22(1) :58, 2022. Id/No 17.
- [58] L. Desvillettes. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Transport Theory Statist. Phys.*, 21(3) :259–276, 1992.
- [59] L. Desvillettes. Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 123(4) :387–404, 1993.

- [60] L. Desvillettes. Regularization for the non-cutoff 2d radially symmetric Boltzmann equation with a velocity dependent cross section. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 25(3-5) :383–394, 1996.
- [61] L. Desvillettes. Regularization properties of the 2-dimensional non radially symmetric non cutoff spatially homogeneous Boltzmann equation for Maxwellian molecules. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 26(3) :341–357, 1997.
- [62] L. Desvillettes. Boltzmann’s kernel and the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Riv. Mat. Univ. Parma (6)*, 4* :1–22, 2001.
- [63] L. Desvillettes and C. Mouhot. Stability and uniqueness for the spatially homogeneous Boltzmann equation with long-range interactions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 193(2) :227–253, 2009.
- [64] L. Desvillettes, C. Mouhot, and C. Villani. Celebrating Cercignani’s conjecture for the Boltzmann equation. *Kinet. Relat. Models*, 4(1) :277–294, 2011.
- [65] G. Di Blasio. Strong solution for Boltzmann equation in the spatially homogeneous case. *Boll. Unione Mat. Ital., IV. Ser.*, 8 :127–136, 1973.
- [66] G. Di Blasio. Differentiability of spatially homogeneous solutions of the Boltzmann equation in the non Maxwellian case. *Commun. Math. Phys.*, 38 :331–340, 1974.
- [67] R. J. DiPerna and P. L. Lions. On the Fokker-Planck-Boltzmann equation. *Commun. Math. Phys.*, 120(1) :1–23, 1988.
- [68] R. J. DiPerna and P. L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : Global existence and weak stability. *Ann. Math. (2)*, 130(2) :321–366, 1989.
- [69] R. J. DiPerna and P. L. Lions. Global solutions of Boltzmann’s equation and the entropy inequality. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 114(1) :47–55, 1991.
- [70] J. Dolbeault. Kinetic models and quantum effects : A modified Boltzmann equation for Fermi-Dirac particles. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 127(2) :101–131, 1994.
- [71] J. Dolbeault, C. Mouhot, and C. Schmeiser. Hypocoercivity for kinetic equations with linear relaxation terms. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 347(9-10) :511–516, 2009.
- [72] J. Dolbeault, C. Mouhot, and C. Schmeiser. Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass. *Trans. Am. Math. Soc.*, 367(6) :3807–3828, 2015.
- [73] R. Duan. On the Cauchy problem for the Boltzmann equation in the whole space : Global existence and uniform stability in $L^2_\xi(H^N_x)$. *J. Differ. Equations*, 244(12) :3204–3234, 2008.
- [74] R. Duan. Hypocoercivity of linear degenerately dissipative kinetic equations, 2009. arXiv :0912.1733.
- [75] J.-P. Eckmann and M. Hairer. Spectral properties of hypoelliptic operators. *Commun. Math. Phys.*, 235(2) :233–253, 2003.

- [76] P. Ehrenfest and T. Ehrenfest. The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics. Translated from the German by Michael J. Moravcsik. With a foreword by M. Kac and G. E. Uhlenbeck. 1959.
- [77] R. S. Ellis and M. A. Pinsky. The first and second fluid approximation to the linearized Boltzmann equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 54 :125–156, 1975.
- [78] T. Elmroth. Global boundedness of moments of solutions of the Boltzmann equation for forces of infinite range. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 82 :1–12, 1983.
- [79] K.-J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Grad. Texts Math.* Berlin : Springer, 2000.
- [80] D. Enskog. Kinetische theorie des vorgänge in mässig verdünnten gasen, uppsala.
