Calcul différentiel et intégral II

MATHF201

Guillaume Dujardin
Centre Inria de l'université de Lille
Université Libre de Bruxelles

3 avril 2023

Préambule

Ce document est un syllabus en cours de finalisation.

Un syllabus, c'est bien. Participer en cours [1], c'est mieux.

Les pages qui suivent constituent un document de référence pour tou.te.s les étudiant.e.s du cours MATHF201 "Calcul Différentiel et Intégral 2" (souvent abrégé en CDI2). Ce document présente l'ensemble de la matière vue en cours, mais se veut aussi plus complet, avec des résultats plus précis et des réponses à certaines questions qui ne sont pas nécessairement abordées en cours tous les ans. À quelques rares exceptions près [2], qui sont par ailleurs signalées, les résultats présentés (lemmes, propriétés, théorèmes et corollaires) sont intégralement prouvés [3], de sorte que ce syllabus est, le plus possible, auto-contenu [4]. L'utilisation de ce syllabus ne remplace aucunement le cours dispensé et discuté à l'Université Libre de Bruxelles, que j'invite chacun.e chaleureusement à suivre en y prenant ses propres notes : le cours à l'université est sans doute bien plus vivant, et permet bien plus d'interaction et de motivation(s), qu'un syllabus au format PDF. De même, ce syllabus ne dispense pas d'assister et de participer activement aux séances d'exercices qui suivent les séances de théorie et qui permettent véritablement de s'approprier les notions et les résultats vus en cours. Ce syllabus répond toutefois aux demandes réitérées des étudiant.e.s d'avoir un document de référence pour le cours de CDI2.

Même si ce syllabus est désormais complet et présente l'ensemble du cours de CDI2, il n'est pas parfait. Je tenterai de l'améliorer, de le reformuler par endroits et de corriger les typos qui me seront signalées chaque fois que possible. Je continuerai de mettre régulièrement en ligne de nouvelles versions.

Perspective historique

Le cours de CDI2 est un cours d'Analyse qui introduit des notions fondamentales et qui ne manquent pas d'applications. Certaines de ces application sont présentées dans le cours. L'essentiel des notions abordées a été formalisé au XIXème siècle, même si la présentation qui en est faite dans ce syllabus tente de coller au mieux à l'époque actuelle. Le nom d'Augustin Cauchy (1789-1857) figure abondamment dans chaque chapitre, et cotoie ceux de Niels Abel (1802-1829), de Friedrich Bessel (1784-1846), de Johann Dirichlet (1805-1859), de Jean-Marie Duhamel (1797-1872), de Joseph Fourier (1768-1830), de Joseph Liouville (1809-1882), de Rudolf Lipschitz (1832-1903), de Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836), de Bernhard Riemann (1826-1866), et de Karl Weierstrass (1815-1897). Les quelques inclusions dans le XXème siècle seront succintes et ne feront qu'évoquer des notions qui portent les noms d'Émile Borel (1871-1956), d'Henri-Léon Lebesgue (1875-1941), et de Laurent Schwartz (1915-2002).

Espérons que ces notions fondamentales et leurs applications donneront aux étudiant.e.s l'envie de découvrir plus avant les mathématiques du XXème siècle, et de contribuer à écrire les mathématiques du XXIème siècle !

---

1. en présentiel ou à distance, par exemple en cas de confinement
2. Par exemple, on ne montre pas dans ce syllabus le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà 3.5.1, qui nécessiterait une théorie de l'intégration en dimension $d \geq 2$ afin de pouvoir régulariser le champ de vecteurs, dans sa preuve classique, ni le théorème qui assure qu'une matrice carrée à coefficients complexes possède, dans sa classe de similitude, une matrice dite réduite de Jordan, car ce résultat a bien plus naturellement sa place dans un cours d'Algèbre.
3. Et certains "petits" résultats sont laissés en exercice, avec parfois une indication.
4. Bien sûr, il repose néammoins sur le cours de CDI1 à de plusieurs endroits, pour éviter les redites.

Plan du syllabus

Quatre chapitres constituent ce syllabus. Décrivons-les rapidement.

Le premier chapitre est consacré aux suites et séries de fonctions. Il s'agit de généraliser les résultats vus en CDI1 sur des séquences d'objets $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à des séquences d'objets à paramètres $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Après quelques rappels de topologie dans les espaces métriques en section 1.1, on introduit les notions de convergence simple et de convergence uniforme en section 1.2. On s'intéresse en section 1.3 à donner des conditions suffisantes pour avoir, lorsque cela a un sens,

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)'(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n'(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$

On adapte ensuite les résultats sur les suites de fonctions aux séries de fonctions en section 1.4 et l'on introduit notamment la notion de convergence normale et le critère d'Abel. Les deux dernières sections du chapitre 1 sont des applications des résultats précédents. En section 1.5, on étudie les séries de puissances : on introduit la notion de convergence, et l'on étudie la continuité de la somme, à l'intérieur du disque ouvert de convergence et au bord de ce disque. On montre que la somme d'une série de puissances est infiniment dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et on en déduit en particulier l'unicité des coefficients d'un développement en série de puissances. Ces résultats seront très utiles au chapitre 4. En section 1.6, on traite des séries de Fourier associées aux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ Riemann-intégrables sur une période. On montre notamment des théorèmes de Dirichlet et le théorème de Parseval-Plancherel.

Le deuxième chapitre traite de la généralisation de l'intégrale de Riemann sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à l'intégration sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, qui n'est pas nécessairement ni fermé ni borné. On se focalise en section 2.1 sur les fonctions absolument intégrables, et on introduit en section 2.2 la notion d'intégrale convergente. On étudie en section 2.3 les fonctions de la forme $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$, c'est-à-dire les intégrales à paramètres. On applique les résultats présentés dans les sections précédentes dans les deux dernières sections du chapitre 2. En section 2.4, on étudie quelques propriétés de la convolution, dans le but notamment d'obtenir des résultats de régularisation. On montre notamment le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass. En section 2.5, on développe une théorie de la transformation de Fourier dans la classe de Schwartz sur $\mathbb{R}$. On calcule notamment la transformée de Fourier d'une gaussienne, on montre le théorème d'inversion de Fourier dans la classe de Schwartz, on s'intéresse aux liens entre convolution et transformation de Fourier et l'on montre finalement le théorème de Plancherel.

Le troisième chapitre présente une théorie de Cauchy pour les équations différentielles. En section 3.1, on montre comment se ramener à un problème du premier ordre, et on introduit la formulation d'intégrale d'un problème de Cauchy. En section 3.2, on rappelle un théorème de point fixe et on montre comment on peut l'utiliser pour obtenir un résultat local en temps d'existence de solutions à un problème de Cauchy avec une forme d'unicité. La section 3.3 globalise le résultat d'existence et d'unicité précédent en introduisant la notion de solutions maximales d'un problème de Cauchy et en étudiant les bouts des solutions maximales. La section 3.4 introduit la notion de flot associé à une équation différentielle et présente la notion d'intégrale première. Un résultat [5] d'existence de solutions maximales avec des hypothèses plus faibles que précédemment est présenté en section 3.5. Enfin, on traite en section 3.6 le cas des équations différentielles linéaires, introduisant la notion de matrice résolvante, de système homogène et de système inhomogène, on présente la

5. Il s'agit du théorème 3.5.1 de Cauchy-Peano-Arzelà, qui est le seul résultat important du cours dont la preuve n'est pas présentée dans ce syllabus.

méthode de Duhamel de variation des constantes et l'on conclut en développant une théorie de l'exponentielle de matrices pour la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Le quatrième chapitre propose une présentation, très inspirée de celle de [10], des notions et résultats de base de la théorie des fonctions d'une variable complexe. En section 4.1, on rappelle quelques points communs et différences entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, et l'on établit les relations de Cauchy-Riemann qui font le lien entre la différentiabilité d'une fonction d'une variable de $\mathbb{R}^2$ et la différentiabilité d'une fonction d'une variable complexe. On conclut cette section en introduisant la notion de fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$. On montre en section 4.2 que les sommes de séries de puissances d'une variable complexe sont holomorphes sur leur disque ouvert de convergence. La section 4.3 est consacrée à la preuve d'une forme de réciproque : une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est somme d'une série de puissances sur toute boule ouverte incluse dans l'ouvert. Elle introduit notamment dans ce but la notion d'intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin, fait quelques rappels de connexité dans le plan complexe, introduit la notion d'indice d'un point par rapport à un chemin fermé, et présente le théorème de Cauchy dans un ouvert convexe qui permet de montrer la formule de Cauchy. On liste en section 4.4 quelques conséquences du théorème de représentation en séries de puissances d'une fonction holomorphe, parmi lesquelles le principe des zéros isolés pour une fonction holomorphe sur un ouvert connexe (qui permet ensuite la classification des singularités isolées d'une fonction holomorphe sur un ouvert), le théorème de Liouville relatif aux fonctions entières, le principe du maximum, le théorème fondamental de l'Algèbre [6], et les estimations de Cauchy. La section 4.5 vise à généraliser le théorème et la formule de Cauchy à la fois à des ouverts non nécessairement convexes, et à des cycles (des "sommes" de chemins fermés) plutôt qu'à des chemins fermés. Outre le théorème de Cauchy "global", qui résume cette généralisation, elle traite aussi de l'homotopie entre chemins fermés, et aboutit à un résultat qui permet de changer les cycles d'intégration sans changer la valeur des intégrales que l'on souhaite calculer. Enfin, la section 4.6 présente le théorème des résidus pour une fonction méromorphe (c'est-à-dire holomorphe n'ayant que des singularités isolées de type polaire) sur un ouvert de $\mathbb{C}$, qui permet notamment le calcul d'intégrales. Elle se conclut par le théorème de Rouché et un exercice de calcul effectif d'intégrale, qui s'interprète par ailleurs comme un calcul de transformée de Fourier.

Références pour le cours de Calcul Différentiel et Intégral 2

Il existe de nombreuses excellentes références pour ce cours. J'invite chaque étudiant.e à faire ses propres choix : il n'y a sans doute pas d'absolu dans les recommandations d'ouvrages de mathématiques. Ceci étant dit, on trouvera une référence solide pour le chapitre 1 sur les suites et séries de fonctions, pour le chapitre 2 sur l'intégration (dans le cadre un peu plus restrictif des fonctions continues par morceaux sur un intervalle) et pour le chapitre 3 sur les équations différentielles dans l'excellent cours de mathématiques de Jean Voedts [12]. Pour le chapitre 4, on pourra consulter les chapitres correspondants du livre de Walter Rudin [10], qui est par ailleurs une référence pour les premières années d'Analyse partout sur la planète [7]. Les chapitres correspondants de ces deux ouvrages couvrent, à eux seuls, presqu'intégralement, l'ensemble des compétences nécessaires pour le cours de CDI2.

Mentionnons quelques autres références pour permettre à chacun.e de faire ses propres choix. Je commence par une référence électronique : on trouvera ici des résumés de cours (dans un cadre

6. aussi appelé théorème de D'Alembert-Gauss
7. Attention, certains chapitres de cet ouvrage dépassent de loin un cours d'Analyse de deuxième année.

parfois plus restrictif que celui du syllabus, en particulier pour le chapitre 2) et des exercices corrigés. Pour les chapitres 1, 2, et dans une moindre mesure 3, le livre d'Omran Kouba [8] contient également de nombreux exercices corrigés très formateurs. Pour le chapitre 3, le livre d'Henri Cartan [2] est une excellente référence historique et pédagogique qui se place dans le cadre très général des équations différentielles posées dans un espace de Banach ; le livre de Sylvie Benzoni-Gavage [1], plus récent, propose une théorie complète, exposée également avec pédagogie, couvrant largement le cadre de ce syllabus (théorème de Cauchy-Lipschitz, équations différentielles linéaires) et dépassant le syllabus par plusieurs aspects (questions de stabilité des solutions stationnaires, par exemple). Il contient par ailleurs une première partie consacrée au calcul différentiel, et de nombreux exercices corrigés. Pour les chapitres 1 et 4, le livre de Patrice Tauvel [11] propose un cours complet et des exercices corrigés. Enfin, pour le chapitre 2, il faut faire très attention dans le choix des références. En effet, il y a principalement deux moyens de construire une théorie d'intégration lors des premières années d'études universitaires. La première, adoptée dans ce syllabus, consiste à généraliser l'intégrale de Riemann sur un segment des fonctions à valeurs réelles. La seconde, qui est enseignée à l'ULB dans le cours de théorie de la mesure MATHF3001, repose justement sur la construction de mesures sur l'ensemble "de départ" des fonctions et l'utilisation de mesures d'images réciproques d'ensembles particuliers de l'ensemble "d'arrivée" des fonctions ; elle porte le nom d'intégrale de Lebesgue. Les deux théories coïncident notamment dans le cas des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles (lorsqu'on utilise la mesure dite "de Lebesgue" sur $\mathbb{R}$). La première est historique et assez intuitive. La seconde permet de nombreuses généralisations et des théorèmes puissants, dont le fameux théorème dit "de convergence dominée" qui ne figure pas dans ce syllabus, mais elle est sans doute moins intuitive et sensiblement plus technique à mettre en œuvre. Aussi, si vous choisissez un livre d'intégration "au hasard" pour travailler le chapitre 2, il risque d'utiliser le vocabulaire et les outils de la seconde construction plutôt que ceux de la première, et donc de ne pas bien correspondre à ce syllabus. C'est pourquoi je termine en citant en référence pour ce chapitre le livre d'Analyse II de Roger Godement [5], qui se place dans un cadre similaire à celui de ce syllabus et couvre par ailleurs également le chapitre 4. Je mentionne aussi à toutes fins utiles le livre d'Analyse I du même auteur [4], dans lequel on peut réviser nombre des notions de CDI1.

Dernière déclaration

Enfin, ce syllabus est basé sur des notes de cours que m'a transmises Antoine Gloria, qui donnait ce cours avant moi, elles-mêmes basées sur des notes de Paul Godin et Jean-Pierre Gossez, qui le donnaient avant lui. Je ne suis donc pas le seul responsable de l'esprit de ce syllabus. Je suis en revanche seul responsable des erreurs qu'il peut contenir. Aussi, dans le but d'améliorer ce document pour le bien de tou.te.s les étudiant.e.s, présent.e.s et futur.e.s, j'invite chacun.e à m'envoyer ses remarques, questions et suggestions de correction à chaque fois qu'il ou elle repère une imprécision, ou une faute (qu'elle soit typographique ou plus importante) par mail à l'adresse guillaume.dujardin@ulb.be.

À Bruxelles,
Le 3 avril 2023.

Guillaume Dujardin

Table des matières

1 Suites et séries de fonctions **11**
1.1 Rappels de topologie métrique 12
1.1.1 Espaces métriques 12
1.1.2 Espaces vectoriels normés 14
1.1.3 Ouverts, fermés, compacts 15
1.1.4 Suites de Cauchy 19
1.1.5 Continuité 20
1.2 Convergences de suites de fonctions 23
1.2.1 Convergence simple 23
1.2.2 Convergence uniforme 24
1.2.3 L'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ 26
1.2.4 Convergence uniforme sur les compacts 28
1.3 Suites de fonctions et opérations d'intégration et de dérivation 30
1.3.1 Passage à la limite dans une intégrale de Riemann 30
1.3.2 Passage à la limite dans une suite de fonctions de classe C^1 31
1.4 Séries de fonctions 35
1.4.1 Retranscription des résultats sur les suites de fonctions dans le cadre des séries de fonctions 35
1.4.2 Convergence normale d'une série de fonctions 37
1.4.3 Le critère d'Abel 39
1.4.4 Une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}$, et nulle part dérivable 41
1.5 Séries de puissances 43
1.5.1 Limites supérieures de suites réelles positives 43
1.5.2 Théorie du rayon 44
1.5.3 Étude au bord du disque ouvert de convergence 48
1.5.4 Fonctions réelles-analytiques 51
1.6 Séries de Fourier 53
1.6.1 Coefficients de Fourier d'une fonction périodique 53
1.6.2 Série de Fourier associée à une fonction périodique 55
1.6.3 Série de Fourier et dérivation 59
1.6.4 Le théorème de Dirichlet 60
1.6.5 Le théorème de Parseval-Plancherel 65
1.6.6 Coefficients de Fourier trigonométriques 67

2 Intégration **69**
2.1 Intégrales absolument convergentes . . . 70
2.1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann . . . 70
2.1.2 Fonctions absolument intégrables sur un intervalle . . . 76
2.1.3 Intégrales absolument convergentes fonctions de leurs bornes . . . 82
2.1.4 Critères d'intégrabilité absolue . . . 86
2.1.5 Fonctions de référence de Riemann . . . 87
2.1.6 Le théorème du changement de variable . . . 88
2.2 Intégrales convergentes . . . 89
2.2.1 Définition, critères de Cauchy et exemple . . . 89
2.2.2 Rappel : Les deux formules de la moyenne . . . 94
2.2.3 Le critère d'Abel pour la convergence des intégrales . . . 99
2.2.4 Espace des fonctions de carré intégrable, inégalité de Cauchy-Schwarz . . . 101
2.3 Intégrales à paramètres . . . 102
2.3.1 Fonctions définies par une intégrale sur un segment fixe . . . 102
2.3.2 Fonctions définies par une intégrale sur un segment variable . . . 105
2.3.3 Fonctions définies par une intégrale convergente sur un intervalle fixe . . . 106
2.3.4 Deux conditions suffisantes de convergence uniforme d'intégrales . . . 110
2.3.5 Des théorèmes de Fubini . . . 111
2.4 Application à la régularisation par convolution . . . 115
2.4.1 Approximations de l'identité . . . 115
2.4.2 Le théorème d'approximation de Weierstrass . . . 119
2.5 Application à la transformation de Fourier . . . 122
2.5.1 La classe de Schwartz . . . 122
2.5.2 Définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . . . 123
2.5.3 Transformée de Fourier d'une gaussienne . . . 126
2.5.4 Le théorème d'inversion de Fourier . . . 126
2.5.5 La convolution dans la classe de Schwartz . . . 129
2.5.6 Le théorème de Plancherel . . . 132
2.5.7 Application à une équation elliptique linéaire en dimension 1 . . . 135

3 Équations différentielles **137**
3.1 Généralités . . . 138
3.1.1 Définitions . . . 138
3.1.2 Réduction à l'ordre 1 . . . 139
3.1.3 Notion de problème de Cauchy . . . 140
3.1.4 Formulation intégrale du problème de Cauchy . . . 140
3.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz local . . . 141
3.2.1 Rappel sur le théorème du point fixe de Picard . . . 141
3.2.2 Cylindres de sécurité en espace-temps . . . 143
3.2.3 Champs de vecteurs localement lipschitziens en espace . . . 145
3.2.4 Le théorème de Cauchy-Lipschitz local . . . 149
3.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz global . . . 151
3.3.1 Motivation . . . 151
3.3.2 Exemples . . . 152
3.3.3 Bouts droits et gauches . . . 152

3.3.4 Solutions maximales . . . 153
3.3.5 Le théorème de Cauchy-Lipschitz global . . . 153
3.3.6 Solutions globales et lemme de sortie de tout compact . . . 156
3.4 Notion de flot et dépendance en la donnée initiale . . . 157
3.4.1 Notion de flot d'une équation différentielle . . . 157
3.4.2 Dépendance du flot en la donnée initiale . . . 158
3.4.3 Notion d'intégrale première . . . 168
3.5 Une condition suffisante d'existence locale : le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà . . . 169
3.6 Équations différentielles linéaires . . . 170
3.6.1 Une condition suffisante d'existence et d'unicité de solutions globales . . . 170
3.6.2 Équations différentielles linéaires homogènes . . . 172
3.6.3 Équations différentielles linéaires inhomogènes . . . 176
3.6.4 Équations différentielles linéaires scalaires . . . 178
3.6.5 Équations différentielles linéaires à coefficients constants . . . 179

4 Fonctions d'une variable complexe 185
4.1 Le plan complexe : $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ et les fonctions holomorphes sur un ouvert . . . 186
4.1.1 Isomorphisme canonique et implications . . . 186
4.1.2 Applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ . . . 187
4.1.3 Applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ou d'un ouvert de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: notions ponctuelles de différentiabilité et de $\mathbb{C}$-dérivabilité . . . 188
4.1.4 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ . . . 190
4.2 Les sommes de séries de puissances sont holomorphes . . . 191
4.3 Les fonctions holomorphes sont développables en séries de puissances . . . 194
4.3.1 Une condition suffisante pour être somme d'une série de puissances . . . 194
4.3.2 Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin . . . 196
4.3.3 Connexité et convexité dans le plan complexe . . . 200
4.3.4 Indice d'un point par rapport à un chemin fermé . . . 205
4.3.5 Le théorème de Cauchy local . . . 207
4.3.6 La formule de Cauchy dans un ouvert convexe . . . 214
4.3.7 Les fonctions holomorphes sont développables en séries de puissances . . . 214
4.4 Quelques conséquences du théorème de développement en série de puissances . . . 216
4.4.1 Le théorème de Morera . . . 216
4.4.2 Le principe des zéros isolés . . . 216
4.4.3 La classification des singularités isolées . . . 220
4.4.4 Le théorème de Liouville . . . 223
4.4.5 Le principe du maximum . . . 225
4.4.6 Le théorème fondamental de l'algèbre . . . 227
4.4.7 Estimations de Cauchy . . . 228
4.5 Le théorème de Cauchy global . . . 230
4.5.1 Chaînes et cycles . . . 231
4.5.2 Deux lemmes techniques . . . 232
4.5.3 Le théorème de Cauchy global . . . 234
4.5.4 Homotopie entre chemins fermés . . . 239
4.6 Le théorème des résidus . . . 245
4.6.1 Fonctions méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ . . . 245

4.6.2 Le théorème des résidus 248
4.6.3 Le théorème de Rouché 250
4.6.4 Une autre application du théorème des résidus 251

5 Matière d'examen **255**
5.1 Matière d'examen pour le chapitre 1 256
5.2 Matière d'examen pour le chapitre 2 257
5.3 Matière d'examen pour le chapitre 3 258
5.4 Matière d'examen pour le chapitre 4 259

Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

Le lecteur est supposé familier avec les nombres réels et complexes, les notions de valeur absolue, de module, les suites réelles ou complexes, et la notion de convergence de ce type de suites. Nous allons dans un premier temps généraliser en 1.1 la notion de convergence d'une suite afin d'autoriser les suites à prendre leurs valeurs dans des ensembles plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On introduira en particulier la notion d'espace métrique et l'on s'intéressera au cas particulier des espaces vectoriels normés. Ceci permettra, dans un second temps, en 1.2, d'introduire les notions de convergence simple et de convergence uniforme de suites de fonctions d'un ensemble X dans un espace métrique Y, ainsi que celle de convergence uniforme sur les compacts lorsque X est un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimenstion finie. En 1.3, on donnera des conditions suffisantes pour préserver des propriétés (d'intégrabilité, de dérivabilité) par passage à la limite dans une suite de fonctions scalaires définies sur des ensembles appropriés. La section 1.4 sera l'occasion d'introduire les séries de fonctions, dans le cas où Y est un espace vectoriel normé, et d'introduire les notions de convergence absolue et de convergence normale. On étudiera le cas particulier des séries de puissances lorsque $X \subset \mathbb{C}$ et Y est un espace vectoriel normé complet. Enfin, on appliquera les notions et résultats vus précédemment à l'étude des séries de puissances en section 1.5 et à celle des séries de Fourier en section 1.6.

1.1 Rappels de topologie métrique

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble. On appelle* **distance sur** X *(ou parfois* **métrique***) toute application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

— $\forall x, y \in X, \qquad d(x,y) = d(y,x),$

— $\forall x, y, z \in X, \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z),$

— $\forall x, y \in X, \qquad (d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y).$

Remarque 1.1.2 *La première propriété traduit le fait que la distance entre deux points x et y de X ne dépend pas du fait qu'on la mesure en allant de x à y ou de y à x : c'est une propriété de* **symétrie***.*

La seconde propriété traduit le fait que la distance entre deux points x et z de X est toujours inférieure à la somme des distances de x à y et de y à z, quel que soit le point y de X choisi. On comprendra pourquoi elle s'appelle **inégalité triangulaire** *en faisant un dessin.*

La dernière propriété traduit le fait que seul x est à distance nulle de lui-même : tous les autres points de X sont à une distance strictement positive de x. On dit que la distance d **sépare les points de** X.

Définition 1.1.3 *On appelle* **espace métrique** *tout couple (X,d) formé par un ensemble X et une distance d sur X.*

La notion d'espace métrique permet de définir la notion de convergence d'une suite.

Définition 1.1.4 *Soit (X,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de points de X et $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge vers** x *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \qquad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

L'interprétation de la convergence est la suivante : quelle que soit la distance $\varepsilon > 0$ donnée, tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à une distance de x inférieure à ε à partir d'un certain rang. Bien sûr, ce rang dépend en général de ε.

Notation 1 *On note $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$ pour signifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x au sens de d.*

Quand il n'y a pas d'ambiguité sur la distance, on peut se contenter de noter $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Propriété 1.1.5 *Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de points de X et $x, y \in X$. Si l'on suppose que*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x \qquad \text{et} \qquad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} y,$$

alors $x = y$. La limite d'une suite convergence dans un espace métrique est donc **unique**.

Preuve. À l'aide de l'inégalité triangulaire, écrivons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \qquad d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, par convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers y, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \qquad d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant la symétrie de la distance, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x) = d(x, x_n)$. On en déduit que

$$\forall n \geq \max(N_1, N_2), \qquad d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $d(x, y) = 0$. Puisque d sépare les points de X, on en déduit que $x = y$. ■

Définition 1.1.6 *Soit X un espace métrique et $A \subset X$ une partie non vide de X. On appelle* **distance à la partie** *A l'application définie pour $x \in X$ par*

$$d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a).$$

Remarque 1.1.7 *Comme son nom ne l'indique pas, la distance à une partie* **n'est pas** *une distance (par exemple, elle ne dépend que d'un point de X et non de deux).*

Propriété 1.1.8 *Soit X un espace métrique et $A \subset X$ une partie non vide de X. La distance à la partie A est une application 1-lipschitzienne sur X, au sens où*

$$\forall x, y \in X, \qquad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \tag{1.1}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in X$. Par définition de $d(x, A)$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que

$$d(x, A) \leq d(x, a_\varepsilon) < d(x, A) + \varepsilon.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} d(y,A) &\leq d(y,a_\varepsilon) \\ &\leq d(y,x)+d(x,a_\varepsilon) \\ &< d(y,x)+d(x,A)+\varepsilon. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité valant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$d(y,A) \leq d(y,x)+d(x,A).$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient symétriquement

$$d(x,A) \leq d(x,y)+d(y,A).$$

Puisque $d(x,y)=d(y,x)$, il vient que $d(x,y)$ majore à la fois $d(x,A)-d(y,A)$ et $d(y,A)-d(x,A)$. Ceci implique 1.1. ■

1.1.2 Espaces vectoriels normés

On désigne par $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Dans la pratique, le plus souvent, on aura $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Définition 1.1.9 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle* **norme sur** *E toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*
- $\forall x,y \in E, \qquad N(x+y) \leq N(x)+N(y),$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x),$
- $\forall x \in E, \qquad (N(x)=0 \Leftrightarrow x=0_E).$

Remarque 1.1.10 *La première propriété, appelée* **inégalité triangulaire** *explique que la norme de chaque diagonale d'un parallélogramme est inférieure à la somme des normes de deux côtés consécutifs du parallélogramme. La seconde propriété, appelée homogénéité traduit l'action d'une homothétie de rapport λ sur la norme : celle-ci multiplie la norme par le module de λ. Enfin, la dernière propriété assure que le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul.*

Définition 1.1.11 *On appelle* **$\mathbb{K}$-espace vectoriel normé** *tout couple (E,N) formé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'une norme N sur E.*

Propriété 1.1.12 *Soit (E,N) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Posons*

$$d : \begin{pmatrix} E\times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & N(x-y) \end{pmatrix}.$$

Le couple (E,d) est un espace métrique. La distance d est appelée **distance induite sur E par la norme N.**

Preuve. Exercice. ■

Remarque 1.1.13 *On peut donc parler, en accord avec la définition 1.1.4, de suite convergente dans un espace vectoriel normé : dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente vers $x \in E$ lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \qquad d(x_n,x) = N(x_n-x) < \varepsilon.$$

Exemple 1.1.14 — $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé pour la valeur absolue.*
— $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé pour le module.*
— $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel normé pour le module.*

Exemple 1.1.15 *Pour tout* $p \in [1, \infty[$ *et* $d \in \mathbb{N}^\star$*, posons pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d$*,*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Alors $(\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_p)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé. De même,* $(\mathbb{C}^d, \| \cdot \|_p)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé et un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel normé.*

Remarque 1.1.16 *Le lecteur pourra se persuader que* $\| \cdot \|_p$ *est bien une norme sur* $\mathbb{R}^d$ *comme sur* $\mathbb{C}^d$*. Toutefois, l'inégalité triangulaire n'est pas triviale à montrer : elle est appelée* **inégalité de Minkowski** *(une preuve dans le cas où le symbole* $\sum$ *est une* $\int$ *figure dans le chapire 10 de [12]).*

Exemple 1.1.17 *Pour* $x \in \mathbb{C}^d$*, posons* $\|x\|_\infty = \max_{k \in \{1,\ldots,d\}} |x_k|$*. Alors* $(\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_\infty)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé. De même,* $(\mathbb{C}^d, \| \cdot \|_\infty)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé et un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel normé.*

Exemple 1.1.18 *Pour* $P \in \mathbb{C}[X]$*, notons* $(a_k) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ *la suite nulle à partir d'un certain rang de ses coefficients, de sorte que* $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$*. Définissons*

$$\|P\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Observons que, puisque seul un nombre fini de coefficients est non nul, on a

$$\|P\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Le lecteur pourra vérifier que $(\mathbb{C}[X], \| \cdot \|)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé et un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel normé. De même,* $(\mathbb{R}[X], \| \cdot \|)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé. Remarquons que, contrairement aux exemples précédents, ces deux espaces ne sont pas de dimension finie.*

1.1.3 Ouverts, fermés, compacts

On rappelle ici les définitions et quelques propriétés topologiques des espaces métriques. Celles-ci sont en particulier applicables aux espaces vectoriels normés, en vertu de la proposition 1.1.12.

Définition 1.1.19 *Soit* (X, d) *un espace métrique,* x *un point de* X *et* r *un nombre réel strictement positif. On appelle* **boule ouverte de centre** x **et de rayon** r *l'ensemble*

$$B(x, r[= \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

On appelle **boule fermée de centre** x **et de rayon** r *l'ensemble*

$$B(x, r] = \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}.$$

Définition 1.1.20 *Soit (X, d) un espace métrique. On appelle* **ouvert** *de X toute partie O de X telle que*

$$\forall x \in O, \ \exists r > 0, \qquad B(x, r[\subset O.$$

Remarque 1.1.21 *Les ensembles $\emptyset$ et X sont toujours des ouverts de X.*

Définition 1.1.22 *Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X$. On appelle* **voisinage de** x **dans** X *toute partie de X qui contient un ouvert contenant x.*

Définition 1.1.23 *Soit (X, d) un espace métrique. On appelle* **fermé** *de X toute partie O de X dont le complémentaire dans X est ouvert.*

Propriété 1.1.24 (Caractérisation séquentielle des fermés) *Soit (X, d) un espace métrique et $F \subset X$. La partie F est fermée si et seulement si, pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F convergeant vers $x^\star \in X$, on a $x^\star \in F$.*

Preuve. Faisons une preuve par double implication, en démontrant chaque implication par l'absurde. Pour le sens direct, supposons que F est fermée et qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de F convergeant vers un $x^\star \in X \setminus F$. Puisque F est fermé, l'ensemble $X \setminus F$ est ouvert. Puisque $x^\star \in X \setminus F$, il existe $r > 0$ tel que $B(x^\star, r[\subset X \setminus F$. Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x^\star$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(x^\star, r[$. En particulier, $x_N \in X \setminus F$. Or $x_N \in F$. On a donc une contradiction. Ceci montre l'implication directe.
Pour le sens réciproque, raisonnons également par l'absurde. Supposons que toute suite de points de F convergeant dans X a sa limite dans F et que F n'est pas fermé. En particulier, $X \setminus F$ n'est pas ouvert. C'est-à-dire qu'il existe $x^\star \in X \setminus F$ tel que pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(x^\star, r[$ n'est pas incluse dans $X \setminus F$. Ceci implique que pour tout $r > 0$, on a $B(x^\star, r[\cap F \neq \emptyset$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B(x^\star, \frac{1}{n+1}[\cap F$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de F telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d(x^\star, x_n) < \frac{1}{n+1}.$$

En particulier, $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} x^\star$. Avec l'hypothèse, puisque $x^\star \in X$ est limite d'une suite de points de F, on a $x^\star \in F$. Or $x^\star \in X \setminus F$ par construction. On a donc une contradiction. Ceci achève la preuve de l'implication réciproque. ■

Remarque 1.1.25 *La propriété 1.1.24 exprime le fait que les parties fermées d'un espace métrique (c'est encore vrai en toute généralité dans un espace topologique, avec une preuve similaire mais qui dépasse les besoins du cours de CDI2) sont en fait les parties fermées pour le passage à la limite.*

Propriété 1.1.26 *Soit (X, d) un espace métrique, I un ensemble et $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X indexée par I.*

- *L'ensemble $\underset{i\in I}{\cup} O_i$ est un ouvert de X.*
- *Si I est fini, l'ensemble $\underset{i\in I}{\cap} O_i$ est un ouvert de X.*

Preuve. Ce résultat de topologie a dû être vu en CDI1. Il fera un excellent exercice de révision.
■

Définition 1.1.27 *Si X est un ensemble, on appelle* **topologie sur** X *toute famille $\tau(X)$ de parties de X qui contient X et $\emptyset$, qui est stable par réunion quelconque et par intersection finie. Les éléments de $\tau(X)$ sont appelés* **ouverts de** X **pour la topologie** $\tau(X)$.

Remarque 1.1.28 *Les termes introduits précédemments sont donc cohérents avec ce cadre très général (que nous utilisons peu dans ce syllabus).*

Définition 1.1.29 *Une partie K d'un espace métrique (X, d) est dite* **compacte** *si elle est non vide et de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini. C'est-à-dire si*

— $K \neq \emptyset$,

— $\forall I,\ \forall (O_i)_{i\in I} \in \tau(X)^I$,

$$K \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i \quad \Longrightarrow \quad \exists J \subset I,\ J \text{ fini},\ K \subset \underset{j\in J}{\cup} O_j,$$

où $\tau(X)$ désigne l'ensemble des ouverts de X.

Remarque 1.1.30 *Cette propriété, très générale (elle ne fait intervenir la distance d que via l'ensemble $\tau(X)$ des ouverts de X), porte le nom de* **propriété de Borel-Lebesgue**.

De manière équivalente, nous utiliserons le théorème suivant qui caractérise les parties compactes d'un espace métrique.

Théorème 1.1.31 *Soit (X, d) un espace métrique et K une partie non vide de X. La partie K est compacte si et seulement si de toute suite de points de K, on peut extraire une sous-suite convergeant dans K.*

Remarque 1.1.32 *Ce théorème porte le nom de* **théorème de Bolzano-Weierstrass**.

Preuve. Ce théorème a dû être vu en CDI1 (ou devrait être vu dans un cours de topologie). Si tel n'est pas le cas, on trouvera une preuve de l'équivalence entre la propriété de Borel-Lebesgue (qui définit les parties compactes, dans ce syllabus) présentée dans le cas des espaces vectoriels normés (mais qui s'adapte sans difficulté au cas des espaces métriques) dans [12] (théorème 7-5.12). Attention, dans [12], on procède "à l'inverse" de ce syllabus : les parties compactes sont définies par la propriété de Bolzano-Weierstrass (et l'on montre que celle-ci est équivalente à la propriété de Borel-Lebesgue). ■

Exercice 1.1.33 *Soit (X, d) un espace métrique, $z \in X$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X qui converge vers z. On note*

$$K = \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\{z_n\}\right) \cup \{z\}.$$

Montrer que K est une partie compacte de X.

Propriété 1.1.34 *Soit (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques. Pour tout $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (X \times Y)^2$, posons*

$$d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

L'ensemble $(X \times Y, d_3)$ est un espace métrique. Si $K_1 \subset X$ est un compact et $K_2 \subset Y$ est également un compact, alors $K_1 \times K_2$ est un compact de $X \times Y$.

Preuve. Exercice. ■

Remarque 1.1.35 *On peut évidemment généraliser cette propriété 1.1.34 à un produit fini de parties compactes dans un produit fini d'espaces métriques*[1]*.*

Les parties compactes d'un espace métrique sont toujours fermées et bornées.

Propriété 1.1.36 *Soit (X, d) un espace métrique et K une partie de X. Si K est compacte, alors K est fermée et bornée.*

Preuve. Exercice ■

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on a une forme de réciproque :

Propriété 1.1.37 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On le munit de la topologie induite par la norme. Soit K une partie non vide de E. La partie K est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Preuve. Ce théorème a dû être vu en CDI1. Si tel n'est pas le cas, on peut en trouver une preuve dans [12] (corollaire 7-6.4). ■

Remarque 1.1.38 *En particulier, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les boules fermées sont compactes.*

Définition 1.1.39 *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est* **localement compact** *lorsque tout point x admet un voisinage compact.*

Propriété 1.1.40 *Soit (X, d) un espace métrique. L'espace X est localement compact si et seulement si tout point de X admet une base de voisinages compacts, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout voisinage V de tout point x de X, il existe un voisinage K compact de x, tel que $K \subset V$.*

Preuve. Raisonnons par double implication. Dans le sens direct, supposons que X est localement compact. Soit $x \in X$ et V un voisinage de x. Puisque V est un voisinage de x, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r[\subset V$. Puisque X est localement compact, il existe un voisinage compact $\tilde{K}$ de x. Ainsi, l'ensemble $K = \tilde{K} \cap B(x, r/2]$ est une partie compacte (c'est l'intersection d'un fermé et d'un compact) de X. De plus, elle contient $\tilde{K} \cap B(x, r/2[$, qui est un voisinage de x comme intersection de 2 voisinages de x. C'est donc elle-même un voisinage. En outre, on a $K \subset B(x, r[\subset V$. On a finalement montré que, quel que soit $x \in X$ et quel que soit le voisinage V de x, il existe un voisinage K de x inclus dans V. D'où l'implication directe.
Dans le sens réciproque, supposons que X possède la propriété qu'en tout point x de X et quel que soit le voisinage V de x, il existe un voisinage compact K de x tel que $K \subset V$. Fixons $x \in X$. Alors $B(x, 1[$ est un voisinage de x. En particulier, il existe un voisinage compact $K \subset B(x, 1[$ de x. On en déduit que x admet un voisinage compact. Ceci valant quel que soit $x \in X$, on en déduit que X est localement compact. ■

1. Il existe un théorème bien plus général, dû à Andreï Nikolaïevitch Tychonov, qui affirme qu'un produit quelconque de compacts est toujouts compact dans un produit d'espaces topologiques (pour une certaine topologie naturelle sur le produit). Sa démonstration repose sur l'axiome du choix (ou sur le lemme de Zorn). Ce théorème dépasse de loin le cadre de ce syllabus et nous ne l'utiliserons de toute façon pas. Nous renvoyons par exemple au théorème III.2 de [9] pour un énoncé et une preuve.

Remarque 1.1.41 *Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, et $\mathbb{C}^d$, munis de leurs topologies d'espaces métriques usuelles, sont localement compacts. De même, tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact, en utilisant par exemple la propriété 1.1.37.*

Définition 1.1.42 *Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$ une partie de X. On appelle* **ouvert relatif de** *Y (sous entendu relatif à la topologie de X) toute partie de Y de la forme $O \cap Y$ où O est un ouvert de X. L'ensemble de ces ouverts relatifs de Y forme une topologie sur Y, appelée* **topologie induite sur Y** *(sous-entendu induite par celle de X). C'est exactement la topologie sur Y que l'on obtient en considérant (Y, d) comme un espace métrique.*

Exemple 1.1.43 *Prenant $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie de la distance usuelle, et $Y = [0, 1] \subset X$, les parties $[0, 1]$, $[0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ sont des ouverts relatifs de Y. Cependant, $[0, 1]$ et $[0, \frac{1}{2}[$ ne sont pas des ouverts de X.*

Exercice 1.1.44 *Soit (X, d) un espace métrique, K une partie compacte de X et F une partie fermée non vide de X. On suppose que $F \cap K = \emptyset$.*

1. *Justifier que la fonction $x \mapsto d(x, F)$ est continue sur X (On pourra utiliser la propriété 1.1.8).*
2. *Montrer que*
$$\forall x \in X, \qquad \Big(d(x, F) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in F\Big).$$
3. *Justifier que la fonction $x \mapsto d(x, F)$ est bornée et atteint ses bornes sur K.*
4. *Justifier que le minimum de cette fonction sur K est strictement positif.*
5. *En déduire que*
$$d(K, F) := \inf\{d(k, f) \mid (k, f) \in K \times F\},$$
est strictement positif.

1.1.4 Suites de Cauchy

Dans cette section, (X, d) désigne un espace métrique.

Définition 1.1.45 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est dite* **de Cauchy** *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N, \qquad d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1.2}$$

On dit également que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le **critère de Cauchy**.

L'interprétation de la propriété de Cauchy (1.2) est la suivante : à partir d'un certain rang, deux termes quelconques de la suite sont toujours arbitrairement proches au sens de la distance d.

Les suites convergentes de (X, d) sont de Cauchy, comme on va le voir dans la propriété suivante.

Propriété 1.1.46 *Si $(x_n)_{n\in N} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors c'est une suite de Cauchy dans (X, d).*

Preuve. Notons $x \in X$ la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence de la suite vers x, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Par suite, pour $n, m \geq N$, on a par inégalité triangulaire

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d). ■

Nous verrons à l'exemple 1.1.62 que la réciproque est fausse en général : une suite de Cauchy dans un espace métrique n'est pas nécessairement convergente. Ceci motive la définition suivante :

Définition 1.1.47 *On appelle espace* **complet** *tout espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.*

Lorsque X est un espace vectoriel normé, on adopte parfois le vocabulaire suivant :

Définition 1.1.48 *On appelle* **espace de Banach** *tout espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire tout espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge.*

Remarque 1.1.49 *Dans un espace métrique complet, une suite est donc convergente si et seulement si elle est de Cauchy. L'intérêt de la propriété de Cauchy* (1.2) *est qu'elle fournit alors un critère de convergence de suite dans lequel la limite éventuelle n'intervient pas.*

Propriété 1.1.50 *Les espaces suivants sont des espaces de Banach :*
- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$,
- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$,
- $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_p)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$,
- $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_p)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Preuve. Ce théorème a dû être vu en CDI1. Si tel n'est pas le cas, on peut trouver une preuve dans les théorèmes 6-1.17, 6-5.6 (en ajoutant "fini" après "produit" dans les hypothèses) et le corollaire 6-5.7 de [12]. Noter que la preuve repose fondamentalement sur la propriété de la borne supérieure pour les nombres réels : si $X \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément. C'est, par définition la borne supérieure de X. ■

1.1.5 Continuité

Définition 1.1.51 *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, soit* f *une fonction de* X *dans* Y *et* a *un point de* X. *On dit que* **la fonction** f **est continue en** a *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X, \qquad (d_X(x, a) < \eta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)\,.$$

Définition 1.1.52 *On dit que* f *est* **continue sur** $\tilde{X} \subset X$ *lorsque* f *est continue en tout point* $a \in \tilde{X}$.

Rappelons la propriété suivante, qui peut servir de définition de la continuité dans des espaces (topologiques) plus généraux que les espaces métriques (mais ceci dépasse le cours de CDI II).

Propriété 1.1.53 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y. La fonction f est continue sur X si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.*

Preuve. Ce théorème a dû être vu en CDI1. Si tel n'est pas le cas, on peut trouver une preuve dans [12] (théorème 7-1.17) présentée *a priori* dans le cas (de parties) d'espaces normés (mais elle est en fait ici identique dans le cas d'espaces métriques). ■

Nous utiliserons régulièrement la propriété suivante, qui caractérise la continuité locale d'une application entre espaces métriques. Puisqu'elle utilise des suites, elle est appelé **critère séquentiel de continuité**.

Propriété 1.1.54 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y et a un point de X. La fonction f est continue en a si et seulement si l'image par f de toute suite de points de X convergeant vers a est une suite convergeant vers $f(a)$. Autrement dit, f est continue en a si et seulement si*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \qquad \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d_X}} a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d_Y}} f(a) \right).$$

Preuve. CDI1. ■

Rappelons que l'image d'une partie compacte par une fonction continue est compacte.

Propriété 1.1.55 (image continue d'un compact) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit f une application continue de (X, d_X) dans (Y, d_Y). Pour toute partie K compacte de (X, d_X), la partie $f(K)$ est compacte dans (Y, d_Y).*

Preuve. Soit K une partie compacte de (X, d_X). Par définition (voir la définition 1.1.29), la partie $K \subset X$ est non vide. Par suite, puisque f est une application de X dans Y, on a $f(K) \neq \emptyset$. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de (Y, d_Y) qui recouvre $f(K)$, c'est-à-dire telle que

$$f(K) \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i.$$

Ceci implique

$$K \subset \underset{i\in I}{\cup} f^{-1}(O_i).$$

Puisque f est continue de (X, d_X) dans (Y, d_Y) et puisque chaque O_i est un ouvert de (Y, d_Y), la propriété 1.1.53 assure que chaque $f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de (X, d_X). Ainsi, $\underset{i\in I}{\cup} f^{-1}(O_i)$ est un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compacte, il existe (définition 1.1.29) $J \subset I$ fini tel que

$$K \subset \underset{j\in J}{\cup} f^{-1}(O_j).$$

Ceci implique

$$f(K) \subset \underset{j\in J}{\cup} O_j.$$

Ainsi, on a extrait un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert initial de $f(K)$. Ceci valant pour tout recouvrement ouvert de $f(K)$, il vient que $f(K)$ est compacte dans (Y, d_Y). ■

Exercice 1.1.56 *Proposer une preuve de la propriété 1.1.55 en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass (théorème 1.1.31) plutôt que la propriété de Borel-Lebesgue comme on l'a fait ci-dessus.*

Exercice 1.1.57 *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En utilisant la propriété 1.1.55, montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes. On retrouve ainsi le théorème des bornes atteintes vu en CDI1.*

Rappelons la définition des fonctions lipschitziennes entre espaces métriques et rappelons que de telles fonctions sont des exemples de fonctions continues.

Définition 1.1.58 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y. On dit que* **la fonction f est lipschitzienne de X dans Y** *lorsque*

$$\exists L \geq 0,\ \forall x, y \in X, \qquad d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x,y).$$

Le nombre L est alors appelé **constante de Lispchtiz** *pour f.*

Remarque 1.1.59 *Une constante de Lipschitz n'est pas unique en général : si f est une fonction Lipschitzienne de constante L, alors pour tout $k \geq L$, f est lipschitzienne de constante k. Remarquer que, lorsque $X \neq \emptyset$, la fonction f est lipschitzienne de constante 0 si et seulement si f est constante sur x.*

Propriété 1.1.60 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y. Si f est lipschitzienne de X dans Y, alors f est continue sur X.*

Preuve. Exercice, par exemple avec le critère séquentiel de continuité de la propriété 1.1.54. ■

Exemple 1.1.61 *Munissons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|$ définie à l'exemple 1.1.18. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ (avec la suite rélle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang). Pour $i \in \mathbb{N}$, posons*

$$c_i \ :\ \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k & \longmapsto & a_i \end{pmatrix}.$$

Observons que pour tout $i \in \mathbb{N}$, c_i est une application lipschitzienne de constante 1 de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, donc une application continue sur $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 1.1.62 *Nous allons montrer que l'espace $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie à l'exemple 1.1.18 n'est pas complet. Pour cela, considérons la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k,$$

et montrons que cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ mais ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$. Observons d'abord que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad \|P_n - P_m\| = \left\| \sum_{k=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \frac{1}{k!} X^k \right\| \leq \frac{1}{(\min(n,m)+1)!},$$

ce qui assure que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$. Supposons maintenant par l'absurde que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P \in \mathbb{R}[X]$, alors, par continuité sur $\mathbb{R}[X]$ des applications c_i définies à l'exemple 1.1.61, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$c_i(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} c_i(P). \tag{1.3}$$

Observons que, lorsque $n \geq i$, on a $c_i(P_n) = 1/(i!)$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_i(P_n) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{|\cdot|}} \frac{1}{i!}$. On obtient avec (1.3) que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des coefficients de P vérifie pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i = 1/(i!)$. Par suite, la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang. Donc $P \notin \mathbb{R}[X]$. Ceci est une contradiction. Par suite, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$. Or elle est de Cauchy dans cet espace. Cet espace vectoriel normé n'est donc pas complet.

Terminons par rappeler le fait que le caractère lipschitzien d'une fonction peut également être défini localement.

Définition 1.1.63 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y. On dit que* **la fonction f est localement lipschitzienne de X dans Y** *lorsque pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans X sur lequel la fonction f est, par restriction, lipschitzienne.*

Exercice 1.1.64 *Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?*

1.2 Convergences de suites de fonctions

1.2.1 Convergence simple

Dans cette section, on introduit la notion de convergence ponctuelle (aussi dit simple) d'une suite de fonctions. On verra plus tard que c'est en quelque sorte la notion “minimale” de convergence : toute autre convergence (présentée dans ce syllabus) implique la convergence simple.

Définition 1.2.1 *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans Y. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge simplement sur** *X lorsque pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (Y, d).*

Définition 1.2.2 *Avec les notations précédentes, lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X, on peut définir une fonction*

$$f \ : \ \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{pmatrix}.$$

La fonction f est alors appelée **limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur** *X.*

On notera par la suite $f_n \underset{\substack{n\to+\infty \\ X}}{\xrightarrow{\text{CVS}}} f$ lorsque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X.

Exemple 1.2.3 *Considérons $X = Y = [0,1]$ munis de la distance induite par la valeur absolue. Définissons la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \qquad f_n(x) = x^n.$$

On vérifie aisément que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction

$$f \ : \ \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.4 *Dans l'exemple 1.2.3 précédent, on a perdu la continuité par passage à la limite simple : chaque fonction f_n est continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, mais ce n'est pas le cas de la fonction f.*

Remarque 1.2.5 *La convergence simple de (f_n) vers f sur X s'écrit donc :*

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \qquad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Dans la proposition ci-dessus, l'entier N dépend donc a priori de ε et de x. Lorsque l'on peut choisir le rang N indépendamment de x, on parle de **convergence uniforme**, *comme on va le voir dans la section suivante.*

1.2.2 Convergence uniforme

On introduit maintenant la notion de convergence uniforme sur une partie pour une suite de fonctions à valeurs dans un espace métrique. C'est une notion un peu plus forte et plus subtile que la convergence simple. Elle permet cependant de conserver nombre de propriétés par passage à la limite, comme on va le voir dans la suite du cours.

Définition 1.2.6 *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions d'un ensemble X dans un espace métrique (Y,d)* **converge uniformément sur** *X vers la fonction $f : X \longrightarrow Y$ lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X, \qquad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

De manière équivalente, ceci s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \qquad \sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On notera par la suite $f_n \underset{\substack{n\to+\infty \\ X}}{\xrightarrow{\text{CVU}}} f$ lorsque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

Propriété 1.2.7 *Avec les notations précédentes,*

$$f_n \underset{\substack{n\to+\infty \\ X}}{\xrightarrow{CVU}} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \underset{\substack{n\to+\infty \\ X}}{\xrightarrow{CVS}} f.$$

Autrement dit, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, alors elle converge simplement vers la même fonction f sur X.

Preuve. Exercice (de manipulation de quantificateurs). ■

Ainsi, la convergence uniforme implique la convergence simple.

Exemple 1.2.8 *Considérons la situation où $X = Y = \mathbb{R}$, où $Y = \mathbb{R}$ est muni de la valeur absolue. Définissons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par*

$$f_n \ : \ \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction*

$$f \ : \ \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{pmatrix}.$$

En outre, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}},$$

on peut conclure que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers* f.

Le lecteur est invité à compléter les détails dans l'exemple précédent. Par ailleurs, on observe que chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la limite uniforme f est également continue sur $\mathbb{R}$. C'est en fait un fait général, comme on va le voir maintenant.

Propriété 1.2.9 *Soit* (X, d) *et* (Y, d) *deux espaces métriques*[2] *, a un point de* X*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* X *dans* Y *et* f *une fonction de* X *dans* Y*. On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est continue en* a*, et que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément convergente vers* f *sur* X*. Dans ce cas, la fonction* f *est continue en* a*.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall x \in X, \qquad d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par inégalité triangulaire, on obtient pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq \underbrace{d(f(x), f_{N_\varepsilon}(x))}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + d(f_{N_\varepsilon}(x), f_{N_\varepsilon}(a)) + \underbrace{d(f_{N_\varepsilon}(a), f(a))}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + d(f_{N_\varepsilon}(x), f_{N_\varepsilon}(a)) \end{aligned}$$

Puisque la fonction f_{N_ε} est continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ tel que $d(x, a) < \eta$, on a $d(f_{N_\varepsilon}(x), f_{N_\varepsilon}(a)) < \varepsilon/3$. On en déduit que pour $x \in X$ tel que $d(x, a) < \eta$, on a

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ tel que $d(x, a) < \eta$ on a $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Ainsi, la fonction f est continue en a. ∎

La préservation de la continuité locale par passage à la limite uniforme a pour conséquence la préservation de la continuité globale par passage à la limite uniforme :

Corollaire 1.2.10 *Soit* (X, d) *et* (Y, d) *deux espaces métriques,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* X *dans* Y *et* f *une fonction de* X *dans* Y*. On suppose que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est continue sur* X*, et que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément convergente vers* f *sur* X*. Dans ce cas, la fonction* f *est continue sur* X*.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la propriété 1.2.9 en tout point a de X. ∎

2. On note ici d la distance sur X et également d la distance sur Y car il serait difficile de les confondre dans la preuve du théorème. Cependant, il peut, dans la pratique, s'agir de deux distances différentes.

1.2.3 L'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$

Lorsque X est un ensemble, $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé, on note $\mathcal{B}(X,E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E :

$$\mathcal{B}(X,E) = \{f : X \longrightarrow E \mid \exists M > 0,\ \forall x \in X,\ \|f(x)\|_E \leq M\}\,.$$

Lorsque $X \neq \emptyset$, et $f \in \mathcal{B}(X,E)$, on pose

$$\|f\|_{\infty,X} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E.$$

Il s'agit d'un nombre réel positif ou nul.