- [81] R. Esposito, R. Marra, and H. T. Yau. Navier-Stokes equations for stochastic particle systems on the lattice. *Commun. Math. Phys.*, 182(2) :395–455, 1996.
- [82] L. Euler. Principes généraux du mouvement des fluides. 11 :274–315.
- [83] A. A. Fedotov, P. Harremoës, and F. Topsøe. Best Pinsker bounds equal Taylor polynomials of degree 49. *Vychisl. Tekhnol.*, 8(5) :3–13, 2003.
- [84] N. Fournier. Uniqueness for a class of spatially homogeneous Boltzmann equations without angular cutoff. *J. Stat. Phys.*, 125(4) :923–942, 2006.
- [85] N. Fournier and C. Mouhot. On the well-posedness of the spatially homogeneous Boltzmann equation with a moderate angular singularity. *Commun. Math. Phys.*, 289(3) :803–824, 2009.
- [86] I. Gallagher and I. Tristani. On the convergence of smooth solutions from Boltzmann to Navier-Stokes. *Ann. Henri Lebesgue*, 3 :561–614, 2020.
- [87] L. Gearhart. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. *Trans. Am. Math. Soc.*, 236 :385–394, 1978.
- [88] P. Gervais. A spectral study of the linearized Boltzmann operator in L^2 -spaces with polynomial and Gaussian weights. *Kinet. Relat. Models*, 14(4) :725–747, 2021.
- [89] P. Gervais. On the convergence from Boltzmann to Navier-Stokes-Fourier for general initial data. 2022. arXiv :2201.02825. To appear in SIAM.
- [90] R. T. Glassey. *The Cauchy problem in kinetic theory*. Other Titles Appl. Math. Philadelphia, PA : SIAM, 1996.
- [91] F. Golse. The Boltzmann equation and its hydrodynamic limits. pages 159–301, 2005.
- [92] F. Golse and C. D. Levermore. Stokes-Fourier and acoustic limits for the Boltzmann equation : convergence proofs. *Commun. Pure Appl. Math.*, 55(3) :336–393, 2002.
- [93] F. Golse and F. Poupaud. Stationary solutions of the linearized Boltzmann equation in a half- space. *Math. Methods Appl. Sci.*, 11(4) :483–502, 1989.

- [94] F. Golse and L. Saint-Raymond. The Navier-Stokes limit for the Boltzmann equation. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, 333(9) :897–902, 2001.
- [95] F. Golse and L. Saint-Raymond. Velocity averaging in L^1 for the transport equation. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 334(7) :557–562, 2002.
- [96] F. Golse and L. Saint-Raymond. The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels. *Invent. Math.*, 155(1) :81–161, 2004.
- [97] F. Golse and L. Saint-Raymond. The incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 91(5) :508–552, 2009.
- [98] H. Grad. On the kinetic theory of rarefied gases. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2 :331–407, 1949.
- [99] H. Grad. *Principles of the kinetic theory of gases*, pages 205–294. Handbuch der Physik, Bd. 12, Thermodynamik der Gase. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. Herausgegeben von S. Flügge.
- [100] H. Grad. Asymptotic theory of the Boltzmann equation. *Phys. Fluids*, 6 :147–181, 1963.
- [101] H. Grad. Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and nonlinear Boltzmann equations. *Proc. Sympos. Appl. Math.* 17, 154-183 (1965)., 1965.
- [102] H. Grad. On Boltzmann’s h-theorem. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 13(1) :259–277, 1965.
- [103] P. T. Gressman and R. M. Strain. Global classical solutions of the Boltzmann equation without angular cut-off. *J. Am. Math. Soc.*, 24(3) :771–847, 2011.
- [104] P. T. Gressman and R. M. Strain. Sharp anisotropic estimates for the Boltzmann collision operator and its entropy production. *Adv. Math.*, 227(6) :2349–2384, 2011.
- [105] M. P. Gualdani and C. Mouhot. Factorization of non-symmetric operators and exponential H -theorem. *Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Sér.*, 153 :3–137, 2017.