On a alors la propriété de structure suivante sur l'ensemble des fonctions bornées de X dans E :

Propriété 1.2.11 *Lorsque $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est un espace vectoriel normé.*

Preuve. Exercice. Il s'agit de verifier d'une part que $\mathcal{B}(X,E)$ est un espace vectoriel et d'autre part que $\|\cdot\|_{\infty,X}$ définit une norme sur E. ■

Notation 2 *On notera parfois simplement $\|\cdot\|_\infty$ au lieu de $\|\cdot\|_{\infty,X}$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.*

On peut ajouter le critère suivant, qui permet de dire si $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est ou non un espace complet (*i.e.* de Banach) :

Propriété 1.2.12 *Lorsque $X \neq \emptyset$, l'espace vectoriel $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est complet si et seulement si $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.*

Preuve. Raisonnons par double implication. Le sens le plus simple est le sens direct. Supposons que $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est complet. Considérons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de E et montrons que celle-ci converge dans E. Définissons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de X dans E en posant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad f_n(x) = y_n.$$

Ces fonctions f_n sont constantes sur X. De plus,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n - f_m\|_{\infty,X} = \|y_n - y_m\|_E.$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Cet espace étant complet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc dans $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Ainsi, il existe $f \in \mathcal{B}(X,E)$ telle que $\|f_n - f\|_{\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il est facile de vérifier que f est constante sur X, égale à un certain $y \in E$. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n - f\|_{\infty,X} = \|y_n - y\|_E,$$

il vient que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Ceci prouve que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.
Réciproquement, supposons que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet, et considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy de fonctions de $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Fixons $x \in X$ et remarquons que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \|f_n - f_m\|_{\infty,X}.$$

Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$, cette inégalité assure que, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq N, \qquad \|f_n(x) - f_m(x)\|_E < \varepsilon,$$

Par conséquent, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Puisque cet espace est complet par hypothèse, il existe $f(x) \in E$ tel que

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_E} f(x).$$

Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$, elle est bornée dans cet espace. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n\|_{\infty,X} \leq M.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n(x)\|_E \leq M.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient

$$\|f(x)\|_E \leq M.$$

Ceci valant quel que soit $x \in X$, il vient que $f \in \mathcal{B}(X,E)$. Montrons maintenant que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_{\infty,X}} f$, en revenant une fois de plus au fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Fixons de nouveau $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq N,\ \forall x \in X, \qquad \|f_n(x) - f_m(x)\|_E < \varepsilon.$$

En passant à la limite sur m dans cette inégalité, il vient

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in X, \qquad \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\forall n \geq N, \qquad \|f_n - f(x)\|_{\infty,X} \leq \varepsilon,$$

Ceci montre que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_{\infty,X}} f$. Par suite, l'espace $(\mathcal{B}(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est complet. ■

Remarque 1.2.13 *Lorsque $X \neq \emptyset$ est un ensemble et E est un espace vectoriel normé, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de X dans E converge uniformément vers une fonction f de X dans E si et seulement si, à partir d'un certain rang, $f_n - f \in \mathcal{B}(X,E)$ et de plus $\|f_n - f\|_{\infty,X} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il n'est en particulier pas nécessaire que f ou certaines fonctions f_n soient elles-mêmes dans $\mathcal{B}(X,E)$ (on pourra consulter l'exemple 1.2.8).*

En adaptant la preuve du résultat précédent, on montre le critère de Cauchy uniforme :

Propriété 1.2.14 *Soit $X \neq \emptyset$ un ensemble et Y un espace de Banach. Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans Y converge uniformément sur X si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, \Big(n, p \geq N \implies (\forall x \in X,\ \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon)\Big)$$

Preuve. Dans le sens direct, il suffit d'appliquer une inégalité triangulaire en écrivant au préalable que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad f_n - f_p = (f_n - f) - (f_p - f).$$

Dans le sens réciproque, il suffit d'adapter la preuve précédente et de constater que

— par complétude de Y, la suite f_n converge simplement sur X vers une fonction $f : X \to Y$;
— la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est en fait uniforme sur X.

$\blacksquare$

Remarque 1.2.15 *Ici encore, il n'est pas nécessaire que f ou certaines fonctions f_n soient dans $\mathcal{B}(X, E)$ (voir l'exemple 1.2.8).*

1.2.4 Convergence uniforme sur les compacts

Lorsque X possède lui-même une structure métrique, on peut parler de convergence uniforme sur les compacts de X.

Définition 1.2.16 *Soit (X, d) et (Y, d) deux espaces métriques. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et f une fonction de X dans Y. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge vers f uniformément sur les compacts de** X *lorsque pour tout compact $K \subset X$, on a*

$$f_n \overset{CVU\ sur\ K}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f,$$

c'est-à-dire lorsque pour tout compact $K \subset X$,

$$\sup_{x\in K} d(f(x), f_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exemple 1.2.17 *Pour $X = Y = \mathbb{R}^+$, la suite de fonctions*

$$f_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{pmatrix},$$

converge vers la fonction exponentielle uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^+$, comme on le montre facilement à partir de la formule :

$$\forall x \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t.$$

Remarquer que la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Observons que l'on conserve sur l'exemple précédent une fois de plus la continuité par passage à la limite uniforme sur les compacts. C'est en fait général, comme nous allons le voir dans les propriétés suivantes. On distigue les énoncés comme les preuves, suivant que X est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou bien un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et suivant que l'on souhaite préserver la continuité ponctuelle ou globale par passage à la limite uniforme sur les compacts.

Propriété 1.2.18 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (Y, d) un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans Y et f une fonction de I dans Y. Soit x_0 un point de I. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de I. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue en x_0, alors la fonction f est continue en x_0.*

Preuve. Supposons dans un premier temps que x_0 n'est pas une extremité de I. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$. Par suite, le compact $K = [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ est inclus dans I. L'hypothèse assure que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur K. La proposition 1.2.9 montre alors que f est continue en x_0.
Supposons maintenant que x_0 est une extrémité de I. Il existe $\delta > 0$ tel que $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ est un compact de $\mathbb{R}$ inclus dans I. La proposition 1.2.9 permet également de conclure, puisque la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur le compact $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, que f est continue en x_0. ■

On en déduit immédiatement la propriété de préservation de la continuité globale par la convergence uniforme sur les compacts d'un intervalle de $\mathbb{R}$:

Propriété 1.2.19 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (Y, d) un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans Y et f une fonction de I dans Y. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de I, alors f est continue sur I.*

Preuve. Exercice : utiliser la propriété 1.2.18. ■

Remarque 1.2.20 *Remarquons que, lorsque $I = X$ est un invervalle de $\mathbb{R}$, il revient au même de dire qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de I dans (Y, d) converge uniformément sur les compacts de I ou qu'elle converge uniformément sur les segments de I. C'est une conséquence du fait qu'un segment est toujours compact, et que tout compact de I est inclus dans un segment de I.*

Voyons maintenant comment la continuité locale est préservée par la convergence uniforme sur les compacts d'un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

Propriété 1.2.21 *Soit X une partie ouverte d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit (Y, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et f une fonction de X dans Y. Soit x_0 un point de X. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de X. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue en x_0, alors la fonction f est continue en x_0.*

Preuve. Soit $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta[\subset X$ [3]. La partie $K = B(x_0, \delta/2]$ est non vide, fermée et bornée dans l'espace vectoriel normé de dimension finie. Elle est donc compacte dans cet espace par la propriété 1.1.37, donc compacte dans X. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur les compacts de X, il y a convergence uniforme sur K. On conclut à l'aide de la proposition 1.2.9 que f est continue en x_0. ■

On a également la propriété suivante de préservation de la continuité globale par passage à la limite uniforme sur les compacts sur un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie :

Propriété 1.2.22 *Soit X une partie ouverte d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit (Y, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans Y et f une fonction de X dans Y. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de X, alors la fonction f est continue sur X.*

Preuve. Exercice : utiliser la propriété 1.2.21. ■

3. La notation est introduite à la définition 1.1.19.

1.3 Suites de fonctions et opérations d'intégration et de dérivation

Nous allons nous placer sur un pavé X de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire un produit cartésien de d segments de $\mathbb{R}$ pour traiter la question du passage à la limite dans une intégrale [4]. Nous travaillerons ensuite sur un ouvert X de $\mathbb{R}^d$ pour traiter la question du passage à la limite dans une dérivation.

1.3.1 Passage à la limite dans une intégrale de Riemann

Théorème 1.3.1 *Soit $d \in \mathbb{N}^\star$, et $X = \Pi_{i=1}^d [a_i, b_i]$ (avec pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $a_i \leq b_i$) un pavé de $\mathbb{R}^d$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables de X dans $\mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ uniformément sur X, alors*

1. *la fonction f est Riemann-intégrable sur X.*
2. *la suite réelle $(\int_X f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
3. *$\int_X f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(x)\mathrm{d}x$.*

Preuve. Lorsqu'il existe $i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $a_i = b_i$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $a_i < b_i$. Notons $V = \Pi_{i=1}^d (b_i - a_i)$ et observons que $V > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons, par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur X, un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \qquad \|f_n - f\|_{\infty,X} \leq \frac{\varepsilon}{4V}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in X, \qquad f_{N_\varepsilon}(x) - \frac{\varepsilon}{4V} \leq f(x) \leq f_{N_\varepsilon}(x) + \frac{\varepsilon}{4V}.$$

Puisque f_{N_ε} est Riemann-intégrable sur X, il existe deux fonctions élémentaires [5] sur X, φ et ψ, telles que

$$\forall x \in X, \qquad \varphi(x) \leq f_{N_\varepsilon}(x) \leq \psi(x), \qquad \text{et} \qquad \int_X (\psi(z) - \varphi(z))\mathrm{d}z \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que les fonctions $\varphi_\varepsilon = \varphi - \varepsilon/(4V)$ et $\psi_\varepsilon = \psi + \varepsilon/(4V)$ sont élémentaires sur X, qu'elles vérifient

$$\forall x \in X, \qquad \varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x),$$

et également

$$\int_X (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x))\mathrm{d}x = \int_X (\psi(x) - \varphi(x) + 2\frac{\varepsilon}{4V})\mathrm{d}x = \int_X (\psi(x) - \varphi(x))\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que la fonction f est Riemann-intégrable sur X.
Fixons de nouveau $\varepsilon > 0$ et trouvons par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur X un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad \|f_n - f\|_{\infty,X} \leq \frac{\varepsilon}{V}.$$

On a pour $n \geq N$,

$$\left|\int_X f_n(x)\mathrm{d}x - \int_X f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leq \|f_n - f\|_{\infty,X} \int_X 1\mathrm{d}x = \|f_n - f\|_{\infty,X} V \leq \varepsilon.$$

4. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $Y = \mathbb{R}$. On a le même résultats pour $Y = \mathbb{C}$ en séparant les parties rélles et imaginaires, et avec $Y = \mathbb{R}^d$ ou encore $Y = \mathbb{C}^d$ en travaillant composante par composante.

5. C'est-à-dire qu'elles sont combinaison linéaires (d'un nombre fini) de fonctions caracteristiques de pavés inclus dans X.

Ceci assure la convergence de la suite $(\int_X f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\int_X f(x)\mathrm{d}x$ et achève la preuve. ∎

Remarque 1.3.2 *Le théorème 1.3.1 donne des conditions suffisantes pour obtenir l'intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions sur un produit de segments et la convergence de la suite des intégrales vers l'intégrale de la limite de la suite. Bien entendu, la conclusion de ce théorème peut être vérifiée sans nécessairement que les hypothèses le soient. On pourra par exemple considérer le cas* $d = 1$, $[a_1, b_1] = [0, 1]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{pmatrix},$$

pour lequel il y a convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers la fonction* f *nulle sur* $[0, 1[$ *et valant* 1 *en* 1, *qui est Riemann-intégrable sur* $[0, 1]$, *la suite des intégrales converge vers* 0 *qui est bien l'intégrale de* f. *Cependant, on n'a pas convergence uniforme sur* $[0, 1]$ *de* f_n *vers* f. *En effet,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = 1.$$

Remarque 1.3.3 *À l'inverse, il existe des situations (ne vérifiant pas toutes les hypothèses du théorème 1.3.1) dans lesquelles la conclusion du théorème est fausse. Considérons par exemple (toujours avec* $d = 1$ *et* $[a_1, b_1] = [0, 1]$*) la suite de fonctions*

$$f_n : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 4n^2x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ -4n^2x + 4n & \text{si} \quad \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix},$$

On vérifie alors la convergence simple de f_n *vers la fonction nulle. On a de plus que* f_n *est affine par morceaux sur* $[0, 1]$, *donc Riemann-intégrable sur* $[0, 1]$. *Enfin,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0, 1]$, *laquelle est Riemann-intégrable sur* $[0, 1]$. *Cependant, on vérifie que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x = 1,$$

donc la suite réelle $(\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite qui n'est pas* $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque 1.3.4 *On peut généraliser le théorème 1.3.1 au cas des fonctions à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *en séparant les parties réelles et imaginaires, ainsi que dans les espaces* $\mathbb{R}^d$ *et* $\mathbb{C}^d$ *pour* $d \geq 2$ *en travaillant composante par composante.*

1.3.2 Passage à la limite dans une suite de fonctions de classe C^1

On travaille dans cette section avec X un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ ou intervalle I de $\mathbb{R}$ (qui n'est pas nécessairement ouvert), à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe C^1 sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, convergeant au moins simplement vers une fonction f sur X et l'on va donner des conditions suffisantes pour assurer que f est également de classe C^1 sur X et l'on a

$$\forall x \in X, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) \tag{1.4}$$

Commençons par considérer les deux exemples suivants :

— La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad f_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(n^2 x)}{n} \end{pmatrix},$$

est une suite de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On observe que la suite $(f_n'(0))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ des dérivées de f_n en 0 diverge, rendant impossible un résultat de type (1.4). Ainsi, la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sur X n'est pas une condition suffisante car la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^\star}$ peut diverger.

— La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad f_n : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^n}{n} \end{pmatrix},$$

est une suite de fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$. On observe que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^\star}$ des dérivées de f_n converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction caractéristique du singleton $\{1\}$, rendant impossible un résultat de type (1.4) car

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)\right)(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n\right)\right)(1) = 1 \tag{1.5}$$

Ainsi, la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sur X et la convergence simple de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^\star}$ des dérivées de f_n sur X n'est pas non plus une condition suffisante pour assurer un résultat de type (1.4).

Donnons maintenant une condition suffisante.

Théorème 1.3.5 *Fixons $d \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non-vide et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons que*

— *La suite f_n converge simplement sur Ω ;*

— *Pour tout $k \in \{1,\ldots,d\}$, la suite $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine fonction g_k, uniformément sur les compacts de Ω ;*

alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers une certaine fonction f. De plus, la fonction f est de classe C^1 sur Ω et l'on a

$$\forall k \in \{1,\ldots,d\},\ \forall x \in \Omega, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = g_k(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \{1,\ldots,d\},\ \forall x \in \Omega, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)\right)(x) = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)\right)(x).$$

Preuve. Pour montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, nous allons montrer qu'elle admet en tout point de Ω des dérivées partielles par rapport à chacune des d variables, et que chacune de ces dérivées partielles est une application continue sur Ω. Nous montrerons ensuite que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur les compacts de Ω.

Le caractère C^1 des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que les fonctions $(\frac{\partial}{\partial x_k} f_n)_{1\le k\le d, n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur Ω. La convergence uniforme sur les compacts de Ω de ces dernières implique la continuité des

fonctions $(g_k)_{1\le k\le d}$ par la propriètè 1.2.21. Notons f la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur Ω.
Notons $(e_1,\ldots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $x_0\in\Omega$. Puisque Ω est ouvert, il existe $\delta>0$ tel que $B(x_0,\delta[$ est inclus dans Ω. Remarquons que $B(x_0,\delta/2]$ est un compact de Ω. Écrivons que pour tout $h\in[-\delta/2,\delta/2]$, $i\in\{1,\ldots,d\}$,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad f_n(x_0+he_i)=f_n(x_0)+\int_0^h\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x_0+se_i)\mathrm{d}s.$$

Par convergence simple de f_n vers f sur Ω, et par convergence uniforme de $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ vers g_i sur le compact $B(x_0,\delta/2]$, en utilisant le théorème 1.3.1, on obtient en passant à la limite dans l'identité précédente, pour $h\in[-\delta/2,\delta/2]$, $i\in\{1,\ldots,d\}$,

$$f(x_0+he_i)=f(x_0)+\int_0^h g_i(x_0+se_i)\mathrm{d}s.$$

La continuité des g_i en x_0 assure que f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en x_0 et l'on a

$$\forall i\in\{1,\ldots,d\},\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=g_i(x_0).$$

Ceci valant pour tout $x_0\in\Omega$, et les fonctions g_i étant continues sur Ω, il vient que f est de classe C^1 sur Ω et pour tout i, $g_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans Ω.
Il reste à montrer que la convergence de f_n vers f est uniforme sur les compacts de Ω. Soit K un compact de Ω. Puisque Ω est ouvert, pour tout $a\in K$, il existe $r_a>0$ tel que $B(a,r_a[\subset\Omega$. Ainsi, on a

$$K\subset\cup_{a\in K}B(a,r_a/2[.$$

Puisque K est compact, on peut par la propriété de Borel-Lebesgue (définition 1.1.29) extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert ci-dessus : il existe $p\in\mathbb{N}^\star$ et $a_1,\ldots,a_p\in K$ tels que

$$K\subset\cup_{k\in\{1,\ldots,p\}}B(a_k,r_{a_k}/2].\tag{1.6}$$

Observons que pour tout $a\in K$, $B(a,r_a/2]\subset B(a,r_a[\subset\Omega$. Posant $\tilde{K}=\cup_{k\in\{1,\ldots,p\}}B(a_k,r_{a_k}/2]$, on obtient que

$$K\subset\tilde{K}\subset\Omega,$$

et par ailleurs $\tilde{K}$ est compact comme réunion finie de compacts. Fixons $\varepsilon>0$. Par convergence simple de f_n vers f aux points $(a_k)_{1\le k\le p}$, on a, puisque ceux-ci sont en nombre fini,

$$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\ge N,\ \forall k\in\{1,\ldots,p\},\qquad |f_n(a_k)-f(a_k)|\le\varepsilon.$$

Soit $x\in K$. Par la propriété de sous-recouvrement fini (1.6) de K, il existe $k\in\{1,\ldots,p\}$ tel que $x\in B(a_k,r_{a_k}/2]$. Écrivons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$f_n(x)=f_n(a_k)+\int_0^1(x-a_k).(\nabla f_n(a_k+t(x-a_k)))\mathrm{d}t,$$

et également

$$f(x)=f(a_k)+\int_0^1(x-a_k).(\nabla f(a_k+t(x-a_k)))\mathrm{d}t,$$

car les fonctions f_n et f sont de classe C^1 sur Ω. Par soustraction, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$f_n(x)-f(x)=f_n(a_k)-f(a_k)+\int_0^1(x-a_k).(\nabla(f_n-f)(a_k+t(x-a_k)))\mathrm{d}t.$$

Par inégalité triangulaire, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a_k) - f(a_k)| + \int_0^1 |(x - a_k).(\nabla(f_n - f)(a_k + t(x - a_k)))| \mathrm{d}t.$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&|f_n(x) - f(x)| \\
&\leq \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| + \int_0^1 \|x - a_k\| \; \|\nabla(f_n - f)(a_k + t(x - a_k))\| \mathrm{d}t \\
&\leq \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| + \|x - a_k\| \; \int_0^1 \|\nabla(f_n - f)(a_k + t(x - a_k))\| \mathrm{d}t \\
&\leq \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| + \Big(\max_{1 \leq j \leq p} r_{a_j}\Big) \int_0^1 \|\nabla(f_n - f)\|_{\infty, B(a_k, r_{a_k}/2]} \mathrm{d}t \\
&\leq \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| + \Big(\max_{1 \leq j \leq p} r_{a_j}\Big) \|\nabla(f_n - f)\|_{\infty, \tilde{K}}.
\end{aligned}$$

Par convergence uniforme des dérivées premières des f_n vers celles de f sur le compact $\tilde{K}$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq M, \qquad \|\nabla(f_n - f)\|_{\infty, \tilde{K}} \leq \frac{\varepsilon}{\max_{1 \leq j \leq p} r_{a_j}}.$$

Avec ce qui précède, on a pour $n \geq \max(N, M)$,

$$\forall x \in K, \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci achève de montrer la convergence uniforme de f_n vers f sur les compacts de Ω. ■

En utilisant le théorème précédent pour l'initialisation comme pour l'hérédité, on montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^\star$ le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.6 *Soit $p \geq 1$ un entier, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω à valeurs réelles ou complexes. Supposons que*

- *la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur Ω,*
- *pour tout $q \in \{1, \ldots, p-1\}$, et $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$, la suite $(\frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $g_{i_1, \ldots, i_q}$ sur Ω,*
- *pour tout $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, d\}^p$, la suite $(\frac{\partial^p f_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction $g_{i_1, \ldots, i_p}$ uniformément sur les compacts de Ω,*

alors

- *la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω,*
- *quels que soient $q \in \{1, \ldots, p\}$, et $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$,*

$$\frac{\partial^q f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} = g_{i_1, \ldots, i_q}, \tag{1.7}$$

- *pour tout $q \in \{0, \ldots, p\}$, chaque dérivée partielle d'ordre q de f_n converge vers la dérivée partielle de f correspondante uniformément sur les compacts de Ω.*

Remarque 1.3.7 *Notons que la relation* (1.7) *s'écrit encore quels que soient $q \in \{1, \ldots, p\}$ et $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$,*

$$\frac{\partial^q}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}}.$$

Remarque 1.3.8 *Le théorème 1.3.5 et le corollaire 1.3.6 sont encore valides lorsque Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, sans qu'il soit nécessairement ouvert.*

1.4 Séries de fonctions

Lorsque Y est un espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{F}(X,Y)$ des fonctions de X dans Y est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. En ajoutant à Y une topologie d'espace normé, on peut définir en plus des notions de convergence dans $\mathcal{F}(X,Y)$ (convergence simple, convergence uniforme sur X, etc). Une des façons de tirer avantage de cette structure est d'introduire la notion de séries de fonctions, qui sont en fait des suites définies par l'accroissement entre deux termes consécutifs (qu'on appellera *terme général* de la série). Bien sûr, puisqu'une série de fonctions est une suite de fonctions, on pourra appliquer aux séries de fonctions l'ensemble des résultats du cours sur les suites de fonctions. Par ailleurs, nous allons introduire de nouveaux outils, tels que la convergence normale, le critère de Weierstrass, le critère d'Abel, qui seront propres aux séries.

Dans ce chapitre, X désigne un ensemble et Y est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.1 *Soit X un ensemble et Y un espace vectoriel. On se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et l'on appelle* **série de terme général** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans Y définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x) \end{pmatrix}.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également appelée **suite des sommes partielles** *de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

1.4.1 Retranscription des résultats sur les suites de fonctions dans le cadre des séries de fonctions

On suppose que Y est un espace vectoriel normé.

Définition 1.4.2 *On dit que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, respectivement uniformément, sur X lorsque la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, respectivement uniformément, sur X.*

Définition 1.4.3 *Lorsque la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur X, on appelle* **somme de la série** *la fonction*

$$S : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \end{pmatrix}.$$

La propriété 1.2.7 se traduit par le fait que

Propriété 1.4.4 *Si la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X, alors elle converge simplement sur X.*

Supposons que X est un espace métrique. La propriété 1.2.9 de préservation de la continuité par passage à la limite uniforme se traduit par le résultat suivant.

Propriété 1.4.5 *Soit $a \in X$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue en a et que la série de terme général u_n converge uniformément sur X. Alors la somme S de la série est continue en a.*

On en déduit la propriété globale suivante, qui est une adaptation du corollaire 1.2.10.

Propriété 1.4.6 *Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur X et que la série de terme général u_n converge uniformément sur X. Alors la somme S de la série est continue sur X.*

On peut également adapter le théorème 1.3.1 de passage à la limite dans une intégrale sur un pavé de $\mathbb{R}^d$ lorsque la convergence est uniforme sur le pavé.

Théorème 1.4.7 *Soit $d \in \mathbb{N}^\star$, et $X = \Pi_{i=1}^d [a_i, b_i]$ (avec pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $a_i \leq b_i$) un pavé de $\mathbb{R}^d$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables de X dans $\mathbb{R}$. Si la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $S : X \to \mathbb{R}$ uniformément sur X, alors*

1. *la fonction S est Riemann-intégrable sur X.*
2. *la suite réelle $(\int_X S_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
3. *$\int_X S_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X S(x)\mathrm{d}x$.*

Remarque 1.4.8 *Comme pour le théorème 1.3.1, on peut généraliser au cas où le terme général prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$ en séparant parties réelle et partie imaginaire, puis au cas où le terme général prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ pour $d \geq 2$ en travaillant composante par composante.*

Enfin, on peut retranscrire le résultat de dérivabilité pour les séries (corollaire 1.3.6) comme suit.

Théorème 1.4.9 *Soit $p \geq 1$ un entier, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω à valeurs réelles ou complexes. Supposons que*

- *la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction S sur Ω,*
- *pour tout $q \in \{1, \ldots, p-1\}$, et $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$, la série de terme général $(\frac{\partial^q u_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $S_{i_1,\ldots,i_q}$ sur Ω,*
- *pour tout $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, d\}^p$, la série de terme général $(\frac{\partial^p u_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $S_{i_1,\ldots,i_p}$ uniformément sur les compacts de Ω,*

alors

- *la fonction S est de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω,*
- *quels que soient $q \in \{1, \ldots, p\}$, et $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$,*
$$\frac{\partial^q S}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} = S_{i_1,\ldots,i_q}, \tag{1.8}$$
- *pour tout $q \in \{0, \ldots, p\}$, chaque dérivée partielle d'ordre q de la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la dérivée partielle de S correspondante uniformément sur les compacts de Ω.*

Remarque 1.4.10 *Notons que la relation* (1.8) *s'écrit encore quels que soient* $q \in \{1, \ldots, p\}$ *et* $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$,

$$\frac{\partial^q}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} \left(\lim_{n \to +\infty} S_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\partial^q S_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}}.$$

Remarque 1.4.11 *Le cas* $p = 1$ *dans le théorème 1.4.9 correspond à l'adaptation aux séries de fonctions du théorème 1.3.5.*

Remarque 1.4.12 *La remarque 1.3.8 vaut ici également : lorsque* $d = 1$, *on peut supposer que* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *ou bien que* Ω *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(pas nécessairement ouvert) et le résultat (Théorème 1.4.9) reste valide.*

1.4.2 Convergence normale d'une série de fonctions

X désigne un ensemble non vide et Y un espace vectoriel normé.

Définition 1.4.13 *On dit que la série de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge normalement sur** X *lorsque la série d'élements de* $\mathcal{B}(X, Y)$ *de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge absolument dans* $(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$, *c'est-à-dire lorsque la série de terme général positif* $(\|u_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}^+$. *Ceci s'écrit encore*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty < +\infty. \tag{1.9}$$

Remarque 1.4.14 *Avec la définition de la norme infinie sur* X, *la convergence normale exprimée par* (1.9) *s'écrit encore*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x\in X} \|u_n(x)\| < +\infty$$

Définition 1.4.15 *On dit qu'une série de fonctions de terme général* $u_n : X \mapsto Y$ **vérifie le critère de Weierstrass sur** X *s'il existe une suite réelle positive* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad \|u_n(x)\| \leq M_n,$$

et la série de terme général (réel positif) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

On vérifie aisément à l'aide des définitions ci-dessus la propriété suivante.

Propriété 1.4.16 *Une série de fonctions de terme général* $u_n : X \mapsto Y$ *converge normalement sur* X *si et seulement si elle vérifie le critère de Weierstrass sur* X.

Lorsque $(Y, \|\cdot\|)$ est complet, la convergence normale implique la convergence uniforme.

Propriété 1.4.17 *Supposons que l'espace* $(Y, \|\cdot\|)$ *est complet. Si la série de fonctions de terme général* $u_n : X \mapsto Y$ *converge normalement sur* X, *alors elle converge uniformément sur* X.

Preuve. La convergence normale de la série de terme général u_n est la convergence absolue dans l'espace $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Puisque $(Y, \|\cdot\|)$ est complet, l'espace $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est complet par la propriété 1.2.12. Dans un espace complet, la convergence absolue implique la convergence simple, donc la série de terme général u_n converge simplement dans $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Cette convergence simple est exactement la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général u_n. ∎

Remarque 1.4.18 *On retiendra, pour les séries de fonctions de $X \neq \emptyset$ à valeurs dans un Banach Y, que*

$$\text{CVN sur } X \quad \Longrightarrow \quad \text{CVU sur } X \quad \Longrightarrow \quad \text{CVS sur } X,$$

et les implications réciproques sont fausses en général.

En effet, on sait déjà que la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme (voir l'exemple 1.2.3 sur les suites de fonctions). Donnons un exemple de série de fonctions convergeant uniformément sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais ne convergeant pas normalement sur $[0,1]$. Considérons pour cela la série de terme général $u_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ si } x \in [1/2^{n+1}, 1/2^n[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right).$$

Observons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|u_n\|_\infty = \frac{1}{n+1},$$

de sorte que la série de terme général u_n ne converge pas normalement sur $[0,1]$. Cependant, on a

$$\forall m > n \geq 0, \qquad \|\sum_{k=0}^{m} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\|_\infty = \|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\|_\infty = \frac{1}{n+2},$$

de sorte que la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est de Cauchy dans $(\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, donc elle converge uniformément sur $[0,1]$ par la propriété 1.2.12.

Remarquons enfin que, pour étudier une suite de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet, il peut parfois être utile de penser à étudier la série telescopique associée.

Définition 1.4.19 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un ensemble $X \neq \emptyset$ à valeurs dans un espace vectoriel Y. On appelle* **série téléscopique associée à la suite** *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de terme général $(f_{n+1} - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

On a alors, par exemple, la propriété suivante.

Propriété 1.4.20 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un ensemble $X \neq \emptyset$ à valeurs dans un espace de Banach Y. Supposons qu'il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X, \qquad \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq M_n$$

et la série de terme général $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X.

Preuve. Il suffit d'appliquer le critère de Weierstrass (propriétés 1.4.16 et 1.4.17) à la série téléscopique associée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad \sum_{k=0}^{n}(f_{k+1}(x) - f_k(x)) = f_{n+1}(x) - f_0(x). \tag{1.10}$$

■

Remarque 1.4.21 *C'est sans doute en observant l'identité* (1.10) *que l'on comprend le mieux le terme "téléscopique" choisi pour nommer la série de terme général* $(f_{n+1} - f_n)$.

1.4.3 Le critère d'Abel

Nous allons faire un rappel concernant le critère d'Abel sur les *séries* à valeurs dans un espace de Banach avant de voir comment celui-ci s'étend aux *séries de fonctions* à valeurs dans un espace de Banach. Juste avant cela, exprimons quelle peut être l'utilité du critère d'Abel dans chacun de ces deux cas. Pour les séries à valeurs dans un Banach, le critère d'Abel est une condition suffisante pour avoir de la convergence en montrant que les sommes partielles sont de Cauchy, notamment dans des cas où la convergence n'est pas absolue, et sans pour autant faire apparaître effectivement la somme de la série. Pour les séries de fonctions à valeurs dans un Banach, le critère d'Abel sera une condition suffisante pour avoir de la convergence uniforme en montrant que les sommes partielles sont uniformément de Cauchy, notamment dans des cas où la convergence n'est pas normale, et sans pour autant faire intervenir explicitement la somme de la série.

Propriété 1.4.22 (critère d'Abel pour la convergence des séries) *Soit Y un espace de Banach. Considérons une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de Y qui est le terme général d'une série dont les sommes partielles sont bornées :*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\| \sum_{k=0}^{n} g_k \right\| \leq M.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, décroissante et tendant vers 0*. Alors la série de terme général $f_n g_n$ converge dans Y.*

Preuve. Notons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_k \qquad \text{et} \qquad G_n = \sum_{k=0}^{n} g_k.$$

Puisque Y est complet, il suffit de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y. Pour cela, effectuons une transformation d'Abel sur la différence entre deux sommes partielles de cette série :

pour $n, p \in \mathbb{N}^\star$, écrivons

$$\begin{aligned}
S_{n+p} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k (G_k - G_{k-1}) \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_{k-1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} f_{k+1} G_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} f_k G_k + f_{n+p} G_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} f_{k+1} G_k - f_{n+1} G_n,
\end{aligned}$$

pour finalement obtenir que

$$S_{n+p} - S_n = f_{n+p} G_{n+p} - f_{n+1} G_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_k - f_{k+1}) G_k. \tag{1.11}$$

Par positivité et décroissance de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et par inégalité triangulaire, il vient

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq f_{n+p} \|G_{n+p}\| + f_{n+1} \|G_n\| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_k - f_{k+1}) \|G_k\|.$$

La suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant majorée par M par hypothèse, on en déduit

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq f_{n+p} M + f_{n+1} M + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_k - f_{k+1}).$$

Puisque la dernière somme est téléscopique et par décroissance de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^\star, \qquad \|S_{n+p} - S_n\| \leq M f_{n+p} + M f_{n+1} + M(f_{n+1} - f_{n+p}) \leq 2M f_{n+1}. \tag{1.12}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n \leq \varepsilon/(2M)$. On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \|S_{n+p} - S_n\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y, donc elle converge dans Y puisque Y est complet par hypothèse. ∎

Remarque 1.4.23 *L'identité* (1.11) *est appelée* **transformation d'Abel**. *Remarquons l'analogie entre cette formule et la formule d'intégration par parties pour deux fonctions G et f de classe C^1 sur un segment $[a, b]$, en notant $S = fG'$:*

$$\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \int_a^b fG'(t)\mathrm{d}t = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'G(t)\mathrm{d}t.$$

Il suffit de remplacer formellement l'opération d'intégration (de symbole $\int$) par l'opération de sommation (de symbole Σ), et de remplacer l'opération de dérivation (de symbole $'$) par l'opération de *passage à la série téléscopique associée :* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (f_{n+1}-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Il faut également faire attention aux bornes d'intégration et de sommation.*

On peut désormais énoncer un critère d'Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions à valeurs dans un Banach, directement adapté de celui rappelé ci-dessus.

Théorème 1.4.24 (critère d'Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions) *Soit* $X \neq \emptyset$ *un ensemble et* Y *un espace de Banach. On se donne une suite de fonctions* $g_n : X \to Y$ *dont les sommes partielles sont uniformément bornées sur* X *:*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad \left\| \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \right\| \leq M. \tag{1.13}$$

et une suite décroissante de fonctions réelles positives $f_n : X \to \mathbb{R}^+$ *qui converge uniformément vers la fonction nulle sur* X*. Alors la série de fonctions de terme général* $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* X*.*

Preuve. Observons que l'hypothèse (1.13) assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathcal{B}(X,Y)$. Étendant les notations de la propriété précédente, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) g_k(x) \qquad \text{et} \qquad G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Reprenant la preuve précédente jusqu'à la relation (1.12), on obtient facilement en évaluant les fonctions en $x \in X$:

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in X, \qquad \|S_{n+p}(x) - S_n(x)\| \leq 2M f_n(x).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$ et tout $x \in X$, $f_n(x) \leq \varepsilon/(2M)$. On en déduit que

$$\forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \|S_{n+p} - S_n\|_{\infty,X} \leq \varepsilon. \tag{1.14}$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X. Par la propriété 1.2.14, elle converge uniformément sur X. ■

1.4.4 Une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}$, et nulle part dérivable

Un des intérêts de pouvoir manipuler des fonctions définies comme des sommes de séries de fonctions est sans doute de pouvoir sortir de la classe des fonctions obtenues en appliquant aux fonctions usuelles (polynômes, exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, etc) un nombre fini d'opérations (combinaisons linéaires, produits, quotients, inversions, compositions, etc), afin de créer des objets dont la simple existence peut être surprenante (surtout la première fois). Nous proposons ici un exemple explicite de fonction obtenue comme la somme d'une série de fonctions qui converge sur $\mathbb{R}$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$.

Désignons par φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paire, continue et 2-périodique telle que

$$\forall x \in [0,1], \qquad \varphi(x) = x,$$

et posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x).$$

Observons que la fonction φ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, de constante 1.

Propriété 1.4.25 *La série définissant f converge normalement sur $\mathbb{R}$. Puisque le terme général est continu sur $\mathbb{R}$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ également. De plus, la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Pour montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser le critère de Weierstrass et remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left| \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x) \right| \leq \left|\frac{3}{4}\right|^k .$$

On en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}$ avec la propriété 1.2.9.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Observons que si f est dérivable en x, alors quelles que soient les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]-\infty, x]^{\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]x, +\infty[^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x, on a quand n tend vers $+\infty$,

$$f(\beta_n) = f(x) + (\beta_n - x) f'(x) + o((\beta_n - x))$$

et de même

$$f(\alpha_n) = f(x) + (\alpha_n - x) f'(x) + o((x - \alpha_n)).$$

Par soustraction, il vient en remarquant que tout terme négligeable devant $(\beta_n - x)$ ou $(x - \alpha_n)$ l'est devant $(\beta_n - \alpha_n)$,

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = (\beta_n - \alpha_n) f'(x) + o((\beta_n - \alpha_n)).$$

On en déduit que

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(x).$$

Afin de montrer que f n'est pas dérivable en x, nous allons construire deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, c'est-à-dire tendant vers x par valeurs respectivement inférieures et strictement supérieures, convergeant vers x, mais telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right| \geq \frac{3^n}{2}. \tag{1.15}$$

Fixons donc $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, désignons par p la partie entière de $4^n x$: c'est le seul élément de $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$p \leq 4^n x < p + 1.$$

Posons maintenant

$$\alpha_n = 4^{-n} p \qquad \text{et} \qquad \beta_n = 4^{-n}(p+1),$$

de sorte que

$$\alpha_n \leq x < \beta_n,$$

et $\beta_n - \alpha_n = 4^{-n}$. On en déduit que

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \qquad \text{et} \qquad \beta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivons

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\varphi(4^{k-n}(p+1)) - \varphi(4^{k-n} p) \right).$$

Observons que, par 2-périodicité de φ, les termes d'indice $k > n$ sont nuls dans la somme ci-dessus. Pour $k < n$, on a avec le caractère 1-lipschtizien de φ :

$$|\varphi(4^{k-n}(p+1)) - \varphi(4^{k-n}p)| \leq 4^{k-n}(p+1) - 4^{k-n} = 4^{k-n}.$$

Enfin, pour $k = n$, on a

$$|\varphi(4^{k-n}(p+1)) - \varphi(4^{k-n}p)| = 1.$$

Ainsi, par inégalité triangulaire inverse, on a

$$\begin{aligned}
|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| &\geq \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left|\varphi(4^{k-n}(p+1)) - \varphi(4^{k-n}p)\right| \\
&\geq \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k 4^{k-n} \\
&\geq \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4^n}\frac{3^n-1}{3-1} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Divisant par $\beta_n - \alpha_n = 4^{-n}$, il vient (1.15). On conclut que f n'est pas dérivable en x. ∎

1.5 Séries de puissances

Définition 1.5.1 *On appelle* **série de puissances** *(ou parfois,* **série entière***) toute série de fonctions de $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$ dans un X-espace vectoriel normé complet Y dont le terme général est de la forme*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & a_n(x-x_0)^n \end{pmatrix},$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ et $x_0 \in X$ sont donnés.

Remarque 1.5.2 *La notation $a_n(x-x_0)^n$ désigne exceptionnellement la multiplication du vecteur $a_n \in Y$ par le scalaire $(x-x_0)^n$: le scalaire est exceptionnellement placé <u>derrière</u> le vecteur. Cette notation est motivée par le fait qu'elle est naturelle dans le cas où $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1.5.1 Limites supérieures de suites réelles positives

On note $\overline{\mathbb{R}}^+$ l'ensemble $\mathbb{R}^+$ auquel on ajoute un élément noté $+\infty$. On prolonge la relation d'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}^+$ à $\overline{\mathbb{R}}^+$ en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^+, \qquad x \leq +\infty.$$

On prolonge également la relation $<$ en posant

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}^+, \qquad (x < y) \Longleftrightarrow (x \leq y \;\text{ et }\; x \neq y)\,.$$

Définition 1.5.3 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Définissons sa* **limite supérieure***. On définit tout d'abord la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{+\mathbb{N}}$ en posant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sup_{k\geq n} a_k,$$

avec la convention que α_n vaut $+\infty$ lorsque la suite $(a_k)_{k\geq n}$ n'est pas majorée, et vaut le plus petit des majorants dans $\mathbb{R}$ de la suite $(a_k)_{k\geq n}$ dans le cas contraire. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. Distinguons deux possibilités mutuellement exclusives :

— *soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = +\infty$, et dans ce cas on pose*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

— *soit[6] il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n$, $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$, et dans ce cas, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle à partir d'un certain rang, décroissante, minorée par 0. En particulier, elle converge dans $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas, on pose*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n.$$

Remarque 1.5.4 *Ce second cas est exactement le cas où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (ce qui équivaut à dire qu'elle est majorée). Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet des valeurs d'adhérence dans $\mathbb{R}^+$, et le réel $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ est la plus grande de ces valeurs d'adhérence.*

Définition 1.5.5 *Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+$, on pose*

$$\frac{1}{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha = 0, \\ \dfrac{1}{\alpha} & \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha = +\infty. \end{cases}$$

Remarque 1.5.6 *Toute suite réelle positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ et la notation $\frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} a_n}$ désigne un élément bien défini de $\overline{\mathbb{R}}^+$.*

1.5.2 Théorie du rayon

L'étude des séries de puissances est grandement facilitée par l'introduction de la notion de rayon :

Définition 1.5.7 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances. On définit un élément R de $\overline{\mathbb{R}}^+$ appelé* **rayon** *de la série de puissances en posant*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|^{1/n}}. \tag{1.16}$$

Remarque 1.5.8 *La formule* (1.16) *porte le nom de formule de Hadamard (voir la preuve de la propriété 3.6.24).*

En effet, du point de vue de la convergence simple, le rayon se caractérise (et décrit une partie du comportement de la série de puissances) comme suit :

Propriété 1.5.9 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances. Son rayon R est l'unique élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$ tel que*

6. et on vérifie dans ce cas que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont également finis, si $n \geq 1$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc réelle.

— *pour tout $x \in X$ tel que $|x - x_0| < R$, la série de terme général $a_n(x - x_0)^n$ converge absolument dans Y.*
— *pour tout $x \in X$ tel que $|x - x_0| > R$, la série de terme général $a_n(x - x_0)^n$ diverge grossièrement.*

Preuve. Vérifions que R est effectivement un élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$ ayant les deux propriétés annoncées. L'unicité d'un tel élément est laissée au lecteur.
Commençons par montrer la première propriété. Si $R = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $R > 0$. Soit $x \in X$ tel que $|x - x_0| < R$. Choisissons $R' > 0$ tel que $|x - x_0| < R' < R$, c'est-à-dire tel que

$$\frac{1}{R} < \frac{1}{R'} < \frac{1}{|x - x_0|}.$$

Puisque, par définition du rayon,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to +\infty} \|a_n\|^{1/n},$$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|a_n\|^{1/n} \leq \frac{1}{R'}.$$

On en déduit pour $n \geq N$,

$$\|a_n\| \leq \frac{1}{(R')^n},$$

puis

$$\|a_n(x - x_0)^n\| = \|a_n\||x - x_0|^n \leq \left(\frac{|x - x_0|}{R'}\right)^n.$$

Puisque

$$\frac{|x - x_0|}{R'} < 1,$$

on conclut à la convergence absolue de la série de terme général $a_n(x - x_0)^n$.
Montrons maintenant la seconde propriété. Si $R = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $R \in \mathbb{R}^+$, et considérons $x \in X$ tel que $|x - x_0| > R$. Soit $R' > 0$ tel que $R < R' < |x - x_0|$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{|x - x_0|} < \frac{1}{R'} < \frac{1}{R}.$$

Par définition du rayon, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{R'} \leq \|a_n\|^{1/n}\}$ est infini. On en déduit l'existence d'une fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^\star$, strictement croissante, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{R'} \leq \|a_{\varphi(n)}\|^{1/\varphi(n)}.$$

Par suite, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{|x - x_0|}{R'}\right)^{\varphi(n)} \leq \|a_{\varphi(n)}\||x - x_0|^{\varphi(n)} = \|a_{\varphi(n)}(x - x_0)^{\varphi(n)}\|$$

Puisque $1 < |x - x_0|/R'$, il vient que $\|a_{\varphi(n)}(x - x_0)^{\varphi(n)}\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, la série de terme général $a_n(x - x_0)^n$ diverge grossièrement. ■

Outre la convergence ponctuelle, le rayon d'une série de puissances donne des informations sur la convergence de la série en tant que série de fonctions.

Théorème 1.5.10 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$ strictement positif. Distinguons deux cas :*

— *si R est fini, alors pour tout $\varepsilon \in]0, R[$, la série de fonctions de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur $B(x_0, R-\varepsilon]$.*

— *si R est infini, alors pour tout $R_0 \in \mathbb{R}_+^\star$, la série de fonctions de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur $B(x_0, R_0]$.*

Preuve. Distinguons les deux cas. Supposons dans un premier temps que R est (strictement positif et) fini. Soit $\varepsilon \in]0, R[$. Observons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B(x_0, R-\varepsilon], \qquad \|a_n(x-x_0)^n\|_Y \leq \|a_n\|_Y (R-\varepsilon)^n. \tag{1.17}$$

Par définition du rayon, celui de la série de puissances de terme général $\|a_n\|_Y x^n$ est également R. D'après la propriété 1.5.9 appliquée à cette dernière série, la série numérique de terme général $\|a_n\|_Y (R-\varepsilon)^n$ converge. Par le critère de Weierstrass, avec l'inégalité (1.17), on conclut à la convergence normale de la série de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $B(x_0, R-\varepsilon]$.
Supposons maintenant que $R = +\infty$. Soit $R_0 > 0$ un nombre réel. Comme précédemment, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B(x_0, R_0], \qquad \|a_n(x-x_0)^n\|_Y \leq \|a_n\|_Y R_0^n.$$

Le rayon de la série de puissances de terme général $\|a_n\|_Y x^n$ est R, donc la série numérique de terme général $\|a_n\|_Y R_0^n$ converge. Le critère de Weierstrass assure finalement que la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur $B(x_0, R_0]$. ∎

On peut étendre la définition 1.1.19 en posant

$$\forall x_0 \in X, \qquad B(x_0, +\infty[= X.$$

Le corollaire suivant reformule simplement le théorème ci-dessus.

Corollaire 1.5.11 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$ strictement positif. La série de fonctions de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur les compacts de $B(x_0, R[$.*

Preuve. Dans le cas où R est fini, si K est un compact de $B(x_0, R[$, alors il existe $\varepsilon \in]0, R[$ tel que $K \subset B(x_0, R-\varepsilon]$. La convergence normale de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $B(x_0, R-\varepsilon]$ assurée par le théorème 1.5.10 implique la convergence normale de cette même série de puissances sur K.
Dans le cas où $R = +\infty$, si K est un compact de $B(x_0, R[= X$, alors il existe $R_0 > 0$ tel que $K \subset B(x_0, R_0]$. La convergence normale de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $B(x, R_0]$ assurée par le théorème 1.5.10 implique la convergence normale de cette même série de puissances sur K. ∎

Définition 1.5.12 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'un série de puissances. Notons $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$ son rayon. Lorsque $R > 0$, on appelle* **disque ouvert de convergence** *de la série de puissances l'ensemble $B(x_0, R[$.*

Remarque 1.5.13 *Le corollaire 1.5.11 signifie donc qu'une série de puissances de rayon $R > 0$ converge normalement (donc uniformément, car $(Y, \|\cdot\|)$ est complet et l'on peut appliquer la proposition 1.4.17) sur les compacts de son disque ouvert de convergence*

Une conséquence importante de ce fait est la continuité de la somme d'une série de puissances sur son disque ouvert de convergence.

Corollaire 1.5.14 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon $R > 0$. La somme S de cette série est définie et continue sur le disque ouvert de convergence de la série de puissances.*

Preuve. Par la propriété 1.5.9, la somme S est bien définie sur $B(x_0, R[$. De plus, la convergence de la série de puissances est uniforme sur les compacts de $B(x_0, R[$ par le corollaire 1.5.11. Puisque $B(x_0, R[$ est un ouvert de X et puisque X est un X-espace vectoriel de dimension finie (égale à 1), on peut appliquer la proposition 1.2.21 pour conclure que S est continue sur $B(x_0, R[$. ■

Remarque 1.5.15 *Nous verrons que, lorsque $R > 0$, la somme S est en fait bien plus régulière sur son disque ouvert de convergence : lorsque $X = \mathbb{R}$, elle est de classe C^∞ sur $B(x_0, R[=]x_0 - R, x_0+R[$, comme nous le verrons au corollaire 1.5.25 ; lorsque $X = \mathbb{C}$, elle est en fait* **holomorphe** *(c'est-à-dire de classe C^∞ comme fonction d'une variable complexe) sur $B(x_0, R[$. Cette notion sera étudiée plus en détails au chapitre 4 (voir le théorème 4.2.1).*

Propriété 1.5.16 (Règle de D'Alembert) *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon de convergence $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$. Supposons que, à partir d'un certain rang, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas dans Y, et que la suite, définie à partir d'un certain rang, $(\|a_{n+1}\|_Y/\|a_n\|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}^+$. Dans ce cas, le rayon de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ vaut*

$$R = \frac{1}{\ell}.$$

Preuve. Plaçons-nous dans le cas où $\ell \in]0, +\infty[$. Fixons $\varepsilon \in]0, \ell[$. Puisque la suite $(\|a_{n+1}\|_Y/\|a_n\|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{\|a_{n+1}\|_Y}{\|a_n\|_Y} \leq \ell + \varepsilon.$$

Ceci implique que, pour $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$(\ell-\varepsilon)^{n-N_\varepsilon} \|a_{N_\varepsilon}\|_Y \leq \|a_n\|_Y \leq (\ell+\varepsilon)^{n-N_\varepsilon} \|a_{N_\varepsilon}\|_Y.$$

On en déduit que, pour $n \geq N_\varepsilon$,

$$(\ell-\varepsilon)^{\frac{n-N_\varepsilon}{n}} \|a_{N_\varepsilon}\|_Y^{\frac{1}{n}} \leq \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}} \leq (\ell+\varepsilon)^{\frac{n-N_\varepsilon}{n}} \|a_{N_\varepsilon}\|_Y^{\frac{1}{n}}.$$

Un passage à la limite supérieure quand n tend vers $+\infty$ et la formule (1.16) de la définition 1.5.7 assurent que

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{1}{R} \leq \ell + \varepsilon.$$

Ceci valant quel que soit $\varepsilon \in]0, \ell[$, on conclut que $\ell = 1/R$ dans ce cas.
Dans le cas $\ell = 0$, on choisit $\varepsilon > 0$ quelconque et on raisonne comme ci-dessus en ne conservant que les inégalités de droite pour conclure que $1/R \leq \varepsilon$. On en déduit que $R = +\infty$ dans ce cas.
Enfin, dans le cas $\ell = +\infty$, on fixe un $r > 0$ arbitrairement grand. Puisque la suite $(\|a_{n+1}\|_Y/\|a_n\|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell = +\infty$ dans ce cas, il existe un $N_r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_r$,

$$r \leq \frac{\|a_{n+1}\|_Y}{\|a_n\|_Y}.$$

Par suite, pour $n \geq N_r$, on a
$$\|a_{N_r}\|_Y r^{n-N_r} \leq \|a_n\|_Y.$$
On en déduit que, pour $n \geq N_r$,
$$\|a_{N_r}\|_Y^{1/n} r^{\frac{n-N_r}{n}} \leq \|a_n\|_Y^{\frac{1}{n}}.$$
Passant à la limite supérieure dans l'inégalité précédente, on obtient
$$r \leq \frac{1}{R}.$$
Ceci valant quel que soit $r > 0$, on conclut que $1/R = +\infty$, c'est-à-dire que $R = 0$ dans ce cas. ■

1.5.3 Étude au bord du disque ouvert de convergence

Présentons maintenant deux résultats qui, sous réserve d'une hypothèse de convergence au bord du disque, donnent des informations sur la convergence au sens des séries de fonctions. Le premier résultat suppose de la convergence absolue en un point du bord, le second uniquement de la convergence ponctuelle en un point du bord.

Pour $x_0 \in X$ et $R \in]0, +\infty[$, on note
$$\mathcal{C}(x_0, R) = \{x \in X \mid |x - x_0| = R\},$$
le cercle de centre x_0 et de rayon R.