- [106] Y. Guo. The Landau equation in a periodic box. *Commun. Math. Phys.*, 231(3) :391–434, 2002.
- [107] Y. Guo. The Vlasov-Poisson-Boltzmann system near Maxwellians. *Commun. Pure Appl. Math.*, 55(9) :1104–1135, 2002.
- [108] Y. Guo. Classical solutions to the Boltzmann equation for molecules with an angular cutoff. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 169(4) :305–353, 2003.
- [109] Y. Guo. Boltzmann diffusive limit beyond the Navier-Stokes approximation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 59(5) :626–687, 2006.
- [110] Y. Guo. Decay and continuity of the Boltzmann equation in bounded domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 197(3) :713–809, 2010.

- [111] T. Gustafsson. L^p -estimates for the nonlinear spatially homogeneous Boltzmann equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 92 :23–57, 1986.
- [112] T. Gustafsson. Global L^p -properties for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 103(1) :1–38, 1988.
- [113] L.-B. He. Sharp bounds for Boltzmann and Landau collision operators. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 51(5) :1253–1341, 2018.
- [114] B. Helffer and F. Nier. *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, volume 1862 of *Lect. Notes Math.* Berlin : Springer, 2005.
- [115] F. Hérau. Hypocoercivity and exponential time decay for the linear inhomogeneous relaxation Boltzmann equation. *Asymptotic Anal.*, 46(3-4) :349–359, 2006.
- [116] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoelliptic and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 171(2) :151–218, 2004.
- [117] F. Hérau, D. Tonon, and I. Tristani. Regularization estimates and Cauchy theory for inhomogeneous Boltzmann equation for hard potentials without cut-off. *Commun. Math. Phys.*, 377(1) :697–771, 2020.
- [118] I. Herbst. The spectrum of Hilbert space semigroups. *J. Oper. Theory*, 10 :87–94, 1983.
- [119] H. Hertz. Die principien der mechanik. *Ancient Philosophy (Misc)*, 5(n/a) :464, 1894.
- [120] D. Hilbert. Begründung der kinetischen gastheorie. *Mathematische Annalen*, 72(4) :562 – 577, 1912.
- [121] D. Hilbert. Sur les problèmes futurs des mathématiques. Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], pages ii+60. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1990.
- [122] F. Hérau. Introduction to hypocoercive methods and applications for simple linear inhomogeneous kinetic models. 2017. arXiv :1710.05588.
- [123] C. Imbert, C. Mouhot, and L. Silvestre. Decay estimates for large velocities in the Boltzmann equation without cutoff. *J. Éc. Polytech., Math.*, 7 :143–184, 2020.
- [124] C. Imbert and L. Silvestre. Global regularity estimates for the Boltzmann equation without cut-off, 2019. arXiv :1909.12729.
- [125] C. Imbert and L. Silvestre. Regularity for the Boltzmann equation conditional to macroscopic bounds, 2020. arXiv :2005.02997.
- [126] C. Imbert and L. Silvestre. The weak Harnack inequality for the Boltzmann equation without cut-off. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 22(2) :507–592, 2020.

- [127] C. Imbert and L. Silvestre. The Schauder estimate for kinetic integral equations. *Anal. PDE*, 14(1) :171–204, 2021.
- [128] N. Jiang, L. Xiong, and K. Zhou. The incompressible Navier-Stokes-Fourier limit from Boltzmann-Fermi-Dirac equation. *J. Differ. Equations*, 308 :77–129, 2022.
- [129] N. Jiang, C.-J. Xu, and H. Zhao. Incompressible Navier-Stokes-Fourier limit from the Boltzmann equation : classical solutions. *Indiana Univ. Math. J.*, 67(5) :1817–1855, 2018.