Théorème 1.5.17 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon R. Supposons que $R \in]0, +\infty[$. S'il existe $y \in \mathcal{C}(x_0, R)$ tel que la série de terme général $a_n(y-x_0)^n$ converge absolument, alors la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur $B(x_0, R]$.*

Preuve. Il suffit d'observer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B(x_0, R], \qquad \|a_n(x-x_0)^n\|_Y = \|a_n\|_Y |x-x_0|^n \leq \|a_n\|_Y R^n = \|a_n(y-x_0)^n\|_Y.$$
Puisque ce dernier terme est le terme général d'une série numérique convergente par hypothèse et ne dépend pas de x, le critère de Weierstrass assure la convergence normale de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $B(x_0, R]$. ■

Théorème 1.5.18 (d'Abel radial) *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon R. Supposons que $R \in]0, +\infty[$. S'il existe $y \in \mathcal{C}(x_0, R)$ tel que la série de terme général $a_n(y-x_0)^n$ converge, alors la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge uniformément sur le segment reliant x_0 à y.*

Preuve. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $y = x_0 + Re^{i\theta}$. Paramétrons le segment reliant x_0 à y par
$$t \mapsto x(t) := (1-t)x_0 + ty = x_0 + tRe^{i\theta},$$
pour $t \in [0, 1]$. Observons qu'alors,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \qquad a_n(x(t)-x_0)^n = a_n t^n R^n e^{in\theta}.$$

L'hypothèse de convergence de la série de terme général $a_n(y-x_0)^n$ implique donc que la suite

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k e^{ik\theta},$$

converge. En particulier, cette suite est de Cauchy dans Y. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \|s_{n+p} - s_n\|_Y \leq \varepsilon.$$

Afin d'appliquer le critère de Cauchy uniforme (propriété 1.2.14), nous allons, pour $n \geq N+1$, $p \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, effectuer une transformation d'Abel sur la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{n+p} a_k (x(t)-x_0)^k &= \sum_{k=n}^{n+p} a_k (y-x_0)^k \left(\frac{x(t)-x_0}{y-x_0}\right)^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} a_k R^k e^{ik\theta} \left(\frac{tRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}}\right)^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{k-1}) t^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1} - (s_{k-1} - s_{n-1})) t^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1}) t^k - \sum_{k=n}^{n+p} (s_{k-1} - s_{n-1}) t^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1}) t^k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} (s_k - s_{n-1}) t^{k+1} \\
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} (s_k - s_{n-1})(t^k - t^{k+1}) + (s_{n+p} - s_{n-1}) t^{n+p} - \underbrace{(s_{n-1} - s_{n-1}) t^n}_{=0} \\
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} (s_k - s_{n-1})(t^k - t^{k+1}) + (s_{n+p} - s_{n-1}) t^{n+p}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x(t)-x_0)^k\right\|_Y \leq & \sum_{k=n}^{n+p-1} \|(s_k - s_{n-1})\underbrace{(t^k - t^{k+1})}_{\geq 0}\| + \|(s_{n+p}-s_{n-1})t^{n+p}\|_Y \\
\leq & \sum_{k=n}^{n+p-1} \|(s_k - s_{n-1})\|_Y (t^k - t^{k+1}) + \|(s_{n+p}-s_{n-1})\|_Y |t|^{n+p} \\
\leq & \sum_{k=n}^{n+p-1} \varepsilon(t^k - t^{k+1}) + \varepsilon t^{n+p} \\
\leq & \varepsilon \sum_{k=n}^{n+p-1} (t^k - t^{k+1}) + \varepsilon \\
\leq & \varepsilon(t^n - t^{n+p}) + \varepsilon t^{n+p} \\
\leq & \varepsilon \underbrace{t^n}_{\leq 1} \\
\leq & \varepsilon.
\end{aligned}$$

À l'aide du critère de Cauchy uniforme, ceci démontre que la série de fonctions de terme général $a_n(x(t)-x_0)^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. ■

Nous allons maintenant donner une application de ce résultat de convergence radial aux séries numériques ($Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$). Commençons par un rappel du cours de CDI1.

Définition 1.5.19 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Le* **produit de Cauchy** *de ces suites est par définition la suite de terme général*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Propriété 1.5.20 *Si les séries numériques de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent absolument dans $\mathbb{C}$, alors le produit de Cauchy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces deux séries est le terme général d'une série numérique convergente et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Preuve. Voir le cours de CDI1. ■

Le résultat de convergence radial (théorème 1.5.18) permet de démontrer le résultat plus fin suivant.

Théorème 1.5.21 *Si les séries numériques de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{C}$, et si leur produit de Cauchy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi le terme général d'une série convergente, alors on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Remarque 1.5.22 *On affaiblit l'hypothèse de convergence absolue en une simple hypothèse de convergence des séries de terme général* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, et l'on ajoute l'hypothèse de convergence de la série produit de Cauchy pour avoir finalement la même formule.*

Preuve. On définit les séries de puissances

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \text{et} \quad C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Puisque la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $R_A := R(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) \geq 1$. De même, on a $R_B := R(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) \geq 1$ et $R_C := R(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n) \geq 1$ Si $R_A > 1$ alors la fonction A est définie et continue sur $[0, R_A[$ par le corollaire 1.5.14, donc en particulier sur $[0,1]$. Sinon, $R_A = 1$ et la fonction A est également continue sur $[0,1]$ par le théorème 1.5.18. De même, on montre que les fonctions B et C sont continues sur $[0,1]$. En outre, pour tout $x \in [0,1[$, on a, avec la propriété 1.5.20 appliquée aux séries de terme général $a_n x^n$ et $b_n x^n$ dont le terme général du produit de Cauchy est $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k} = c_n x^n$ la relation

$$C(x) = A(x)B(x),$$

car ces séries numériques convergent absolument (propriété 1.5.9). Puisque les fonctions A, B et C sont continues sur $[0,1]$, on en déduit en faisant tendre x vers 1 par valeurs inférieures dans l'égalité précédente

$$C(1) = A(1)B(1),$$

qui est exactement la relation souhaitée. ■

1.5.4 Fonctions réelles-analytiques

On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace de Banach Y (par exemple $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$), x_0 un nombre réel et l'on s'intéresse à la somme de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ de la variable **réelle** x.

Définition 1.5.23 *On appelle série de puissances* **dérivée formelle** *de la série de puissances de terme général* $na_n(x-x_0)^{n-1}$*.*

Propriété 1.5.24 *Le rayon de la série de puissances de terme général* $a_n(x-x_0)^n$ *est égal à celui de sa dérivée formelle.*

Preuve. Notons $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$ le rayon de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ et R' celui de sa dérivée formelle. À l'aide de la définition 1.5.7, on a

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|_Y^{1/n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R'} = \limsup_{n\to+\infty} \|na_n\|_Y^{1/(n-1)}.$$

Il suffit alors de remarquer que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\|na_n\|_Y^{1/(n-1)} = n^{1/(n-1)} \left(\|a_n\|^{1/n}\right)^{n/(n-1)}.$$

Puisque

$$n^{1/(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

il vient que $R = R'$. ■

Corollaire 1.5.25 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Y telle que le rayon de la série de puissances de terme général $a_n z^n$ est $R > 0$. La somme S de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$. De plus*

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[, \qquad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^\star$. Pour l'initialisation, on remarque que la série dérivée formelle de terme général $na_n(x-x_0)^{n-1}$ est la dérivée terme à terme de la série de terme général $a_n(x-x_0)^n$, par définition. D'après la propriété précédente, le rayon de la série dérivée formelle est R. Par le corollaire 1.5.11, cette série de puissances converge uniformément sur les compacts de $B(x_0, R[$, donc en particulier sur les compacts de $]x_0 - R, x_o + R[$. Enfin, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on conclut que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$, et l'on a

$$\forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

L'hérédité est laissée au lecteur. ∎

Corollaire 1.5.26 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Y telle que le rayon de la série de puissances de terme général $a_n z^n$ est $R > 0$. Notons S la somme de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$. On a*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_k = \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{1.18}$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $S(x_0) = a_0$ et, de même, avec le corollaire précédent,

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \qquad S^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n \underbrace{(x_0-x_0)^{n-k}}_{=0 \text{ si } n-k\geq 1} = k!a_k.$$

∎

Remarque 1.5.27 *Ce corollaire assure une forme d'unicité des coefficients des séries de puissances : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de Y. Notons R_A et R_B les rayons respectifs des séries de terme général $a_n(x-x_0)^n$ et $b_n(x-x_0)^n$. Supposons que R_A et R_B sont strictement positifs et qu'il existe $r \in]0, \min(R_A, R_B)[$ tel que*

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n.$$

Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b_n,$$

et par suite $R_A = R_B$.

Définition 1.5.28 *Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert, et f une fonction de U dans le Banach Y. On dit que la fonction f est* **réelle-analytique sur** *U lorsque pour tout $x_0 \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est la somme d'une série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. On note $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions réelles analytiques sur U à valeurs dans le Banach Y.*

Remarque 1.5.29 *De manière équivalente, par le corollaire 1.5.26, la fonction f est réelle-analytique sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et pour tout $x_0 \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la série de Taylor de f converge simplement vers f sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.*

Propriété 1.5.30 *On a l'inclusion*

$$\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{C}^\infty(U, Y).$$

De plus, lorsque $U \neq \emptyset$ et $Y \neq \{0\}$, l'inclusion est stricte.

Preuve. L'inclusion est évidente car une fonction de $\mathcal{A}(U)$ est somme d'une série de puissances au voisinage de tout point de U, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de tout point de U. De plus, lorsque $U \neq \emptyset$, il contient un certain intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ avec $x_0 \in U$ et $\varepsilon > 0$. Sur cet intervalle, si y est un vecteur non nul de Y, la fonction

$$f : \begin{pmatrix} U & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-1/(x-x_0)} \times y & \text{si } x > x_0 \\ 0 \times y & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix},$$

est dans $\mathcal{C}^\infty(U, Y)$ (ce fait est laissé en exercice) mais pas dans $\mathcal{A}(U)$. En effet, ses dérivées successives en 0 sont identiquement nulles. Si elle était dans $\mathcal{A}(U)$, elle serait nulle sur un voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas. ■

1.6 Séries de Fourier

1.6.1 Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Définition 1.6.1 *On note $\mathcal{R}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, Riemann-intégrables sur tout segment de $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 1.6.2 *L'ensemble $\mathcal{R}_{2\pi}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. C'est également une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ pour les lois usuelles.*

Preuve. Exercice. ■

Propriété 1.6.3 *L'ensemble $\mathcal{R}_{2\pi}$ est l'espace des fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont Riemann-intégrables sur $[0, 2\pi]$.*

Preuve. Exercice. ■

Propriété 1.6.4 *On note $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques. L'ensemble $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}_{2\pi}$.*

Preuve. Exercice ■

Propriété 1.6.5 *On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques. L'ensemble $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Propriété 1.6.6 *Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note*

$$e_k : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{ikx} \end{pmatrix}.$$

La fonction e_k est un élément de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$T_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left((e_k)_{-n \leq k \leq n}\right),$$

l'espace des polynômes trigonométriques de degré au plus n. C'est un espace vectoriel de dimension finie $2n + 1$.

Preuve. Exercice. ■

Propriété 1.6.7 *Pour tout $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, et tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, a + 2\pi]$ et l'on a*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve. Exercice. ■

Définition 1.6.8 *Pour $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on note*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Propriété 1.6.9 *L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme hermitienne positive sur $\mathcal{R}_{2\pi}$, et donc par restriction sur $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En restriction à $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, c'est une forme hermitienne définie positive. Par suite, l'application*

$$\| \cdot \| : \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x} \end{pmatrix},$$

est une semi-norme sur $\mathcal{R}_{2\pi}$ comme sur $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et c'est une norme sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En particulier, $\left(\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ est un espace préhilbertien complexe.

Preuve. Exercice ■

Définition 1.6.10 *L'application $\| \cdot \|$ est appelée* **norme** *(ou* **semi-norme***) en moyenne quadratique.*

Propriété 1.6.11 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $(e_k)_{-n \leq k \leq n}$ forment une base orthonormée de T_n.*

Preuve. Exercice ■

Propriété 1.6.12 (Identité du parallélogramme) *On a en particulier*

$$\forall f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}, \qquad \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2. \tag{1.19}$$

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 1.6.13 *Si $X \neq \emptyset$ est une partie de $\mathcal{R}_{2\pi}$, on définit son orthogonal*

$$X^\perp = \{y \in \mathcal{R}_{2\pi} \mid \forall x \in X,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}_{2\pi}$.

Preuve. Exercice ∎

Définition 1.6.14 *On dit que $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ sont* **orthogonales** *lorsque $\langle f, g\rangle = 0$.*

Propriété 1.6.15 (Théorème de Pythagore) *Si $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ sont orthogonales, alors*

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \tag{1.20}$$

Preuve. Exercice. ∎

Définition 1.6.16 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On définit ses* **coefficients de Fourier (exponentiels)** $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ *par la formule*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = \langle f, e_k\rangle.$$

1.6.2 Série de Fourier associée à une fonction périodique

Propriété 1.6.17 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction*

$$d_n : \begin{pmatrix} T_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ p & \longmapsto & \|f-p\| \end{pmatrix},$$

admet un unique minimum sur T_n. Ce minimum est appelé **projeté orthogonal de f sur T_n**. *Notons le $p_n(f)$. Il est caractérisé par le fait que*

$$p_n(f) \in T_n \qquad et \qquad \forall g \in T_n, \quad \langle f - p_n(f), g\rangle = 0. \tag{1.21}$$

On a par ailleurs la formule

$$p_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k. \tag{1.22}$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \geq 0$. La fonction d_n est définie que T_n, à valeurs positives. Elle admet un unique minimum sur T_n si et seulement si d_n^2 admet un unique minimum sur T_n. C'est ce que nous allons montrer. L'ensemble T_n est non-vide et la fonction d_n^2 est positive sur cet ensemble. En particulier, elle est minorée sur cet ensemble et il existe $m_n \geq 0$ et une suite de fonctions $(t_k)_{k\geq 0}$ de T_n telle que

$$d_n^2(t_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} m_n^2 = \inf_{T_n} d_n^2. \tag{1.23}$$

Pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, en utilisant l'identité du parallélogramme (1.19) de la propriété 1.6.12, on obtient

$$\begin{aligned}
\|t_k - t_\ell\|^2 &= \|(f - t_k) - (f - t_\ell)\|^2 \\
&= 2\|f - t_k\|^2 + 2\|f - t_\ell\|^2 - \|2f - t_k - t_\ell\|^2 \\
&= 2\|f - t_k\|^2 + 2\|f - t_\ell\|^2 - 4\left\|f - \frac{t_k + t_\ell}{2}\right\|^2
\end{aligned}$$

Puisque T_n est un espace vectoriel, on a $(t_k + t_\ell)/2 \in T_n$. Par conséquent, $m_n^2 \leq \left\|f - \frac{t_k+t_\ell}{2}\right\|^2$. On en déduit que, pour $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\|t_k - t_\ell\|^2 \leq 2d_n^2(t_k) + 2d_n^2(t_\ell) - 4m_n^2. \tag{1.24}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Utilisant (1.23), il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq N_\varepsilon$, on a $2(d_n^2(t_k) - m_n^2) < \varepsilon^2/2$. Utilisant (1.24), on en déduit que pour $k, \ell \in \mathbb{N}$ avec $k \geq N_\varepsilon$ et $\ell \geq N_\varepsilon$, on a

$$\|t_k - t_\ell\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(T_n, \|\cdot\|)$. Puisque cet espace vectoriel normé est de dimension finie, il est complet. Par conséquent, la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $t^\star \in T_n$. Par continuité de la norme, ou en utilisant la majoration

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad m_n \leq \|f - t^\star\| \leq \|f - t_k\| + \|t_k - t^\star\|,$$

il vient que $d_n^2(t^\star) = m_n^2$. Ceci démontre que d_n^2 (donc d_n) admet un minimum sur T_n. Montrons que ce minimum est unique en supposant qu'on a une fonction $u \in T_n$ telle que $d_n^2(u) = m_n^2$. Dans ce cas, on a, puisque T_n est un espace vectoriel, que $(u + t^\star)/2 \in T_n$. Ceci implique que $m_n^2 \leq \left\|f - \frac{u+t^\star}{2}\right\|^2$. Utilisant de nouveau l'identité du parallélogramme (1.19), on obtient

$$\|u - t^\star\|^2 = 2\|f - u\|^2 + 2\|f - t^\star\|^2 - 4\left\|f - \frac{u + t^\star}{2}\right\|^2 \leq 2m_n^2 + 2m_n^2 - 4m_n^2.$$

En particylier $u = t^\star$ et ceci démontre l'unicité du minimiseur de d_n^2 (donc de d_n) sur T_n. Notons $p_n(f)$ ce minimiseur. Montrons qu'il vérifie (1.21). D'une part, on a $p_n(f) \in T_n$ par construction. Soit $g \in T_n$. Pour $s \in \mathbb{C}$, posons $h(s) = \|f - p_n(f) - sg\|^2$. Puisque T_n est un espace vectoriel, on a $p_n(f) + sg \in T_n$. Par conséquent, $h(s) \geq m_n^2$. Or on a

$$\forall s \in \mathbb{C}, \qquad h(s) = \|f - p_n(f)\|^2 - 2\Re\left(\overline{s}\langle f - p_n(f), g\rangle\right) + |s|^2\|g\|^2$$

En particulier, on peut prendre s de la forme $t \times \langle f - p_n(f), g\rangle$, où t est un nombre réel. Puisque $\|f - p_n(f)\|^2 = m_n^2$, il vient que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad m_n^2 - 2t\,|\langle f - p_n(f), g\rangle|^2 + |t|^2|\langle f - p_n(f), g\rangle|^2\|g\|^2 \geq m_n^2.$$

Ceci impose que le terme d'ordre 1 en t est nul (examiner le comportement du membre de gauche pour t proche de 0). En particulier, on a

$$\langle f - p_n(f), g\rangle = 0.$$

Ainsi, $p_n(f)$ vérifie bien (1.21). Montrons réciproquement que si $u \in T_n$ vérifie

$$\forall g \in T_n, \qquad \langle f - u, g\rangle = 0, \tag{1.25}$$

alors $u = p_n(f)$. Soit $u \in T_n$ vérifiant (1.25). Observons que

$$\begin{aligned}
m_n^2 &= \|f - p_n(f)\|^2 \\
&= \|(f-u) + (u - p_n(f))\|^2 \\
&= \|f-u\|^2 + 2\Re\left(\langle f-u, u-p_n(f)\rangle\right) + \|u - p_n(f)\|^2 \\
&= \|f-u\|^2 + \|u-p_n(f)\|^2,
\end{aligned}$$

car $\langle f-u, u-p_n(f)\rangle = 0$ car $u - p_n(f) \in T_n$. Ainsi, on a

$$\inf_{T_n} d_n^2 = d_n^2(u) + \|u - p_n(f)\|^2.$$

Ceci implique que $\|u - p_n(f)\|^2 = 0$, donc $u = p_n(f)$. Ainsi, la relation (1.21) caractérise bien $p_n(f)$. Enfin, montrons que $p_n(f)$ est donné par la formule (1.22). Pour cela, avec ce que l'on vient de montrer, il suffit d'observer que $p_n(f) \in T_n$ et que l'on a pour tout $g \in T_n$, $\left\langle f - \sum_{|k|\leq n}\langle f, e_k\rangle e_k, g\right\rangle = 0$, ou, de manière équivalente,

$$\forall \ell \in \{-n, \cdots, n\}, \qquad \left\langle f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k, e_\ell \right\rangle = 0.$$

Ceci est évident en utilisant la propriété 1.6.11. En effet, pour $\ell \in \{-n, \cdots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k, e_\ell \right\rangle &= \langle f, e_\ell\rangle - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle \langle e_k, e_\ell\rangle \\
&= \langle f, e_\ell\rangle - \langle f, e_\ell\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Définition 1.6.18 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On appelle* **série de Fourier associée à** f *la série de fonctions de terme général $(u_k)_{k\geq 0}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \geq 1$ par*

$$u_0(x) = \langle f, e_0\rangle \qquad \textit{et} \qquad u_k(x) = \langle f, e_{-k}\rangle\, e_{-k}(x) + \langle f, e_k\rangle\, e_k(x).$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ la somme partielle de cette série. Ainsi,

$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k(x) = p_n(f)(x).$$

Remarque 1.6.19 *Par définition, pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, la fonction $S_n(f)$ est la meilleure approximation de f par un polynôme trigonométrique de degré au plus n, en moyenne quadratique.*

Propriété 1.6.20 *Pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S_n(f)$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus n. En particulier, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique.*

Preuve. Exercice. ■

Écrivant pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ que $f = (f - p_n(f)) + p_n(f)$, on a une décomposition de f en somme d'un élément de $T_n^\perp$ et de T_n. Ceci implique que

Propriété 1.6.21 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme directe orthogonale de T_n et de $T_n^\perp$ est égale à $\mathcal{R}_{2\pi}$. Autrement dit*

$$\mathcal{R}_{2\pi} = T_n \overset{\perp}{\oplus} T_n^\perp. \tag{1.26}$$

Preuve. C'est une utilisation de la propriété 1.6.17 et de la décomposition indiquée avant la proposition. ■

Corollaire 1.6.22 *Pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\|f\|^2 = \|f - p_n(f)\|^2 + \|p_n(f)\|^2. \tag{1.27}$$

Preuve. C'est un corollaire de la décomposition (1.26) et de la relation de Pythagore (1.20). ■

Corollaire 1.6.23 (Inégalité de Bessel) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a*

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Preuve. Pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, puisque les $(e_k)_{-n\leq k\leq n}$ forment une base orthonormée de T_n (propriété 1.6.11)

$$\begin{aligned}
\|p_n(f)\|^2 &= \left\langle \sum_{|k|\leq n} c_k(f) e_k, \sum_{|\ell|\leq n} c_\ell(f) e_\ell \right\rangle \\
&= \sum_{|k|\leq n} \sum_{|\ell|\leq n} c_k(f)\overline{c_\ell(f)} \langle e_k, e_\ell\rangle \\
&= \sum_{|k|\leq n} |c_k(f)|^2 .
\end{aligned}$$

Utilisant le corollaire 1.6.22, il vient que

$$\|f\|^2 = \underbrace{\|f - p_n(f)\|^2}_{\geq 0} + \sum_{|k|\leq n} |c_k(f)|^2 .$$

Ceci démontre l'inégalité de Bessel. ■

Corollaire 1.6.24 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. La série de terme général $(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2)_{k\geq 1}$ converge. De plus, on a*

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2 \Big) \leq \|f\|^2. \tag{1.28}$$

Preuve. C'est une série à termes positifs, dont les sommes partielles sont bornées par l'inégalité de Bessel par une quantité finie qui ne dépend pas de n. Elle est donc convergente, et l'on a (1.28) ■

Corollaire 1.6.25 (Lemme de Riemann-Lebesgue) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On a*

$$c_k(f) \underset{|k|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. D'après le corollaire 1.6.24, la série de terme général $|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2$ est convergente. En particulier, son terme général tend vers 0. Ceci démontre le lemme de Riemann-Lebesgue. ■

1.6.3 Série de Fourier et dérivation

Propriété 1.6.26 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction f' (définie sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre de points fini sur chaque segment ; où on la prolonge par 0 par convention) est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc en particulier dans $\mathcal{R}_{2\pi}$, et l'on a*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f') = ikc_k(f). \tag{1.29}$$

Preuve. Soit $q \in \mathbb{N}^\star$ et $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_q = 2\pi$ une subdivision du segment $[0, 2\pi]$ adaptée à f, c'est-à-dire telle que pour tout $p \in \{0, \ldots, q-1\}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]a_p.a_{p+1}[$ et se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a_p, a_{p+1}]$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, ceci implique que pour tout $p \in \{0, \ldots, q-1\}$, la fonction f restreinte au segment $[a_p, a_{p+1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce segment. Par intégration par parties, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et $p \in \{0, \ldots, q-1\}$, puisque les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-ikx}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a_p, a_{p+1}]$,

$$\int_{a_p}^{a_{p+1}} f'(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = f\left(a_{p+1}\right)\mathrm{e}^{-ika_{p+1}} - f\left(a_p\right)\mathrm{e}^{-ika_p} - \int_{a_p}^{a_{p+1}} f(x) \times \left(-ik\mathrm{e}^{-ikx}\right)\mathrm{d}x.$$

Sommant sur p, on obtient

$$\int_{a_0}^{a_q} f'(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{q-1}\left(f\left(a_{p+1}\right)\mathrm{e}^{-ika_{p+1}} - f\left(a_p\right)\mathrm{e}^{-ika_p}\right) + ik\int_{a_0}^{a_q} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x.$$

Puisque $a_0 = 0$ et $a_q = 2\pi$, il vient puisque la somme est téléscopique,

$$\int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = f(2\pi)\mathrm{e}^{-2ki\pi} - f(0)\mathrm{e}^{-i0k} + ik\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x.$$

Puisque $\mathrm{e}^{-2ki\pi} = \mathrm{e}^{-i0k} = 1$ et puisque $f(2\pi) = f(0)$ car $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on obtient (1.29) en divisant l'égalité ci-dessus par 2π. ■

Corollaire 1.6.27 *Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ qui est de plus $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $f^{(p+1)}$ (définie sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre de points fini sur chaque segment ; où on la prolonge par 0 par convention) est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{R}_{2\pi}$, et l'on a*

$$\forall q \in \{0, \ldots, p+1\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f^{(q)}) = (ik)^q c_k(f).$$

Preuve. En exercice, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, en utilisant la propriété 1.6.26 pour l'initialisation et l'hérédité. ■

Corollaire 1.6.28 *Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ qui est de plus $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$c_k(f) \underset{|k| \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^{p+1}}\right). \tag{1.30}$$

Preuve. Par le corollaire précédent, on a pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$c_k(f) = \frac{1}{(ik)^{p+1}} c_k(f^{(p+1)}).$$

De plus, on a $c_k(f^{(p+1)}) \underset{|k|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue (propriété 1.6.25), car $f^{(p+1)} \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{R}_{2\pi}$. ■

Remarque 1.6.29 *Ce dernier corollaire indique que, plus f est régulière, plus ses coefficients de Fourier tendent vite vers 0 quand $|k|$ tend vers $+\infty$, au sens où l'on a (1.30) pour un nombre plus en plus grand des premiers entiers p.*

Corollaire 1.6.30 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soit f une telle fonction. Puisqu'elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on a par la propriété 1.6.26, pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$|c_k(f)| = \left|\frac{c_k(f')}{ik}\right| = \frac{1}{|k|} \times |c_k(f')| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\left|c_k(f')\right|^2.$$

Observons que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\left|c_{-k}(f)\mathrm{e}^{-ikx} + c_k(f)\mathrm{e}^{ikx}\right| \leq |c_{-k}(f)| + |c_k(f)|.$$

Par ailleurs, $|c_0(f)\mathrm{e}^{i0x}| = |c_0(f)|$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|c_{-k}(f)\mathrm{e}^{-ikx} + c_k(f)\mathrm{e}^{ikx}\right| \leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\left|c_{-k}(f')\right|^2 + \frac{1}{2}\left|c_k(f')\right|^2.$$

Par le corollaire 1.6.24, que l'on peut appliquer car f' est (2π-périodique et) continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de terme général $\left|c_{-k}(f')\right|^2 + \left|c_k(f')\right|^2$ converge. Puisque la série de terme général $1/k^2$ converge également, il vient que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$. ■

Nous allons voir en section 1.6.4 que la limite de la série de Fourier de f n'est autre que f dans le cas ci-dessus (théorème 1.6.40).