- [130] M. Kac. Foundations of kinetic theory. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. III*, pages 171–197. University of California Press, Berkeley-Los Angeles, Calif., 1956.
- [131] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*.
- [132] M. Kats. Probability and related topics in physical sciences. übersetzung aus dem Englischen von R. A. Minlos. 1965.
- [133] S. Kawashima. The Boltzmann equation and thirteen moments. *Japan J. Appl. Math.*, 7(2) :301–320, 1990.
- [134] J. G. Kirkwood. The statistical mechanical theory of transport processes i. general theory. *The Journal of Chemical Physics*, 14(3) :180–201, 1946.
- [135] M. Klaus. Boltzmann collision operator without cut-off.
- [136] M. Lachowicz. On the initial layer and the existence theorem for the nonlinear Boltzmann equation. *Math. Methods Appl. Sci.*, 9 :342–366, 1987.
- [137] C. Landim and H. T. Yau. Fluctuation-dissipation equation of asymmetric simple exclusion processes. *Probab. Theory Relat. Fields*, 108(3) :321–356, 1997.
- [138] O. E. Lanford, III. Time evolution of large classical systems. pages 1–111. Lecture Notes in Phys., Vol. 38, 1975.
- [139] J. L. Lebowitz. Microscopic reversibility and macroscopic behavior : Physical explanations and mathematical derivations. pages 1–20, 1995.
- [140] J. Leray. Essai sur les mouvements plans d’une liquide visqueux que limitent des parois. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 13 :331–418, 1934.
- [141] C. D. Levermore and N. Masmoudi. From the Boltzmann equation to an incompressible Navier-Stokes-Fourier system. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 196(3) :753–809, 2010.
- [142] P. L. Lions. Compactness in Boltzmann’s equation via Fourier integral operators and applications. I, II. *J. Math. Kyoto Univ.*, 34(2) :391–428, 429–462, 1994.
- [143] P. L. Lions. Conditions at infinity for Boltzmann’s equation. *Commun. Partial Differ. Equations*, 19(1-2) :335–367, 1994.

- [144] P.-L. Lions. Régularité et compacité pour des noyaux de collision de Boltzmann sans troncature angulaire. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 326(1) :37–41, 1998.
- [145] P.-L. Lions and N. Masmoudi. A local approach to the incompressible limit. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, 329(5) :387–392, 1999.
- [146] T.-P. Liu, T. Yang, and S.-H. Yu. Energy method for Boltzmann equation. *Physica D*, 188(3-4) :178–192, 2004.
- [147] X. Lu. A result on uniqueness of mild solutions of Boltzmann equations. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 26(1-2) :209–220, 1997.
- [148] X. Lu. Spatial decay solutions of the Boltzmann equation : Converse properties of long time limiting behavior. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(5) :1151–1174, 1999.
- [149] E. Mach. Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch kritisch dargestellt. Mit 250 Abbildungen. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Internationale wissenschaftliche Bibliothek, 59. Band. Leipzig : F. A. Brockhaus. xii, 505 S. 8° (1897)., 1897.
- [150] L. Masmoudi. From Boltzmann equation to the navier–stokes and euler equations ii. 2001.
- [151] J. C. Maxwell. On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157 :49–88, 1867.
- [152] S. Mischler and C. Mouhot. Cooling process for inelastic Boltzmann equations for hard spheres. II : Self-similar solutions and tail behavior. *J. Stat. Phys.*, 124(2-4) :703–746, 2006.
- [153] S. Mischler and C. Mouhot. Stability, convergence to self-similarity and elastic limit for the Boltzmann equation for inelastic hard spheres. *Commun. Math. Phys.*, 288(2) :431–502, 2009.
- [154] S. Mischler and C. Mouhot. Exponential stability of slowly decaying solutions to the kinetic-Fokker-Planck equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 221(2) :677–723, 2016.
- [155] S. Mischler and B. Wennberg. On the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 16(4) :467–501, 1999.
- [156] C. Mouhot. Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials. *Commun. Math. Phys.*, 261(3) :629–672, 2006.
- [157] C. Mouhot and L. Neumann. Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus. *Nonlinearity*, 19(4) :969–998, 2006.
- [158] C. Mouhot and R. M. Strain. Spectral gap and coercivity estimates for linearized Boltzmann collision operators without angular cutoff. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(5) :515–535, 2007.

- [159] B. Nicolaenko. Dispersion laws for plane wave propagation and the Boltzmann equation. Boltzmann Equ., Sem. 1970-1971, Courant Inst. math. Sci., New York Univ., 125-171 (1972)., 1972.
- [160] A. Nota, S. Simonella, and J. J. L. Velázquez. On the theory of Lorentz gases with long range interactions. *Rev. Math. Phys.*, 30(3) :1850007, 62, 2018.
- [161] A. Nota, J. J. L. Velázquez, and R. Winter. Interacting particle systems with long-range interactions : scaling limits and kinetic equations. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, 32(2) :335–377, 2021.
- [162] A. Nota, J. J. L. Velázquez, and R. Winter. Interacting particle systems with long-range interactions : scaling limits and kinetic equations, 2020. arXiv :2003.11605.
- [163] S. Olla, S. R. S. Varadhan, and H. T. Yau. Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise. pages 176–213, 2012.
- [164] Y. P. Pao. Boltzmann collision operator with inverse-power intermolecular potentials. I. II. *Commun. Pure Appl. Math.*, 27 :407–428, 559–581, 1974.
- [165] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Appl. Math. Sci.* Springer, Cham, 1983.
- [166] M. Pitteri. On the asymptotic behaviour of Boltzmann’s h function in the kinetic theory of gases. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 67 :248–251, 1979.
- [167] J. Polewczak. Classical solution of the nonlinear Boltzmann equation in all r^3 : asymptotic behavior of solutions. *J. Stat. Phys.*, 50(3-4) :611–632, 1988.
- [168] A. Y. Povzner. The Boltzmann equation in the kinetic theory of gases. *Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc.*, 47 :193–216, 1965.
- [169] J. Prüss. On the spectrum of C_0 -semigroups. *Trans. Am. Math. Soc.*, 284 :847–857, 1984.
- [170] A. Pulvirenti and B. Wennberg. Lower bounds for the solutions to the Kac and the Boltzmann equation. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 25(3-5) :437–446, 1996.
- [171] A. Pulvirenti and B. Wennberg. A Maxwellian lower bound for solutions to the Boltzmann equation. *Commun. Math. Phys.*, 183(1) :145–160, 1997.
- [172] J. Quastel and H.-T. Yau. Lattice gases, large deviations, and the incompressible Navier-Stokes equations. *Ann. Math. (2)*, 148(1) :51–108, 1998.
- [173] M. Rachid. Incompressible Navier-Stokes-Fourier limit from the Landau equation. *Kinet. Relat. Models*, 14(4) :599–638, 2021.
- [174] F. Rezakhanlou and C. Villani. Entropy methods for the Boltzmann equation. 1916 :xii+107, 2008. Lectures from a Special Semester on Hydrodynamic Limits held at the Université de Paris VI, Paris, 2001, Edited by François Golse and Stefano Olla.

- [175] Y. Shizuta. On the classical solutions of the Boltzmann equation. *Commun. Pure Appl. Math.*, 36 :705–754, 1983.
- [176] V. Sohinger and R. M. Strain. The Boltzmann equation, Besov spaces, and optimal time decay rates in \mathbb{R}_x^n . *Adv. Math.*, 261 :274–332, 2014.
- [177] H. Spohn. Kinetic equations from hamiltonian dynamics : Markovian limits. *Rev. Mod. Phys.*, 52 :569–615, Jul 1980.