1.6.4 Le théorème de Dirichlet

Lemme 1.6.31 (Un autre lemme de Riemann-Lebesgue) *Soit $a < b$. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ à valeurs complexes. On a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Commençons par observer que le résultat est vrai lorsque la fonction f est l'indicatrice d'un intervalle inclus dans $[a,b]$. Par linéarité de l'intégrale, il est vrai dès que f est une fonction en escalier sur $[a,b]$. Considérons maintenant le cas général où la fonction f est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$. Supposons tout d'abord que la fonction f est à valeurs réelles. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$, il existe une fonction en escalier g sur $[a,b]$ telle que $g \leq f$ sur $[a,b]$ et $\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x < \varepsilon/2$. Puisque g est en escalier sur $[a,b]$, le raisonnement mené en début de preuve assure qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| \geq R$, on a

$$\left|\int_a^b g(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| \geq R$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x\right| &\leq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b g(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_a^b \left|(f(x)-g(x))\,\mathrm{e}^{i\lambda x}\right|\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat lorsque f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et à valeurs rélles. Maintenant, en tout généralité, si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et à valeurs complexes, on écrit $f = u + iv$ avec u et v deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)+iv(x))\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x + i\int_a^b v(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x,$$

et chacune des deux dernières intégrales tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini d'après la partie précédente de la preuve. On en déduit le résultat pour f Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ à valeurs complexes. ■

Remarque 1.6.32 *Deux différences notables dans ce lemme de Riemann-Lebesgue par rapport au lemme 1.6.25 qui porte le même nom. D'une part, la fonction f n'est plus nécessiarement la restriction d'une fonction périodique de période $(b-a)$ à un intervalle de longueur $(b-a)$. D'autre part, la variable réelle dans l'exponentielle de l'intégrande peut maintenant prendre des valeurs continues arbitrairement grandes, alors que seules des valeurs discrètes arbitrairement grandes étaient autorisées dans le lemme 1.6.25.*

Corollaire 1.6.33 *Soit $a < b$. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ à valeurs complexes. On a*

$$\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Preuve. On sépare deux fois les parties réelle et imaginaire pour déduire le résultat du lemme 1.6.31. D'une part, ce lemme 1.6.31 vaut pour les fonctions f Riemann-intégrables à valeurs réelles. Ainsi, en utilisant que

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i},$$

et en séparant parties réelles et imaginaires, on en déduit le corollaire pour les fonctions f Riemann-intégrables et à valeurs rélles. D'autre part, pour une fonction f à valeurs complexes Riemann-intégrable sur $[a,b]$, on sépare de nouveau partie réelle et partie imaginaire (qui sont toutes deux Riemann-intégrables sur $[a,b]$), et l'on applique ce que l'on vient de montrer à chaque partie pour en déduire le corollaire 1.6.33 dans sa généralité. ■

Remarque 1.6.34 *Alternativement à la preuve ci-dessus, on peut également prouver ce corollaire directement, en modifiant légèrement la preuve du lemme 1.6.31 compte tenu de la définition de l'intégrande, mais en en gardant la trame.*

Lemme 1.6.35 *Soit $a < b$ et $c \in]a, b[$. Soit g une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, qui est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a, c[$ comme sur tout segment inclus dans $]c, b]$. Si la fonction g admet une limite finie en c^- et une limite finie en c^+, alors cette fonction est Riemann-intégrable sur le segment $[a, b]$.*

Preuve. Exercice. ■

Définition 1.6.36 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le* **noyau de Dirichlet d'ordre** *n défini pour $x \in \mathbb{R}$ par*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx}.$$

Propriété 1.6.37 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction D_n est paire, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et d'intégrale égale à 2π sur une période. De plus, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z}), \qquad D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin(x/2)}. \tag{1.31}$$

Preuve. Les premiers faits énoncés sur la fonction D_n sont laissés en exercice. Montrons la formule (1.31). Observons que pour $x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$, on a $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$, de sorte que, en exploitant le caractère géométrique de la somme définissant $D_n(x)$, on a

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \mathrm{e}^{-inx} \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{2n+1}}{1 - \mathrm{e}^{ix}} \\ &= \mathrm{e}^{-inx} \frac{1 - \mathrm{e}^{i(2n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{ix}} \\ &= \mathrm{e}^{-inx} \frac{\mathrm{e}^{i(2n+1)\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}} \frac{\mathrm{e}^{-i(2n+1)\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{i(2n+1)\frac{x/2}{}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

■

Théorème 1.6.38 (de Dirichlet, version locale) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite finie à gauche et à droite en x, que l'on note respectivement $f(x^-)$ et $f(x^+)$. On suppose de plus que f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x au sens suivant : il existe $f'_g(x) \in \mathbb{C}$ et $f'_d(x) \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\frac{f(x-u) - f(x^-)}{-u} \underset{u \to 0^+}{\longrightarrow} f'_g(x) \qquad et \qquad \frac{f(x+u) - f(x^+)}{u} \underset{u \to 0^+}{\longrightarrow} f'_d(x).$$

Dans ce cas, la série de Fourier de f en x converge simplement vers $(f(x^-) + f(x^+))/2$. Autrement dit,

$$S_n(f)(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Preuve. Soit f et x vérifiant les hypothèses. Écrivons que, par définition de $S_n(f)$, on a

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{ikx}\\
&= \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}t\right)\\
&= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{ik(x-t)}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-u)D_n(u)\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\mathrm{d}u, \qquad (1.32)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la linéarité de l'intégrale pour les fonctions de $\mathcal{R}_{2\pi}$, la définition 1.6.36 du noyau de Dirichlet D_n, le théorème de changement de variable, et l'invariance de l'intégrale sur une période de la propriété 1.6.7. Par parité de la fonction D_n sur $\mathbb{R}$, on a également, en continuant le calcul précédent,

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(-u)\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)\mathrm{d}u \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque D_n est une fonction d'intégrale 2π sur tout intervalle de longueur 2π, on a également

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\right)D_n(u)\mathrm{d}u.$$

Écrivant $S_n(f)(x)$ comme la demi-somme de (1.32) et (1.33), on obtient

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x-u)-f(x^-)}{2} + \frac{f(x+u)-f(x^+)}{2}\right)D_n(u)\mathrm{d}u. \quad (1.34)$$

Nommons $g_{n,x}$ l'intégrande ci-dessus, de sorte que

$$g_{n,x} : \begin{pmatrix} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & \left(\frac{f(x-u)-f(x^-)}{2} + \frac{f(x+u)-f(x^+)}{2}\right)D_n(u) \end{pmatrix}.$$

Pour $u \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, on peut écrire en utilisant la relation (1.31) de la propriété 1.6.37, que $g_{n,x}(u) = h_x(u)\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)$, où h_x est la fonction

$$h_x : \begin{pmatrix} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x-u)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{f(x+u)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est définie sur le segment $[-\pi, \pi]$, Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Par le lemme 1.6.35, il suffit de montrer qu'elle admet une limite finie à gauche et à droite de 0 pour obtenir qu'elle est Riemann-intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Or, pour $u \in]0, \pi]$, on a, puisque f admet une dérivée à gauche en x,

$$\frac{f(x-u) - f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x-u) - f(x^-)}{(x-u) - x} \times \frac{(x-u) - x}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \to 0^+}{\longrightarrow} -f_g'(x).$$

De même, on a, puisque f admet une dérivée à droite en x,

$$\frac{f(x+u) - f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x+u) - f(x^+)}{(x+u) - x} \times \frac{(x+u) - x}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \to 0^+}{\longrightarrow} f_d'(x).$$

Ainsi,

$$h_x(u) \underset{u \to 0^+}{\longrightarrow} f_d'(x) - f_g'(x).$$

Similairement, pour $u \in [-\pi, 0[$, on peut écrire que

$$h_x(u) = \frac{f(x+u) - f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{f(x-u) - f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

On a comme précédemment, puisque f admet une dérivée à gauche en x,

$$\frac{f(x+u) - f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x+u) - f(x^+)}{(x+u) - x} \times \frac{(x+u) - x}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \to 0^-}{\longrightarrow} f_g'(x),$$

et puisque f admet une dérivée à droite en x,

$$\frac{f(x-u) - f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x-u) - f(x^-)}{(x-u) - x} \times \frac{(x-u) - x}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \to 0^-}{\longrightarrow} -f_d'(x).$$

Ceci implique que

$$h_x(u) \underset{u \to 0^-}{\longrightarrow} f_g'(x) - f_d'(x).$$

Finalement, le lemme 1.6.35 permet de conclure que h_x est une fonction Riemann-intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Puisque les fonctions $u \mapsto g_{n,x}(u)$ et $u \mapsto h_x(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)$ sont égales sur $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, elles ont même intégrale sur $[-\pi, \pi]$. Ceci implique en revenant à (1.34) que

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_{n,x}(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_x(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u.$$

Puisque h_x est Riemann-intégrable sur $[-\pi, \pi]$ d'après ce qui précède, le lemme de Riemann-Lebesgue 1.6.31 permet de conclure que cette dernière intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci achève la preuve du théorème de Dirichlet. ∎

Remarque 1.6.39 *Dans la preuve du théorème de Dirichlet, nous utilisons abondamment le fait que*

$$\frac{u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 1,$$

qui est laissé en exercice au lecteur.

Théorème 1.6.40 (de Dirichlet, version globale) *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Dans ce cas*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(f)(x) - f(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire que la série de Fourier de f converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Puisque f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le corollaire 1.6.30 assure que la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers sa limite (uniforme) g. Cette fonction g est en particulier la limite simple de $S_n(f)$. Puisque f est continue, elle admet en tout point x de $\mathbb{R}$ une limite à droite et à gauche en x, qui n'est autre que $f(x)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle admet en tout point une dérivée à droite et à gauche au sens des hypothèses du théorème 1.6.38. Elle vérifie donc toutes les hypothèses de ce théorème en tout point x de $\mathbb{R}$. Ce théorème assure que, en tout point x de $\mathbb{R}$, la suite $S_n(f)(x)$ converge vers $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = f(x)$. En particulier, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, par unicité de la limite simple, de sorte que $S_n(f)$ converge uniformément vers $g = f$ sur $\mathbb{R}$. ∎

1.6.5 Le théorème de Parseval-Plancherel

La propriété 2.1.7 et la remarque 2.1.13 permettent de montrer le résultat d'approximation suivant.

Lemme 1.6.41 *Soit f une fonction de $\mathcal{R}_{2\pi}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ telle que*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Preuve. La fonction f est dans $\mathcal{R}_{2\pi}$, donc sa restriction à $[0, 2\pi]$ est Riemann-intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$. Par la remarque 2.1.13, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ telle que

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x < \frac{2\pi\varepsilon}{1 + 2\|f\|_{\infty,[0,2\pi]}} \qquad \text{et} \qquad \|\varphi\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq \|f\|_{\infty,[0,2\pi]}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 \mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)||f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(x)| + |\varphi(x)|) |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_{\infty,[0,2\pi]} \int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_{\infty,[0,2\pi]} \frac{2\pi\varepsilon}{1 + 2\|f\|_{\infty,[0,2\pi]}} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

∎

Lemme 1.6.42 *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction continue u sur $[0, 2\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, telle que $u(0) = u(2\pi)$ et*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - u(x)|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 2\pi$ une subdivision adaptée à φ, c'est-à-dire telle que φ est constante, égale à un certain $\lambda_i \in \mathbb{C}$, sur chaque sous-intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in \{1, \cdots, p\}$. Posons $\delta_0 = \max_{1 \leq i \leq p}(a_i - a_{i-1})$. Observons que $\delta_0 > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n \geq 4/\delta_0$, définissons la fonction u_n comme suit :

— pour $x \in [a_0, a_0 + 1/n[$, on pose $u_n(x) = \varphi(0) + nx(\lambda_1 - \varphi(0))$;
— pour $x \in [a_0 + 1/n, a_1 - 1/n[$, on pose $u_n(x) = \lambda_1$;
— pour $x \in [a_i - 1/n, a_i + 1/n[$, on pose $u_n(x) = \lambda_i + \frac{n}{2}(x - a_i + 1/n)(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p-1$;
— pour $x \in [a_i + 1/n, a_{i+1} - 1/n[$, on pose $u_n(x) = \lambda_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq p-1$;
— pour $x \in [a_p - 1/n, a_p]$, on pose $u_n(x) = \lambda_p + n(x - a_p + 1/n)(\varphi(0) - \lambda_p)$.

Observons que u_n est une fonction continue sur $[0, 2\pi]$, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$, car elle est continue et affine par morceaux sur ce segment. De plus, elle vérifie $u_n(0) = \varphi(0) = u_n(2\pi)$. De plus, on a $\|u_n\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq \|\varphi\|_{\infty,[0,2\pi]}$. Estimons maintenant pour tout $n \geq 4/\delta_0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{p} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{a_{k-1}}^{a_{k-1}+1/n} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{a_k - 1/n}^{a_k} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{a_{k-1}}^{a_{k-1}+1/n} \left(|\varphi(x)| + |u_n(x)|\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{a_k - 1/n}^{a_k} \left(|\varphi(x)| + |u_n(x)|\right)^2 \mathrm{d}x \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{a_{k-1}}^{a_{k-1}+1/n} 4\|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]} \mathrm{d}x + \int_{a_k - 1/n}^{a_k} 4\|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]} \mathrm{d}x \right) \\
&\leq \frac{8p}{n} \|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]}.
\end{aligned}$$

Choisissons maintenant $n \in \mathbb{N}^\star$ de sorte que $n \geq 4/\delta_0$ et $4p\|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]}/(n\pi) < \varepsilon$. Pour un tel n, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{4p}{n\pi} \|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]} < \varepsilon,$$

de sorte que la fonction $u = u_n$ vérifie la conclusion du lemme. ■

Avec les deux lemmes d'approximation précédents, on peut démontrer le théorème suivant, qui précise que l'inégalité de Bessel du corollaire 1.6.23 est en fait une égalité.

Théorème 1.6.43 (Identité de Parseval-Plancherel pour les séries de Fourier) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On a l'identité*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 .$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On a déjà justifié lors de la preuve de l'inégalité de Bessel (corollaire 1.6.23), que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \sum_{|k| \leq n} |c_k(f)|^2 .$$

Montrer le théorème revient donc à montrer que $\|f - S_n(f)\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Fixons donc $\varepsilon > 0$. Par le lemme 1.6.41, il existe $g \in \mathcal{E}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon/3$. Par le lemme 1.6.42, il existe une fonction h continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec $h(0) = h(2\pi)$ telle que $\|g - h\| < \varepsilon/3$. Puisque

$h(0) = h(2\pi)$, on peut prolonger h (de manière unique) en une fonction 2π-périodique $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Notons toujours h ce prolongement. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de Dirichlet global (théorème 1.6.40), il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|h - S_n(h)\|_{\infty,\mathbb{R}} < \varepsilon/3$. Utilisant la propriété de minimisation de la norme qui définit la projection orthogonale (propriété 1.6.17), on peut écrire pour $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|f - S_n(f)\| &\leq \|f - S_n(h)\| \\
&\leq \|f - g\| + \|g - h\| + \|h - S_n(h)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(x) - S_n(h)(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|h - S_n(h)\|^2_{\infty,[0,2\pi]} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \|h - S_n(h)\|_{\infty,[0,2\pi]} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.6.44 *On a montré dans le théorème précédent que la série de Fourier d'une fonction f de $\mathcal{R}_{2\pi}$ converge toujours vers la fonction f* **en moyenne quadratique***, c'est-à-dire que*

$$\forall f \in \mathcal{R}_{2\pi}, \qquad S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} f.$$

Ce résultat de convergence n'implique en particulier pas la convergence ponctuelle de $S_n(f)$ vers f. En revanche, en ajoutant des hypothèses supplémentaires sur f, on peut avoir des résultats de convergence ponctuelle sur $S_n(f)$ (voir le théorème 1.6.38 de Dirichlet local). De même, avec encore des hypothèses supplémentaires sur f, on peut avoir des résultats de convergence uniforme de $S_n(f)$ (voir le théorème 1.6.40 de Dirichlet global).

1.6.6 Coefficients de Fourier trigonométriques

Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Les coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont appelés coefficients de Fourier complexes, ou exponentiels. Alternativement, on peut définir les coefficients de Fourier réels, ou trigonométriques, $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\geq 1}$ définis comme suit.

Définition 1.6.45 *Soit $f \in \mathbb{R}_{2\pi}$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,$$

et pour $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

Propriété 1.6.46 *Pour tout $n \geq 1$, les fonctions $(x \mapsto \sin(kx))_{1\leq k\leq n}$ et $(x \mapsto \cos(kx))_{0\leq 1\leq n}$ forment une base de T_n en tant qu'espace vectoriel complexe.*

Preuve. Exercice. ■

Un des avantages des coefficients de Fourier trigonométriques est qu'ils sont réels lorsque la fonction $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ est à valeurs réelles.

Propriété 1.6.47 *On a les relations suivantes entre les coefficients de Fourier trigonométriques et les coefficients de Fourier exponentiels :*

$$\forall n \geq 1, \qquad c_n(f) = \frac{1}{2}\left(a_n(f) - ib_n(f)\right) \qquad \text{et} \qquad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}\left(a_n(f) + ib_n(f)\right)$$

De plus, $c_0(f) = a_0(f)/2$. Réciproquement, on a

$$\forall n \geq 1, \qquad a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f),$$

et

$$\forall n \geq 1, \qquad b_n(f) = -i\left(c_{-n}(f) - c_n(f)\right).$$

Preuve. Exercice. ■

On peut écrire la série de Fourier d'une fonction périodique à l'aide des coefficients de Fourier réels.

Propriété 1.6.48 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\right).$$

On peut traduire les propriétés de la projection orthogonale avec les coefficients de Fourier trigonométriques comme suit.

Propriété 1.6.49 (inégalité de Bessel avec les coefficients de Fourier trigonométriques) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\|S_n(f)\|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2\right) \leq \|f\|^2.$$

Preuve. Exercice. ■

Propriété 1.6.50 (identité de Parseval-Plancherel avec les coefficients de Fourier trigonométriques) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. La série de terme général $\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)_{n\geq 1}$ converge et l'on a*

$$\|f\|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2\right).$$

Preuve. Exercice. ■

Chapitre 2

Intégration

1On se propose, dans ce chapitre, de généraliser l'intégration vue en CDI1 des fonctions Riemann-intégrables sur un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le lecteur est supposé familier avec la théorie des fonctions Riemann-intégrables sur un segment, et notamment avec le théorème fondamental de l'analyse vu dans ce contexte [1], même si quelques rappels sont proposés. Le but de cette section est de présenter une théorie de l'intégration sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire ni necessairement fermé ni nécessairement borné, pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$.

La section 2.1 définit la notion de fonction absolument intégrable sur un intervalle, propose des critères pour tester l'absolue intégrabilité d'une fonction et explore quelques conséquences de l'absolue intégrabilité d'une fonction sur un intervalle. La section 2.2 généralise l'intégrale aux fonctions d'intégrale convergente. La section 2.3 propose des outils permettant l'étude des fonctions définies comme des intégrales à paramètres. On applique ensuite tous ces outils à la régulatisation par convolution en section 2.4 où l'on démontre notamment le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass (théorème 2.4.13) ainsi qu'à l'étude de la transformation de Fourier dans la classe de Schwartz sur la droite réelle en section 2.5.

2.1 Intégrales absolument convergentes

2.1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann

On fixe a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et l'on suppose connue la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur le **segment** $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. À partir de l'intégrale des fonctions de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, on a défini en CDI1 la notion de fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ comme suit.

Définition 2.1.1 *Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est* **Riemann-intégrable sur le segment** $[a, b]$ *lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que*

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.1.2 *Une fonction Riemann intégrable sur un segment $[a, b]$ est en particulier bornée.*

De manière équivalente, lorsque f est une fonction bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir son intégrale supérieure en posant

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x) \mid \phi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } f \leq \phi \right\},$$

et son intégrale inférieure en posant

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) \mid \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \right\}.$$

On a alors la propriété suivante

1. qui assure que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\forall \alpha, \beta \in [a, b], \qquad f(\beta) = f(\alpha) + \int_\alpha^\beta f'(x)\mathrm{d}x.$$

Propriété 2.1.3 *Soit f une fonction bornée de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si son intégrale supérieure et son intégrale inférieure sont égales.*

Preuve. Vu en CDI1. ∎

Définition 2.1.4 *Lorsque f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on appelle* **intégrale de f sur le segment** $[a,b]$ *la valeur commune de son intégrale supérieure et de son intégrale inférieure. On note ce nombre réel $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.*

Remarque 2.1.5 *Toutes les fonctions bornées sur un segment ne sont pas Riemann-intégrables sur ce segment, comme on peut le constater avec $[a,b]=[0,1]$ et la fonction $f=\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Dans ce cas, on a en effet*

$$\overline{\int_a^b} f = 1 \qquad \text{et} \qquad \underline{\int_a^b} f = 0.$$

Remarque 2.1.6 *Lorsque le segment est réduit à un point, on dit par convention que toute fonction est Riemann-intégrable, d'intégrale nulle. Ceci est consistant avec les rappels ci-dessous dans le cas $a<b$, (voir par exemple la propriété 2.1.8).*

Propriété 2.1.7 (d'approximation dans L^1 avec une borne L^∞) *Soit $a<b$ deux nombres réels, f une fonction Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$, et $\varepsilon>0$. Il existe une fonction $\psi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que*

$$\int_a^b |f(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|\psi\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Preuve. Soit f et $\varepsilon>0$ comme dans les hypothèses. Il existe $\varphi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f\geq\varphi$ sur $[a,b]$ et $\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b(f(x)-\varphi(x))\mathrm{d}x<\varepsilon$. Notant $m=\inf_{[a,b]}f$ et posant pour $x\in[a,b]$, $\psi(x)=\max(m,\varphi(x))$, on vérifie que $\psi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et que pour tout $x\in[a,b]$, $m=\inf_{[a,b]}f\leq\psi(x)\leq f(x)\leq\sup_{[a,b]}f$ et $\varphi(x)\leq\psi(x)$, ce qui implique que $\|\psi\|_{\infty,[a,b]}\leq\|f\|_{\infty,[a,b]}$ et

$$\int_a^b |f(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)-\psi(x))\mathrm{d}x \leq \int_a^b (f(x)-\varphi(x))\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

∎

Rappelons quelques propriétés des fonctions Riemann-intégrables sur un segment.

Propriété 2.1.8 *Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a,b]$ et λ et μ deux nombres réels. Les fonctions $\lambda f+\mu g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ et $|f|$ sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, et l'on a*

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \max(f,g)(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \min(f,g)(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

et

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f|(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve. La première propriété découle de la linéarité de l'intégrale pour les fonctions de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. La seconde est conséquence de la troisième quitte à changer f et g en $-f$ et $-g$. La dernière est conséquence de la seconde en remarquant que $|f| = \max(f,-f)$. Il suffit donc de prouver la troisième propriété. Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\varphi_f, \varphi_g, \psi_f, \psi_g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [a,b], \qquad \varphi_f(x) \leq f(x) \leq \psi_f(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_g(x) \leq g(x) \leq \psi_g(x),$$

avec

$$\int_a^b (\psi_f - \varphi_f)(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi_g - \varphi_g)(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Remarquons que l'on a

$$\forall x \in [a,b], \qquad \min(\varphi_f(x), \varphi_g(x)) \leq \min(f(x), g(x)) \leq \min(\psi_f(x), \psi_g(x)). \tag{2.1}$$

Posant

$$\tilde{\varphi} = \min(\varphi_f, \varphi_g) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi} = \min(\psi_f, \psi_g),$$

on définit deux fonctions de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. Notons $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une famille de $n+1$ points ($n \in \mathbb{N}$) telle que pour tout $i \in \{0, n-1\}$, les fonctions φ_f et φ_g sont constantes sur $]a_i, a_{i+1}[$, puis

$$E_1 = \{i \in \{0, n-1\} \mid \varphi_f \leq \varphi_g \text{ sur }]a_i, a_{i+1}[\} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \{i \in \{0, n-1\} \mid \varphi_g < \varphi_f \text{ sur }]a_i, a_{i+1}[\}.$$

Remarquons que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $E_1 \cup E_2 = \{0, \ldots, n-1\}$. Soit $x \in [a,b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$. Il existe $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}[$. Distinguons deux cas :

— si $\varphi_f(x) \leq \varphi_g(x)$ (*i.e.* si $x \in]a_i, a_{i+1}[$ pour un $i \in E_1$), alors

$$\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x) \leq \psi_f(x) - \varphi_f(x),$$

— si $\varphi_g(x) < \varphi_f(x)$ (*i.e.* si $x \in]a_i, a_{i+1}[$ pour un $i \in E_2$), alors

$$\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x) \leq \psi_g(x) - \varphi_g(x).$$

Par suite, en découpant par additivité par rapport au segment d'intégration un nombre fini de fois sur $[a,b]$ pour les fonctions en escalier sur $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i \in E_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)\mathrm{d}x + \sum_{i \in E_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i \in E_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\psi_f - \varphi_f)(x)\mathrm{d}x + \sum_{i \in E_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\psi_g - \varphi_g)(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\psi_f - \varphi_f)(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\psi_g - \varphi_g)(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b (\psi_f - \varphi_f)(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (\psi_g - \varphi_g)(x)\mathrm{d}x \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité et l'encadrement (2.1) permettent de conclure que la fonction $\min(f,g)$ est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\varphi \leq \min(f,g)$ sur le segment $[a,b]$. Puisque $\min(f,g) \leq f$ sur $[a,b]$, on a également $\varphi \leq f$ sur le segment $[a,b]$, et par suite $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$. Ceci valant pour toute fonction en escalier φ inférieure à $\min(f, g)$ sur le segment $[a, b]$, il vient que

$$\underline{\int_a^b} \min(f, g)(x)\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Puisque f est Riemann-intégrable sur le segment $[a, b]$ par hypothèse et $\min(f, g)$ est intégrable sur $[a, b]$ d'après ce qui précède, l'inégalité précédente s'écrit encore

$$\int_a^b \min(f, g)(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

■

Rappelons la propriété d'additivité par rapport au segment d'intégration, vue en CDI1.

Propriété 2.1.9 (Relation de Chasles) *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ est $c \in [a, b]$. Soit f une fonction Riemann-intégrable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est Riemann-intégrable en restriction à $[a, c]$ et à $[c, b]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

On étend la définition de l'intégrale de Riemann aux fonctions à valeurs complexes comme suit.

Définition 2.1.10 *Une fonction f du segment $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ est dite* **Riemann-intégrable sur $[a, b]$** *lorsque sa partie réelle $\Re(f)$ et sa partie imaginaire $\Im f$ le sont. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \Re f(x)\mathrm{d}x + i \int_a^b \Im f(x)\mathrm{d}x.$$

On a alors la propriété suivante.

Propriété 2.1.11 *Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$ à valeurs complexes et λ et μ deux nombres complexes. Les fonctions $\lambda f + \mu g$, et $|f|$ sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$, et l'on a*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

et

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f|(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve. Exercice. ■

On a également la généralisation suivante de la propriété 2.1.9 d'additivité par rapport au segment d'intégration.

Propriété 2.1.12 (Relation de Chasles) *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ est $c \in [a, b]$. Soit f une fonction Riemann-intégrable de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. La fonction f est Riemann-intégrable en restriction à $[a, c]$ et à $[c, b]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.1.13 *La propriété 2.1.7 est encore vraie pour une fonction f Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ à valeurs complexes : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ telle que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \|\psi\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

De même, on étend la définition de l'intégrale de Riemann aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ ($d \in \mathbb{N}^\star$) comme suit.

Définition 2.1.14 *Soit d un entier au moins égal à 2. Une fonction f du segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$ (respectivement $\mathbb{C}^d$) est dite* **Riemann-intégrable sur** *I lorsque chaque composante $(f_k)_{1\leq k\leq d}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Dans ce cas, on définit* **l'intégrale de f sur** *$[a,b]$ comme le vecteur de $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{C}^d$) dont les composantes sont*

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)_{1\leq k\leq d} = \left(\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x\right)_{1\leq k\leq d}.$$

On a alors la propriété suivante.

Propriété 2.1.15 *Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (respectivement $\mathbb{C}^d$) et λ et μ deux nombres réels (resp. complexes). Les fonctions $\lambda f + \mu g$, et $\|f\|$ sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, et l'on a*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

et

$$\left\|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right\| \leq \int_a^b \|f\|(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve. Exercice. ∎

On a également la propriété suivante d'additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.

Propriété 2.1.16 (Relation de Chasles) *Soit $d \geq 2$ un entier. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ est $c \in [a,b]$. Soit f une fonction Riemann-intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$). La fonction f est Riemann-intégrable en restriction à $[a,c]$ et à $[c,b]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.1.17 *Ces extensions de l'intégrale de Riemann aux fonctions à valeurs complexes et aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sont cohérentes lorsque l'on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via la bijection $z \mapsto (\Re z, \Im z)$.*

En combinant les deux dernières propriétés, on arrive sans peine à la propriété suivante.

Propriété 2.1.18 *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on suppose Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$. Quels que soient $c, d \in [a,b]$, on a*

$$\left|\int_c^d f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\min(c,d)}^{\max(c,d)} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.1.19 *La propriété précédente est encore vraie si f est à valeurs complexes, en remplaçant la valeur absolue par le module, et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ en remplaçant la valeur absolue par la norme.*

Nous rappelons ci-dessous quelques définitions de CDI1 relatives à la continuité et à la continuité par morceaux pour une application définie sur un intervalle.

Définition 2.1.20 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I. On dit que f* **est continue en** x_0 *lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Remarque 2.1.21 *Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module dans l'inégalité. Dans ce cas, f est continue en x_0 si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Cette définition sétend également aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ en remplaçant la valeur absolue par une norme dans l'inégalité. Dans ce cas, f est continue en x_0 si et seulement si chacune de ses composantes l'est.*

Définition 2.1.22 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* **continue sur** *I lorsqu'elle est continue en tout point de I.*

Remarque 2.1.23 *Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs complexes comme aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$.*

Définition 2.1.24 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite* **continue par morceaux sur le segment** $[a, b]$ *lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, et une famille $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $n + 1$ points du segment $[a, b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ et pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, la fonction f restreinte à l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ et se prolonge en x_k et x_{k+1} en une fonction continue sur $[x_k, x_{x+1}]$.*

Exemple 2.1.25
- *Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est continue par morceaux sur ce segment (prendre $n = 1$ et $x_0 = a$, $x_1 = b$, le prolongement étant f lui-même).*
- *La fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1/2[$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$.*

Remarque 2.1.26 *Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$, dans $\mathbb{C}^d$.*

Propriété 2.1.27 *Si f est une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$), alors sa restriction à tout segment $[c, d] \subset [a, b]$ (avec $c < d$) est continue par morceaux sur le segment $[c, d]$.*

Définition 2.1.28 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est* **continue par morceaux sur** *I lorsque sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux sur ce segment.*

Remarque 2.1.29 *Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$, dans $\mathbb{C}^d$.*

Remarque 2.1.30 *Lorsque I est un segment, la notion de fonction continue par morceaux sur l'intervalle I introduite à la définition 2.1.28 et la notion de continuité par morceaux sur le segment I introduite à la définition 2.1.24 coïncident.*

Propriété 2.1.31 *L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle non trivial I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Remarque 2.1.32 *On a une propriété de structure analogue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$. Remarquer que, pour $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^d$, on a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

Propriété 2.1.33 *L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle non trivial I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Remarque 2.1.34 *On a une propriété de structure analogue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$. Remarquer que, pour $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^d$, on a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

Propriété 2.1.35 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Les fonctions continues sur $[a, b]$ sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$.*

Propriété 2.1.36 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$.*

Remarque 2.1.37 *Ces deux dernières propriétés valent pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$.*

Propriété 2.1.38 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Les fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, monotones sur le segment $[a, b]$, sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$.*

Propriété 2.1.39 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors la fonction fg est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

2.1.2 Fonctions absolument intégrables sur un intervalle

L'intégrale de Riemann, définie sur un segment, et brièvement rappelée dans la section précédente, est la brique de base qui permet la généralisation de la notion d'intégrale aux fonctions définies sur des intervalles plus généraux.

Définition 2.1.40 *On appelle* **intervalle de** $\mathbb{R}$ *toute partie $I \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout couple de points $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, le segment $[a, b]$ est inclus dans I.*

Les ensembles $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $]0, +\infty[$, $[0, 1]$ et $[0, 1[$ sont des intervalles. À l'inverse, $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'en est pas un. Il existe des intervalles ouverts (exemples : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $]0, +\infty[$), des intervalles fermés (exemples : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $[0, 1]$) et des intervalles qui ne sont ni fermés ni ouverts (exemple : $[0, 1[$).

Définition 2.1.41 *Un intervalle de I est dit* **trivial** *s'il est vide ou réduit à un point. Il est dit* **non trivial** *dans le cas contraire.*

Définition 2.1.42 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* **absolument intégrable sur** *I lorsque*

— *quel que soit le segment* $[a, b] \subset I$*, la fonction* f *est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$
— *il existe* $M > 0$ *tel que pour tout segment* $[a, b] \subset I$*,* $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq M$ *; autrement dit*

$$\sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

On dit également dans ce cas que l'intégrale de f *sur* I *est* **absolument convergente***.*

Remarque 2.1.43 *Si une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable sur tout segment de* I*, il en est de même de la fonction* $|f|$ *par la Propriété 2.1.8. Ainsi, le critère de majoration des intégrales de* $|f|$ *dans la deuxième partie de la définition n'est pas vide de sens.*

Remarque 2.1.44 *La terminologie "absolument intégrable" fait référence au fait que cette définition d'intégration fait intervenir un critère faisant intervenir la valeur absolue de la fonction, plutôt que la fonction elle-même.*

Remarque 2.1.45 *En une phrase, une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est absolument intégrable sur l'intervalle* I *si elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans* I *et si l'intégrale de sa valeur absolue un segment de* I *est majorée indépendamment du segment choisi.*

La notion d'absolue intégrabilité s'étend aux fonctions d'un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue dans la définition par le module.

Définition 2.1.46 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non vide. Une fonction* $f : I \to \mathbb{C}$ *est dite* **absolument intégrable sur** I *lorsque*
— *quel que soit le segment* $[a, b] \subset I$*, la fonction* f *est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$
— *il existe* $M > 0$ *tel que pour tout segment* $[a, b] \subset I$*,* $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq M$ *; autrement dit*

$$\sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

La notion d'absolue intégrabilité s'étend aux fonctions d'un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ en remplaçant la valeur absolue par une norme.

Définition 2.1.47 *Soit* $d \geq 2$ *un entier. Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non vide. Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}^d$ *(ou* $\mathbb{C}^d$*) est dite* **absolument intégrable sur** I *lorsque*
— *quel que soit le segment* $[a, b] \subset I$*, la fonction* f *est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$
— *il existe* $M > 0$ *tel que pour tout segment* $[a, b] \subset I$*,* $\int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x \leq M$ *; autrement dit*

$$\sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b \|f(x)\|\mathrm{d}x < +\infty.$$

Afin de donner un sens à l'intégrale d'une fonction absolument intégrable sur un intervalle, nous allons utiliser la notion de suite exhaustive de compacts d'un intervalle. Ceci nous permettra d'utiliser les résultats sur l'intégrale de Riemann dans la construction.

Définition 2.1.48 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On appelle suite* **exhaustive de segments de** I *toute suite* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante de segments de* I *telle que*

$$\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = I.$$

Propriété 2.1.49 *Tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ admet (au moins) une suite exhaustive de segments.*

Preuve. Exercice. Indication : distinguer des cas suivant la "forme" de l'intervalle I. ■

Nous pouvons maintenant donner un sens à l'intégrale d'une fonction absolument intégrable sur un intervalle.

Propriété 2.1.50 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable sur I. Quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite réelle $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, la limite de cette suite est indépendante de la suite exhaustive choisie. On appelle intégrale de f sur I cette limite commune et on la note $\int_I f(x)\mathrm{d}x$.*

Remarque 2.1.51 *La valeur absolue, présente dans l'hypothèse d'absolue intégrabilité de f, a disparu dans la conclusion de la propriété.*

Preuve. Notons

$$L = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Il s'agit d'un nombre réel positif ou nul car f est absolument intégrable sur I. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\mathrm{d}x$. Puisque la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et puisque $|f|$ est une fonction positive sur I, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, par définition de L, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n \leq L. \tag{2.2}$$

Ainsi, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante et majorée. Par conséquent, elle converge. En particulier, c'est une suite de Cauchy. Définissons maintenant la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x$. Observons que pour $p, n \in \mathbb{N}$, on a, en utilisant notamment la propriété d'additivité 2.1.9 de manière répétée,

$$\begin{aligned}
\beta_{n+p} - \beta_n &= \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
|\beta_{n+p} - \beta_n| &\leq \left|\int_{a_{n+p}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{a_{n+p}}^{a_n} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b_{n+p}} |f(x)|\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

en utilisant la croissance de la suite exhaustive de segments qui se traduit pas les inégalités

$$a_{n+p} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n+p}.$$

Par conséquent, on a, en appliquant la propriété d'additivité 2.1.9 à la fonction $|f|$,

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad |\beta_{n+p} - \beta_n| \leq \alpha_{n+p} - \alpha_n. \tag{2.3}$$

Puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy d'après ce qui précède, il en est de même de la suite réelle $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant (2.3). Puisque $\mathbb{R}$ est complet, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta \in \mathbb{R}$. Ceci démontre la première partie de la propriété : la suite des intégrales d'une fonction absolument intégrable sur une suite exhaustive de segments converge. Pour montrer que la limite ne dépend pas de la suite exhaustive de segments de I choisie, on utilise le lemme 2.1.52. Ceci conclut la preuve.
■

Lemme 2.1.52 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I. On suppose que, pour toute suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite réelle $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite de cette suite est indépendante de la suite exhaustive de segments choisie.*

Preuve. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t$. On sait que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta \in \mathbb{R}$. Considérons une autre suite exhaustive $([\tilde{a}_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, et notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\beta}_n = \int_{\tilde{a}_n}^{\tilde{b}_n} f(x)\mathrm{d}x$. Par hypothèse, la suite $(\tilde{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\tilde{\beta}$. Il nous suffit de montrer que $\beta = \tilde{\beta}$ pour démontrer le lemme. Pour cela, on construit par induction une troisième suite exhaustive de segments $([\overline{a}_n, \overline{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de I de la manière suivante. On pose $\overline{a}_0 = a_0$ et $\overline{b}_0 = b_0$. Par exhaustivité de la suite $([\tilde{a}_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\tilde{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq \tilde{N}_0, \qquad [\overline{a}_0, \overline{b}_0] \subset [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n].$$

On pose $\overline{a}_1 = \tilde{a}_{\tilde{N}_0}$ et $\overline{b}_1 = \tilde{b}_{\tilde{N}_0}$. Par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \qquad [\overline{a}_1, \overline{b}_1] \subset [a_n, b_n].$$

On pose $\overline{a}_2 = a_{N_0}$ et $\overline{b}_2 = b_{N_0}$. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, si l'on vient de construire $[\overline{a}_{2p}, \overline{b}_{2p}]$, alors par exhaustivité de la suite $([\tilde{a}_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\tilde{N}_p > \tilde{N}_{p-1}$ tel que

$$\forall n \geq \tilde{N}_p, \qquad [\overline{a}_{2p}, \overline{b}_{2p}] \subset [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n].$$

On pose $\overline{a}_{2p+1} = \tilde{a}_{\tilde{N}_p}$ et $\overline{b}_{2p+1} = \tilde{b}_{\tilde{N}_p}$. Si l'on vient de construire $[\overline{a}_{2p+1}, \overline{b}_{2p+1}]$, alors par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N_p > N_{p-1}$ tel que

$$\forall n \geq N_p, \qquad [\overline{a}_{2p+1}, \overline{b}_{2p+1}] \subset [a_n, b_n].$$

On pose $\overline{a}_{2p+2} = a_{N_p}$ et $\overline{b}_{2p+2} = b_{N_p}$. On construit ainsi une suite croissante $([\overline{a}_n, \overline{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I. Puisque $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, on a $N_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$,

$$I = \cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \cup_{p\in\mathbb{N}}[a_{N_p}, b_{N_p}] = \cup_{p\in\mathbb{N}^\star}[\overline{a}_{2p}, \overline{b}_{2p}] \subset I.$$

On en déduit que

$$\cup_{p\in\mathbb{N}}[\overline{a}_p, \overline{b}_p] = I,$$

et donc $([\overline{a}_p, \overline{b}_p])_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de I. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\beta}_n = \int_{\overline{a}_n}^{\overline{b}_n} f(x)\mathrm{d}x$. Par hypothèse sur f, puisque $([\overline{a}_p, \overline{b}_p]_{p\in\mathbb{N}})$ est une suite exhaustive de segments de I, la suite $(\overline{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel que l'on note $\overline{\beta}$. Observant que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \overline{\beta}_{2p} = \beta_{N_{p-1}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\beta}_{2p+1} = \tilde{\beta}_{\tilde{N}_p},$$

et que $N_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\tilde{N}_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on obtient par passage à la limite dans ces deux égalités les relations

$$\overline{\beta} = \beta \qquad \text{et} \qquad \overline{\beta} = \tilde{\beta},$$

ce qui montre que $\beta = \tilde{\beta}$ et achève la preuve du lemme. ■

En séparant les parties réelles et imaginaires, on déduit de la propriété 2.1.50 la propriété suivante

Propriété 2.1.53 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction absolument intégrable sur I. Quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite complexe $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, la limite de cette suite est indépendante de la suite exhaustive choisie. On appelle intégrale de f sur I cette limite commune et on la note $\int_I f(x)\mathrm{d}x$.*

De même, en travaillant composante par composante, on déduit de ce qui précède la propriété suivante.

Propriété 2.1.54 *Soit $d \geq 2$ un entier. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^d$ (respectivement $f : I \to \mathbb{C}^d$) une fonction absolument intégrable sur I. Quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{C}^d$) $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, la limite de cette suite est indépendante de la suite exhaustive choisie. On appelle intégrale de f sur I cette limite commune et on la note $\int_I f(x)\mathrm{d}x$.*

Remarque 2.1.55 *On vérifie aisément que la définition de l'intégrale d'une fonction réelle correspond à celle donnée lorsque l'on regarde cette même fonction comme une fonction à valeurs complexes.*

Remarque 2.1.56 *On peut remplacer dans la propriété 2.1.50 la suite exhaustive de segments par une suite $[a_n, b_n]$ de segments de I avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$ et telle que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, sans changer la véracité de la propriété, comme le lecteur pourra s'en convraincre en exercice. Ce faisant, on ne travaille plus nécessairement avec des suites monotones, et l'on perd la propriété que $\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = I$.*

Remarquons que la définition de l'intégrale d'une fonction absolument intégrable sur un intervalle général coincide avec celle vue en CDI1 lorsque l'intervalle est un segment. Ceci est précisé dans la propriété suivante.

Propriété 2.1.57 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Si une fonction f est absolument intégrable sur $I = [a, b]$, alors elle est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Preuve. Puisque f est absolument intégrable sur $I = [a, b]$, elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a, b]$. En particulier, elle est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. De plus, si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de $I = [a, b]$, alors elle est stationnaire en $[a, b]$ à partir d'un certain rang. C'est-à-dire

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \qquad [a_n, b_n] = [a, b].$$

En particulier, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\alpha_n = \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x$ est constante, égale à $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, à partir du rang N. En particulier, elle converge vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. On en déduit (2.4). ■

Dans le cas du segment, la notion d'intégrabilité et celle d'absolue intégrabilité sont confondues.

Propriété 2.1.58 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si elle est absolument intégrable sur $[a, b]$. Dans ce cas, on a la relation* (2.4)

Preuve. La propriété à démontrer est une équivalence. L'implication réciproque a été montrée à la propriété 2.4. Il nous suffit donc de montrer l'implication directe. Pour cela, considérons une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, Riemann-intérable sur $[a, b]$. Par la propriété 2.1.9, elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a, b]$. Par la propriété 2.1.8, il en est de même de la fonction $|f|$. En outre, on a pour tout segment $[u, v] \subset [a, b]$, puisque la fonction $|f|$ est positive,

$$\int_u^v |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Par conséquent, l'intégrale de $|f|$ sur tout segment $[u, v]$ de $I = [a, b]$ est majorée par une quantité qui ne dépend pas du segment $[u, v]$ choisi. On en déduit que f est absolument intégrable sur $[a, b]$. Le fait que la relation (2.4) a lieu dans ce cas est une conséquence directe de la proposition 2.1.58.

■

Remarque 2.1.59 *Les propriétés 2.1.57 et 2.1.58 se généralisent évidemment aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$ et dans $\mathbb{C}^d$. Cette généralisation est laissée en exercice au lecteur.*

La notion d'intégrabilité absolue permet de définir l'ensemble $\mathcal{L}^1(I)$ pour un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ fixé.

Définition 2.1.60 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Pour $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{X} = \mathbb{C}^d$, on pose*

$$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{X}) = \{f : I \to \mathbb{X} \mid f \text{ est absolument intégrable sur } I\}.$$

Remarque 2.1.61 *Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur l'espace d'arrivée des fonctions, on note en général $\mathcal{L}^1(I)$ au lieu de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{X})$*

On étend la propriété 2.1.8 relative à l'intégrale de Riemann sur un segment aux fonctions abolument intégrables sur un intervalle.

Propriété 2.1.62 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Soient λ, μ deux nombres réels et $f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et l'on a*

$$\int_I (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_I f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_I g(x)\mathrm{d}x, \tag{2.5}$$

et

$$\left| \int_I f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_I |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

Preuve. La fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur tout segment de I par la propriété 2.1.8. De plus, si $[a, b]$ est un segment inclus dans I, alors on a, en utilisant à nouveau la propriété 2.1.8,

$$\int_a^b |\lambda f(x) + \mu g(x)| \mathrm{d}x \leq |\lambda| \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x + |\mu| \int_a^b |g(x)| \mathrm{d}x.$$

Puisque les fonctions f et g sont absolument intégrables sur I, on en déduit

$$\int_a^b |\lambda f(x) + \mu g(x)| \mathrm{d}x \leq |\lambda| \int_I |f(x)| \mathrm{d}x + |\mu| \int_I |g(x)| \mathrm{d}x.$$

Le majorant dans cette inégalité étant fini et indépendant de $[a, b]$, il vient que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}^1(I)$. Soit maintenant $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Par la propriété 2.1.8, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{a_n}^{b_n} (\lambda f(x) + \mu g(x)) \mathrm{d}x = \lambda \int_{a_n}^{b_n} f(x) \mathrm{d}x + \mu \int_{a_n}^{b_n} g(x) \mathrm{d}x.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient (2.5). Par ailleurs, on a, par la propriété 2.1.8,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \int_{a_n}^{b_n} f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_{a_n}^{b_n} |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Puisque $f \in \mathcal{L}^1(I)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \int_{a_n}^{b_n} f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_I |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité (2.6). ∎

On peut résumer la propriété précédente comme suit

Propriété 2.1.63 *L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application*

$$\mathcal{I} : \begin{pmatrix} \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_I f(x) \mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$, qui vérifie de plus

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}), \qquad |\mathcal{I}(f)| \leq \mathcal{I}(|f|).$$

Remarque 2.1.64 *Les propriétés 2.1.62 et 2.1.63 se généralisent aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$ et dans $\mathbb{C}^d$. Cette généralisation est laissée en exercice au lecteur.*

2.1.3 Intégrales absolument convergentes fonctions de leurs bornes

Dans le but d'étudier les fonctions définies par des intégrales dont les bornes bougent, commençons par généraliser la propriété d'additivité 2.1.9 aux fonctions absolument intégrables sur un intervalle.

Propriété 2.1.65 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et $a \in I$. Soit f une fonction absolument intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{X} = \mathbb{C}^d$. La fonction f est absolument intégrable sur les intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ et l'on a*

$$\int_I f(x) \mathrm{d}x = \int_{I \cap]-\infty, a]} f(x) \mathrm{d}x + \int_{I \cap [a, +\infty[} f(x) \mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Preuve. Faisons la preuve de cette propriété dans le cas $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ et laissons la preuve dans les autres cas en exercice. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans l'intervalle $I \cap]-\infty, a]$. Puisque la fonction f est absolument intégrable sur I, elle est intégrable sur le segment $[\alpha, \beta]$ et l'on a

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_I |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Puisque le majorant ci-dessus est fini et indépendant de $[\alpha, \beta]$, il vient que f est absolument intégrable sur $I \cap]-\infty, a]$. On démontre de même que la fonction f est absolument intégrable sur $I \cap [a, +\infty[$. Soit maintenant $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de l'intervalle $I \cap]-\infty, a]$, et $([\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de l'intervalle $I \cap [a, +\infty[$. On constate que la suite $([\alpha_n, \tilde{\beta}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de I. Utilisant la propriété 2.1.9, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\alpha_n}^{\tilde{\beta}_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha_n}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{\tilde{\beta}_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

Chacune des trois quantités dans l'égalité ci-dessus converge quand n tend vers $+\infty$ en vertu de ce qui précède et de la propriété 2.1.50. En passant à la limite, on obtient la relation (2.7). ■

La propriété précédente peut être précisée : l'implication réciproque est également vraie.

Propriété 2.1.66 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et $a \in I$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{X} = \mathbb{C}^d$. La fonction f est absolument intégrable sur I si et seulement si elle est absolument intégrable sur les intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$. Dans ce cas, on a la relation* (2.7)*.*

Preuve. Procédons par double implication. Le sens direct a été prouvé à la propriété précédente. Afin de montrer l'implication réciproque, considérons une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ (le cas $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ et $X = \mathbb{C}^d$ sont laissés en exercice au lecteur), absolument intégrable sur les intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans I. S'il ne contient pas a, il est inclus dans $I \cap]-\infty, a]$ ou dans $I \cap [a, +\infty[$, donc f est Riemann-intégrable sur $[\alpha, \beta]$ dans ce cas. Sinon, $a \in [\alpha, \beta]$, et dans ce cas f est Riemann-intégrable sur $[\alpha, a]$ et sur $[a, \beta]$, donc elle est Riemann-intégrable sur $[\alpha, \beta]$ également. On outre, on a dans tous les cas

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{I\cap]-\infty,a]} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{I\cap[a,+\infty[} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Puisque le majorant ci-dessous est indépendant de $[\alpha, \beta]$, il vient que f est absolument intégrable sur I. On peut donc appliquer la propriété 2.1.65 pour en déduire la relation (2.7). ■

À l'aide de cette propriété de Chasles, on montre la caractérisation suivante.

Propriété 2.1.67 (Caractérisation des fonctions d'intégrale absolument convergente) *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est Riemann-intégrable sur tout segment de I. Pour tout $a \in I$, on peut définir les fonctions*

$$G_a : \begin{pmatrix} I\cap]-\infty, a] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_x^a |f(x)|\mathrm{d}x \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_a : \begin{pmatrix} I \cap [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_a^x |f(x)|\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

D'une part, la fonction f est absolument intégrable sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction G_a admet une limite finie $\ell_g(a) \in \mathbb{R}^+$ en $\inf I$ et la fonction D_a admet une limite finie

$\ell_d(a) \in \mathbb{R}^+$ *en* $\sup I$*. D'autre part, la fonction* f *est absolument intégrable sur* I *si et seulement s'il existe* $a \in I$ *tel que la fonction* G_a *admet une limite finie* $\ell_g(a) \in \mathbb{R}^+$ *en* $\inf I$ *et la fonction* D_a *admet une limite finie* $\ell_d(a) \in \mathbb{R}^+$ *en* $\sup I$*. Dans ce cas, on a pour tout* $a \in I$*,*

$$\int_I |f(x)|\mathrm{d}x = \ell_g(a) + \ell_d(a).$$

Preuve. Exercice ■

Remarque 2.1.68 *La caractérisation ci-dessus des fonctions absolument intégrables sur un intervalle* I *justifie qu'on utilise la terminologie d'intégrale absolument convergente sur* I*.*

On déduit de la relation de Chasles la propriété de continuité suivante.

Propriété 2.1.69 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non vide et* $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$*. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{I \cap]-\infty, x]} f(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

est localement lipschitzienne sur I*.*

Preuve. Soit x_0 un point de I. Supposons que x n'est pas une extrémité de I (le cas où x est une extrémité de I est laissé en exercice au lecteur). Il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$. Ainsi, le segment $[x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ est inclus dans I. Puisque la fonction f est absolument intégrable sur I, elle est Riemann-intégrable sur $[x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$, et en particulier elle est bornée par un certain $M > 0$ sur ce segment. Pour $x, y \in [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ avec $y \geq x$, on peut écrire à l'aide de la propriété 2.7,

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_{I \cap]-\infty, y]} f(t)\mathrm{d}t - \int_{I \cap]-\infty, x]} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{I \cap]-\infty, x]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{[x,y]} f(t)\mathrm{d}t - \int_{I \cap]-\infty, x]} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^y f(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On en déduit que pour $x, y \in [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$, on a

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f(t)|\mathrm{d}t \leq M|y - x|.$$

Ceci montre que F est lipschitzienne sur $[x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$. Ceci valant quel que soit $x_0 \in I$, on en déduit que la fonction f est localement lipschitzienne sur l'intervalle I. ■

Corollaire 2.1.70 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non vide et* $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$*. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{I \cap]-\infty, x]} f(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

est continue sur I*.*

Preuve. Puisque f est localement lipschitzienne sur I, elle est continue au voisinage de chaque point de I. Par conséquent, elle est continue sur I. ■

Remarque 2.1.71 *Les deux propriétés précédentes s'étendent aux cas où la fonction est à valeur dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$, et dans $\mathbb{C}^d$.*

Ajoutons maintenant le critère de dérivabilité suivant.

Propriété 2.1.72 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Si la fonction f est continue en x_0, alors la fonction F définie en* (2.8) *est dérivable en x_0 et l'on a*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{2.9}$$

Preuve. Lorsque x_0 n'est pas une extrémité de I (le cas où x_0 est une extrémité est laissé au lecteur), on se ramène à traiter des quantités faisant uniquement intervenir des intégrales de Riemann sur des segments en considérant que pour $x \in I$, $x \neq x_0$, on a par la propriété 2.1.65,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

En intégrant la fonction constante $t \mapsto f(x_0)$, on obtient

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(x_0)\mathrm{d}t \right).$$

Répétant la preuve vue en CDI1, on considère $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. On en déduit que pour $x \in I$, $x \neq x_0$, avec $|x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &\leq \frac{\int_{\min(x,x_0)}^{\max(x,x_0)} |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t}{|x - x_0|} \\
&\leq \frac{\varepsilon |x - x_0|}{|x - x_0|} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

On peut alors généraliser au caractère $\mathcal{C}^1$ et aux dérivées d'ordres supérieurs via le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.73 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle non trivial $J \subset I$, alors la fonction F définie en* (2.8) *est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur J et l'on a*

$$\forall p \in \{0, \ldots, k\}, \ \forall x \in J, \qquad F^{(p+1)}(x) = f^{(p)}(x). \tag{2.10}$$

Preuve. En utilisant la propriété précédente, on obtient que la fonction F est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \qquad F'(x) = f(x).$$

Par suite, la fonction F' est de classe $\mathcal{C}^p$ sur J et la fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur J. On obtient (2.10) en dérivant p fois la relation (2.9). ■

2.1.4 Critères d'intégrabilité absolue

On se propose de donner des critères pour décider de l'intégrabilité absolue ou non d'une fonction sur un intervalle I. On présente les résultats dans le cas où I est de la forme $[a,b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. Le lecteur pourra adapter ces résultats au cas où b vaut $+\infty$, puis aux cas oû I est de la forme $]a,b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.

Propriété 2.1.74 *Soit f une fonction de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de $[a,b[$, et g une fonction de $\mathcal{L}^1([a,b[,\mathbb{R}^+)$. Si*

$$\forall x \in I, \qquad |f(x)| \leq g(x),$$

alors la fonction f est absolument intégrable sur $[a,b[$.