- [178] R. M. Strain. Optimal time decay of the non cut-off Boltzmann equation in the whole space. *Kinet. Relat. Models*, 5(3) :583–613, 2012.
- [179] R. M. Strain and Y. Guo. Almost exponential decay near Maxwellian. *Commun. Partial Differ. Equations*, 31(1-3) :417–429, 2006.
- [180] R. M. Strain and Y. Guo. Exponential decay for soft potentials near Maxwellian. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 187(2) :287–339, 2008.
- [181] G. Toscani. On the nonlinear Boltzmann equation in unbounded domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 95 :37–49, 1986.
- [182] G. Toscani. H -theorem and asymptotic trend of the solution for a rarefied gas in the vacuum. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 100(1) :1–12, 1987.
- [183] G. Toscani and C. Villani. Probability metrics and uniqueness of the solution to the Boltzmann equation for a Maxwell gas. *J. Stat. Phys.*, 94(3-4) :619–637, 1999.
- [184] G. Toscani and C. Villani. Sharp entropy dissipation bounds and explicit rate of trend to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Commun. Math. Phys.*, 203(3) :667–706, 1999.
- [185] I. Tristani. Boltzmann equation for granular media with thermal force in a weakly inhomogeneous setting. *J. Funct. Anal.*, 270(5) :1922–1970, 2016.
- [186] S. Ukai. On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation. *Proc. Japan Acad.*, 50 :179–184, 1974.
- [187] S. Ukai. Les solutions globales de l'équation de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans le demi-espace. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, 282 :317–320, 1976.
- [188] S. Ukai. Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff. *Japan J. Appl. Math.*, 1(1) :141–156, 1984.
- [189] S. Ukai and K. Asano. On the Cauchy problem of the Boltzmann equation with a soft potential. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 18 :477–519, 1982.
- [190] C. Villani. On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 143(3) :273–307, 1998.
- [191] C. Villani. Regularity estimates via the entropy dissipation for the spatially homogeneous Boltzmann equation without cut-off. *Rev. Mat. Iberoam.*, 15(2) :335–352, 1999.

- [192] C. Villani. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true. *Commun. Math. Phys.*, 234(3) :455–490, 2003.
- [193] C. Villani. *Hypocoercivity*, volume 950 of *Mem. Am. Math. Soc.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2009.
- [194] P. Volkmann. Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik, mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. Leipzig : B. G. Teubner. XVI + 370 S. gr. 8° (1900)., 1900.
- [195] H. Wang and Z. Fang. Global existence and time decay of the non-cutoff Boltzmann equation with hard potential. *Nonlinear Anal., Real World Appl.*, 63 :32, 2022. Id/No 103416.
- [196] B. Wennberg. Stability and exponential convergence in L^p for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 20(8) :935–964, 1993.
- [197] B. Wennberg. On moments and uniqueness for solutions to the space homogeneous Boltzmann equation. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 23(4) :533–539, 1994.
- [198] B. Wennberg. Stability and exponential convergence for Boltzmann equation. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 130(2) :103–144, 1995.
- [199] B. Wennberg. Entropy dissipation and moment production for the Boltzmann equation. *J. Stat. Phys.*, 86(5-6) :1053–1066, 1997.
- [200] B. Wennberg. An example of nonuniqueness for solutions to the homogeneous Boltzmann equation. *J. Stat. Phys.*, 95(1-2) :469–477, 1999.
- [201] Y. Wu and J. Sun. Asymptotic behavior of linearized Boltzmann equations for soft potentials with cut-off. *Electron. J. Differ. Equ.*, 2021 :21, 2021. Id/No 46.
- [202] T. Yang and H. Yu. Spectrum analysis of some kinetic equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 222(2) :731–768, 2016.
- [203] J. Yvon. *La théorie statistique des fluides et l'équation d'état*. Actualités scientifiques et industrielles : hydrodynamique, acoustique : Théories mécaniques. Hermann & cie, 1935.