Preuve. Soit $([\alpha_n,\beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de $[a,b[$. Observons que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} g(x)\mathrm{d}x \leq \int_I g(x)\mathrm{d}x.$$

Puisque ce majorant est fini et indépendant de n, il vient que f est absolument intégrable sur I. ■

Propriété 2.1.75 *Soit f et g deux fonctions de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrables sur tout segment de $[a,b[$. Si g est positive sur $[a,b[$ avec*

$$|f(x)| \underset{x\to b}{\sim} g(x),$$

alors la fonction f est absolument intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si la fonction g l'est. Si ces fonctions sont absolument intégrables sur $[a,b[$, alors on a[2]

$$\int_x^b |f(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Si ces deux fonctions ne sont pas (absolument) intégrables sur $[a,b[$, alors on a[3]

$$\int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve. Supposons la fonction g absolument intégrable sur $[a,b[$. Puisque $|f| \underset{x\to b}{\sim} g$, il existe un $\delta \in]0,b-a[$ tel que

$$\forall x \in [b-\delta,b[, \qquad ||f(x)| - g(x)| \leq g(x),$$

d'où

$$\forall x \in [b-\delta,b[, \qquad |f(x)| \leq 2g(x).$$

On en déduit que f est absolument intégrable sur $[b-\delta,b[$ par la propriété précédente. Ainsi, elle l'est sur $[a,b[$, car elle l'est également sur le segment $[a,b-\delta]$. Réciproquement, si l'on suppose la fonction f absolument intégrable sur $[a,b[$, on trouve un $\delta \in]0,b-a[$ tel que

$$\forall x \in [b-\delta,b[, \qquad 0 \leq g(x) \leq 2|f(x)|,$$

2. Noter que les deux quantités tendent alors vers 0.
3. Noter que les deux quantités tendent alors vers $+\infty$.

et l'on conclut de la même maniere que précédemment que g est absolument intégrable sur $[a,b[$. Dans le cas où les fonctions f et g sont absolument intégrables sur $[a,b[$, on fixe $\varepsilon>0$ et l'on trouve un $\delta\in]0,b-a[$ tel que

$$\forall t\in[b-\delta,b[,\qquad ||f(t)|-g(t)|\leq\varepsilon g(t).$$

On en déduit que pour $x\in[b-\delta,b[$,

$$\left|\int_{[x,b[}(|f(t)|-g(t))\mathrm{d}t\right|\leq\int_{[x,b[}||f(t)|-g(t)|\,\mathrm{d}t\leq\varepsilon\int_{[x,b[}g(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci démontre le résultat annoncé dans ce cas. Dans le cas où les fonctions f et g ne sont pas absolument intégrables sur $[a,b[$, fixons de nouveau $\varepsilon>0$ et trouvons $\delta\in]0,b-a[$ tel que

$$\forall t\in[b-\delta,b[,\qquad ||f(t)|-g(t)|\leq\varepsilon g(t).$$

Puisque g n'est pas absolument intégrable sur $[a,b[$, la fonction croissante (par positivité de l'intégrande) $x\mapsto\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ est non bornée sur $[a,b[$. Par suite, elle tend vers $+\infty$ en b^-. En particulier, il existe $\tilde{\delta}\in]0,\delta[$ tel que

$$\forall x\in[b-\tilde{\delta},b[,\qquad \frac{\int_a^{b-\delta}(|f(t)|+g(t))\mathrm{d}t}{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}\leq\varepsilon.$$

On peut alors écrire pour $x\in]b-\tilde{\delta},b[$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x|f(t)|\mathrm{d}t-\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \left|\int_a^{b-\delta}|f(t)|\mathrm{d}t-\int_a^{b-\delta}g(t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_{b-\delta}^x|f(t)|\mathrm{d}t-\int_{b-\delta}^x g(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \int_a^{b-\delta}|f(t)|+g(t)\mathrm{d}t+\int_{b-\delta}^x||f(t)|-g(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\leq \varepsilon\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+\varepsilon\int_{b-\delta}^x g(t)\mathrm{d}t\\ &\leq 2\varepsilon\int_a^x g(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat annoncé dans ce cas. ■

2.1.5 Fonctions de référence de Riemann

Propriété 2.1.76 *Soir $\alpha\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto 1/t^\alpha$ est absolument intégrable sur $I=[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha>1$.*

Preuve. La fonction $t\mapsto 1/t^\alpha$ est continue sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Elle est donc Riemann-intégrable sur tout segment contenu dans $[1,+\infty[$. Par ailleurs, cette fonction est positive, et l'on peut calculer pour $X>1$

$$\int_1^X\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^X & \text{si } \alpha\neq1\\ [\ln(x)]_1^X & \text{si } \alpha=1.\end{cases}$$

On vérifie alors que, lorsque $\alpha>1$,

$$\forall X>1,\qquad\int_1^X\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x\leq\frac{1}{\alpha-1},$$

lorsque $\alpha = 1$,
$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
et lorsque $\alpha < 1$,
$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Lorsque $\alpha > 1$, l'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur les segments de $[1, +\infty[$ est donc majorée par une constante qui ne dépend pas du segment. La fonction est donc absolument intégrable dans ce cas. Lorsque $\alpha \leq 1$, en revanche, l'intégrale de (la valeur absolue de) la fonction sur $[1, X]$ n'est pas majorée par une constante indépendante de X. Par suite, la fonction n'est pas absolument intégrable sur $[1, +\infty[$. ■

Propriété 2.1.77 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est absolument intégrable sur $I =]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.*

Preuve. Exercice. ■

2.1.6 Le théorème du changement de variable

On généralise maintenant le théorème de changement de variable dans une intégrale étudié en CDI1. On s'appuie bien sûr fortement sur le résultat de CDI1 dans la preuve.

Propriété 2.1.78 *Soit I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et φ une bijection de classe C^1 de I dans J, strictement croissante. Soit une fonction f de J dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de J. La fonction f est absolument intégrable sur J si et seulement la fonction $f \circ \varphi \times \varphi'$ est absolument intégrable sur I. Dans ce cas, on a*
$$\int_I f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_J f(y)\mathrm{d}y.$$

Preuve. Puisqu'elle est une bijection (strictement) croissante de I dans J, la fonction φ permet de définir une bijection entre les suites exhaustives de segments de I et celles de J en posant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad [\alpha_n, \beta_n] = [\varphi(a_n), \varphi(b_n)],$$
si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de I, et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad [a_n, b_n] = [\varphi^{-1}(\alpha_n), \varphi^{-1}(\beta_n)],$$
si $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de J. Puisque la fonction f est Riemann-intégrable sur tout segment de J, et puisque la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de I, la fonction $f \circ \varphi \times \varphi'$ est Riemann-intégrable sur tout segment de I, par le résultat de CDI1. Par le même résultat de CDI1, on a de même, en liant la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{a_n}^{b_n} |f(\varphi(x))|\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |f(y)|\mathrm{d}y.$$
Ainsi, la suite de droite est majorée indépendamment de n si et seulement si la suite de gauche l'est. Ceci montre que f est absolument intégrable sur J si et seulement si $f \circ \varphi \times \varphi'$ est absolument

intégrable sur I. Par ailleurs, en utilisant une dernière fois le résultat de CDI1, on a, toujours en liant la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ comme précédemment,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{a_n}^{b_n} f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(y)\mathrm{d}y.$$

On obtient le résultat en passant à la limite dans cette égalité. ■

Remarque 2.1.79 *L'hypothèse de monotonie stricte est inutile : dès que φ est une bijection de I dans J, elle ne peut être que* **strictement** *monotone.*

Remarque 2.1.80 *Lorsque la fonction φ est (strictement) décroissante, le résultat est toujours valable, et l'identité obtenue est*

$$\int_I f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_J f(y)\mathrm{d}y.$$

2.2 Intégrales convergentes

2.2.1 Définition, critères de Cauchy et exemple

On a vu dans la section précédente comment, lorsqu'une fonction f est absolument intégrable sur un intervalle I, on peut définir la notion d'intégrale de f en préservant certaines propriétés de l'intégrale vues en CDI1, et en ayant la même définition qu'en CDI1 lorsque I est un segment. Nous allons maintenant encore généraliser un peu la notion d'intégrale sur un intervalle à certaines fonctions non absolument intégrables sur I.

Définition 2.2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de I. On dit que* **l'intégrale de f sur I converge** *lorsque quelle que soit la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ exhaustive de segments de I, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Propriété 2.2.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de I. Si l'intégrale de f sur I converge, alors quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qui ne dépend pas de la suite exhaustive choisie. Cette limite coïncide avec la définition du symbole $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ lorsque f est absolument intégrable sur I (voir la propriété 2.1.50). On la note donc encore $\int_I f(t)\mathrm{d}t$*

Preuve. Il suffit d'utiliser le lemme 2.1.52 pour conclure que la limite de la suite des intégrables ne dépent pas de la suite exhaustive de segments de I choisie. ■

Remarque 2.2.3 *Usuellement, on parle d'intégrales absolument convergentes sur un intervalle I lorsque l'intégrande est absolument intégrable (au sens de la définition 2.1.46), et d'intégrales convergentes lorsque l'intégrale de l'intégrande converge sur I (au sens de la définition 2.2.1).*

Une reformulation possible de la définition 2.2.1 est donnée par la propriété suivante. Celle-ci permet l'utilisation de suites non monotones dans les bornes des segments et permet de s'affranchir de l'exhaustivité si besoin.

Propriété 2.2.4 (Critère de Cauchy séquentiel) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de I. L'intégrale de f sur I converge si et seulement si quelle que soit la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\inf I$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sup I$, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. De même, l'intégrale de f sur I converge si et seulement si quelle que soit la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\inf I$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sup I$, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Les deux formulations sont clairement équivalentes, car “converger” et “être de Cauchy” sont deux propriétés équivalentes pour les suites de nombres réels. Il suffit donc de prouver la première. La preuve de cette propriété est un peu technique (il faut distinguer les cas suivant que I est un segment, ou de la forme $]a, b[$, ou de la forme $[a, b[$ encore de la forme $]a, b]$), et elle n'apporte pas d'éléments fondamentalement nouveaux. Notons que l'implication récriproque est triviale, et que c'est l'implication réciproque qui est donc laissée en exercice au lecteur. ■

Une reformulation continue plutôt que séquentielle du critère précédent (propriété 2.2.4) est la suivante.

Propriété 2.2.5 (Critère de Cauchy continu 1) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout segment inclus dans I. L'intégrale de f sur I converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que pour tout segment $[c, d]$ inclus dans $I \setminus [a, b]$, on a $|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t| < \varepsilon$.*

Remarque 2.2.6 *Dans la propriété précédente, la partie $I\setminus[a, b]$ n'est pas un intervalle, en général.*

Preuve. Pour le sens direct, raisonnons par contraposition. Supposons qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe un segment $[c, d] \subset I \setminus [a, b]$ tel que $|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t| \geq \varepsilon_0$. Considérons une suite exhaustive $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I. Construisons une autre suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit. On pose $a_0 = \alpha_0$ et $b_0 = \beta_0$. Utilisant ce qui précède avec $[a, b] = [a_0, b_0]$, il existe un segment $[c_0, d_0] \subset I \setminus [a_0, b_0]$ tel que $|\int_{c_0}^{d_0} f(t)\mathrm{d}t| \geq \varepsilon_0$. Il y a deux possibilités : soit $[c_0, d_0]$ est "à gauche" de $[a_0, b_0]$ dans I (*i.e.* $d_0 \leq a_0$), soit $[c_0, d_0]$ est "à droite" de $[a_0, b_0]$ dans I (*i.e.* $b_0 \leq c_0$). Dans le premier cas, on pose $a_1 = d_0$ et $b_1 = b_0$, puis $a_2 = c_0$ et $b_2 = b_0$. Dans le second, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$, puis $a_2 = a_0$ et $b_2 = d_0$. Dans tous les cas, on a

$$\left|\int_{a_2}^{b_2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_1}^{b_1} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{c_0}^{d_0} f(t)\mathrm{d}t\right| \geq \varepsilon_0.$$

On recommence ensuite en choisissant $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $[a_2, b_2] \subset [\alpha_n, \beta_n]$, ce qui est possible par exhaustivité de $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose $[a_3, b_3] = [\alpha_N, \beta_N]$, puis on utilise la propriété initiale pour constuire $[a_4, b_4]$ et $[a_5, b_5]$, *etc.* On construit ainsi une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, dont on vérifie qu'elle est exhaustive, et une suite $([c_n, d_n])_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, ces suites vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\int_{a_{3n+2}}^{b_{3n+2}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_{3n+1}}^{b_{3n+1}} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{c_n}^{d_n} f(t)\mathrm{d}t\right| \geq \varepsilon_0.$$

En particulier, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, donc elle ne converge pas. Ceci assure que l'intégrale de f ne converge pas sur I, et achève la preuve de l'implication dans le sens direct. Dans le sens réciproque, on considère une suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I et on montre que la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (donc converge) dans $\mathbb{R}$. On obtient que la limite ne dépend pas de la suite exhaustive choisie en utilisant le lemme 2.1.52. Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $[a,b] \subset I$ tel que pour tout segment $[c,d] \subset I \setminus [a,b]$, $|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t| < \varepsilon/2$. Par exhaustivité de la suite $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $[a,b] \subset [a_n,b_n]$. Pour $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)\mathrm{d}t + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \left|\int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci démontre que la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle converge dans $\mathbb{R}$, par complétude de $\mathbb{R}$. La limite de cette suite ne dépend pas de la suite exhaustive choisie par le lemme 2.1.52. On en déduit que l'intégrale de f converge sur I. Ceci achève la preuve de l'implication réciproque, et aussi la preuve de la propriété. ■

Une formulation alternative du critère de Cauchy continu précédent est donné par la propriété suivante.

Propriété 2.2.7 (Critère de Cauchy continu 2) *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui est Riemann-intégrable sur tout segment de I. L'intégrale de f converge sur I si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que, pour tout segment $[c,d] \subset I$ contenant $[a,b]$, on a*

$$\left|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Preuve. Exercice à partir de la propriété 2.2.5. ■

On peut également reformuler cette estimation en termes de restes, une fois acquise la convergence de l'intégrale sur I, comme le précise la propriété suivante.

Propriété 2.2.8 *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale converge sur I. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que pour tout segment $[c,d] \subset I$ contenant $[a,b]$, on a*

$$\left|\int_I f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Preuve. Soit $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Fixons $\varepsilon > 0$. Par la propriété 2.2.7, il existe $[a,b] \subset I$ tel que pour $[c,d] \subset I$ avec $[a,b] \subset [c,d]$, on a $|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t| < \varepsilon/3$. Soit $[c,d] \subset I$ un segment contenant $[a,b]$. Par exhaustivité de la suite $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $[a,b] \subset [a_n,b_n]$. Pour tout $n \geq N$, on a donc

$$\begin{aligned} \left|\int_{a^n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \left|\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient, puisque l'intégrale de f converge sur I,

$$\left|\int_I f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Remarque 2.2.9 *On abusera parfois de la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, même lorsque l'on n'intègre pas sur le segment $[a,b]$. Concrètement, on notera parfois $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ au lieu de $\int_{[0,1[} f(t)\mathrm{d}t$, de $\int_{]0,1]} f(t)\mathrm{d}t$, ou encore de $\int_{]0,1[} f(t)\mathrm{d}t$. On notera même parfois $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour $\int_{[0,+\infty[} f(t)\mathrm{d}t$ ou pour $\int_{]0,+\infty[} f(t)\mathrm{d}t$. Une des raisons pour cela est que la relation de Chasles se prolonge aux intégrales convergentes sur un intervalle, comme le montre la propriété suivante.*

Propriété 2.2.10 (Relation de Chasles pour les intégrales convergentes) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I, et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui est Riemann-intégrable sur tout segment de I. L'intégrale de f converge sur I si et seulement si elle converge sur $I\cap]-\infty,a]$ et sur $I\cap[a,+\infty[$. Dans ce cas, on a*

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_{I\cap]-\infty,a]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{I\cap[a,+\infty[} f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

Preuve. Raisonnons par double implication. Pour le sens direct, soit $([a_n,\tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de $I\cap]-\infty,a]$ et $([\tilde{a}_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de $I\cap[a,+\infty[$. Par exhaustivité de ces deux suites, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on a $\tilde{a}_n=\tilde{b}_n=a$. Pour $n\geq N$ et $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_{n+p}}^{\tilde{b}_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{\tilde{b}_n} f(t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{a_{n+p}}^{a} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{a} f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_{a_{n+p}}^{a} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{a} f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_{a_{n+p}}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_{a_{n+p}}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t - \int_I f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_I f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right|,
\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Fixons $\varepsilon>0$. Puisque l'intégrale de f converge sur I, la propriété 2.2.8 fournit un segment $[\alpha,\beta]\subset I$ tel que pour tout segment $[c,d]\subset I$ contenant $[\alpha,\beta]$, on a $\left|\int_I f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon/2$. On pose alors $A=\min(\alpha,a)$ et $B=\max(a,\beta)$, de sorte que $[\alpha,\beta]\subset[A,B]$, $A\in I\cap]-\infty,a]$ et $B\in I\cap[a,+\infty[$. Par exhaustivité de la suite $([a_n,\tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ dans $I\cap]-\infty,a]$, il existe $N_\varepsilon^1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N_\varepsilon^1$, $A\in[a_n,\tilde{b}_n]$. De même, il existe $N_\varepsilon^2\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N_\varepsilon^2$, $B\in[\tilde{a}_n,b_n]$. On en déduit que pour $n\geq\max(N_\varepsilon^1,N_\varepsilon^2)$ et tout $p\in\mathbb{N}$, $[\alpha,\beta]\subset[A,B]\subset[a_n,b_n]\subset[a_{n+p},b_n]$. À l'aide des inégalités précédentes, on obtient pour tout $n\geq\max(N,N_\varepsilon^1,N_\varepsilon^2)$,

$$\left|\int_{a_{n+p}}^{\tilde{b}_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{\tilde{b}_n} f(t)\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci assure que l'intégrale de f converge sur $I\cap]-\infty,a]$. Un raisonnement similaire sur la suite des intégrales sur les segments $[\tilde{a}_n,b_n]$ montre que l'intégrale de f converge également sur $I\cap[a,+\infty[$. Pour le sens réciproque, considérons une suite exhaustive $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I. Par exhaustivité, on peut supposer sans perte de généralité (en retirant un nombre fini des premiers termes de la suite de segments) que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq a$ et $a\leq b_n$. Observons que la suite $([a_n,a])_{n\in\mathbb{N}}$

est une suite exhaustive de segments de $I\cap]-\infty, a]$ et la suite $([a, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de $I \cap [a, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est intégrable sur le segment $[a_n, b_n]$, donc elle est intégrable sur les segments $[a_n, a]$ et $[a, b_n]$, et l'on a par la propriété 2.1.9

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t.$$

Puisque chacun des deux termes du membre de droite de cette égalité admet une limite finie quand n tend vers l'infini qui ne dépend pas de la suite choisie, il en est de même du membre de gauche. Ceci montre que l'intégrale de f converge sur I et l'on obtient la relation (2.11) en passant à la limite quand n tend vers l'infini. ∎

L'ensemble des fonctions d'intégrale convergente sur un intervalle est, en général, strictement plus grand que l'ensemble des fonctions absolument intégrables sur cet intervalle, comme on le vérifie sur l'exemple suivant.

Exemple 2.2.11 *La fonction*

$$f : \begin{pmatrix} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\sin(t)}{t} \end{pmatrix}$$

est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$, mais elle n'est pas absolument intégrable sur cet intervalle.

En effet, la fonction f est le produit de la fonction $t \mapsto 1/t$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [1, +\infty[$ et de la dérivée de la fonction $t \mapsto -\cos(t)$, qui est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. Par intégration par parties (voir CDI1), on a pour tout segment $[a, b] \subset [1, +\infty[$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Observons que la fonction $t \mapsto \cos(t)/t^2$ est continue sur $[1, +\infty[$. Elle est donc Riemann-intégrable sur tout segment de $[1, +\infty[$. De plus, elle vérifie pour tout $t \geq 1$, $|\cos(t)/t^2| \leq 1/t^2$. La fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après la proposition 2.1.76. Par conséquent, la fonction $t \mapsto \cos(t)/t^2$ est absolument intégrable sur $[1, +\infty[$. En particulier, son intégrale converge sur $[1, +\infty[$ par la propriété 2.2.2. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de $[1, +\infty[$. La suite $(\int_{a_n}^{b_n} \cos(t)/t^2\mathrm{d}t)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ qui ne dépend pas de la suite choisie. De plus, la suite $(\cos(a_n)/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\cos(1)$ (elle est égale à cette valeur à partir d'un certain rang), et la suite $(\cos(b_n)/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 car $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$. On en déduit que la suite $(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qui ne dépend pas de la suite exhaustive choisie. Ceci montre que la fonction f est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$.

Le fait que la fonction f n'est pas absolument intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ est laissé en exercice. On pourra minorer pour $n \geq 1$ les intégrales $\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |f(t)|\mathrm{d}t$ en observant que

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right], \qquad |\sin(t)| \geq \frac{1}{2},$$

et utiliser la relation de Chasles.

Comme conséquence de la relation de Chasles, on a le critère suivant de convergence des intégrales, qui est peut-être celui qui permet de mieux comprendre la dénomination d'"intégrale convergente".

Propriété 2.2.12 (Caractérisation des fonctions d'intégrale convergente) *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{C}$ qui est Riemann-intégrable sur tout segment de I. Pour tout $a \in I$, on peut définir les fonctions*

$$G_a : \begin{pmatrix} I\cap]-\infty, a] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_x^a f(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix} \qquad et \qquad D_a : \begin{pmatrix} I \cap [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

D'une part, l'intégrale de f converge sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction G_a admet une limite finie $\ell_g(a) \in \mathbb{C}$ en $\inf I$ et la fonction D_a admet une limite finie $\ell_d(a) \in \mathbb{C}$ en $\sup I$. D'autre part, l'intégrale de f converge sur I si et seulement s'il existe $a \in I$ tel que la fonction G_a admet une limite finie $\ell_g(a) \in \mathbb{C}$ en $\inf I$ et la fonction D_a admet une limite finie $\ell_d(a) \in \mathbb{C}$ en $\sup I$. Dans ce cas, on a pour tout $a \in I$,

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \ell_g(a) + \ell_d(a).$$

Preuve. Exercice ■

Terminons par une propriété de structure.

Propriété 2.2.13 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. L'ensemble $C(I, \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrables sur tout segment de I et dont l'intégrale converge sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui contient $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ (voir la propriété 2.1.63). L'application de $C(I, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie une fonction f sur $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $C(I, \mathbb{R})$. Elle prolonge la forme $\mathcal{I}$ définie à la propriété 2.1.63.*

Preuve. La propriété de structure de $C(I, \mathbb{R})$ et la linéarité de la forme sont une conséquence de la propriété 2.1.11 qui vaut sur les segments inclus dans I, et de la définition de l'intégrale comme limite d'une suite d'intégrales sur des segments de I. Leur preuve est laissée au lecteur. Le fait que la forme linéaire prolonge $\mathcal{I}$ est conséquence de la propriété 2.2.2. ■

Remarque 2.2.14 *On a une propriété analogue que $C(I, \mathbb{C})$, qui est laissée en exercice au lecteur.*

2.2.2 Rappel : Les deux formules de la moyenne

Les deux formules suivantes, dites "de la moyenne", sont attribuées au mathématicien français Pierre Bonnet.

Propriété 2.2.15 (Première formule de la moyenne) *Soit g une fonction Riemann-intégrable positive sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$), et soit f une fonction continue sur ce segment à valeurs réelles. Il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\mathrm{d}t. \tag{2.12}$$

Preuve. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles, donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ et $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que

$$f(x_m) = m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(x_M) = M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Puisque la fonction g est positive sur $[a,b]$, on a

$$\forall t \in [a,b], \qquad mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t).$$

Puisque la fonction f est continue sur $[a,b]$, elle est Riemann intégrable sur le segment $[a,b]$. Puisque de plus la fonction g est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, la fonction fg est également Riemann-intégrable sur ce segment. On déduit de l'inégalité précédente que

$$m\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq M\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$, alors $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0$ et l'on a (2.12) quel que soit $c \in [a,b]$. Sinon, $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t > 0$ et les inégalités ci-dessus fournissent

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \in [m,M].$$

Puisque la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs réelles, on peut lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Observons que m et M sont dans l'image du segment $[a,b]$ par f. Il en est donc de même de $\frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que (2.12) a lieu. ■

Remarque 2.2.16 *Sous les mêmes hypothèses, mais en autorisant la fonction f à prendre des valeurs complexes, la relation* (2.12) *n'est plus vraie en général. On peut par exemple considérer $f(t) = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{b-a}t}$ et $g(t) = 1$ pour s'en convaincre. On a cependant dans ce cas la majoration*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 2.2.17 (Seconde formule de la moyenne) *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a,b]$ (avec $a < b$), à valeurs réelles. Soit g une fonction positive décroissante sur $[a,b]$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(a)\int_a^c f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.13}$$

Preuve. Puisque la fonction g est décroissante sur le segment $[a,b]$, elle est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ par la propriété 2.1.38. Par suite, la fonction fg est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ par la propriété 2.1.39 puisque f l'est également. Le membre de gauche dans la relation (2.13) est donc bien défini. L'intégrale dans le membre de droite est quant à elle bien définie par la propriété 2.1.12 pour tout $c \in [a,b]$ car f est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ tout entier. Nous allons montrer qu'il existe un $c \in [a,b]$ tel que l'égalité (2.13) a lieu.
Pour cela, désignons pour tout entier $N \geq 1$ par $(t_i)_{0\leq i\leq N}$ la subdivision régulière du segment $[a,b]$ définie pour $i \in \{0,\cdots,N\}$ par $t_i = a + i\frac{b-a}{N}$. Posons pour tout tel entier N

$$I_N = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)g(t_k)\mathrm{d}t.$$

La fonction f est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ par hypothèse, donc il en est de même de $|f|$, et ces deux fonctions sont donc Riemann-intégrables en restriction à tout segment inclus dans

$[a, b]$. En particulier, on peut introduire les fonctions F et K définies par

$$F : \begin{pmatrix} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad K : \begin{pmatrix} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Puisque la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, la fonction F est continue sur le segment $[a, b]$ en vertu du corollaire 2.1.70. Puisque le segment $[a, b]$ est compact, et F est à valeurs réelles, la fonction F est bornée et atteint ses bornes : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$m = \inf_{x \in [a,b]} F(x) \qquad \text{et} \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} F(x).$$

De plus, dans l'esprit de la propriété 2.1.69, si $\overline{M}$ est un majorant de $|f|$ sur le segment $[a, b]$, on a

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad |K(x) - K(y)| \leq \overline{M}|x - y|,$$

et ainsi K est lipschitzienne sur $[a, b]$. Forts de ces observations, nous allons montrer que la suite $(I_N)_{N \geq 1}$ tend vers l'intégrale dans le membre de gauche de (2.13), et c'est à partir de I_N que nous obtiendrons le résultat sur cette intégrale, par passage à la limite. Par application répétée de la relation de Chasles (propritété 2.1.9), on a pour tout $N \geq 1$,

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent, par décroissance de g sur $[a, b]$, on a pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t - I_N \right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)|(\underbrace{g(t_k) - g(t)}_{\geq 0})\mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)| \left(g(t_k) - g(t_{k+1})\right) \mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(g(t_k) - g(t_{k+1})\right) \left(K(t_{k+1}) - K(t_k)\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(g(t_k) - g(t_{k+1})\right) \overline{M}(\underbrace{t_{k+1} - t_k}_{= \frac{b-a}{N}}) \\
&\leq \overline{M}\frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(g(t_k) - g(t_{k+1})\right) \\
&\leq \overline{M}\frac{b-a}{N} \left(g(a) - g(b)\right).
\end{aligned}$$

Ceci assure que la suite $(I_N)_{N \geq 1}$ converge vers $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Par ailleurs, on peut effectuer une transformation d'Abel dans l'écriture de I_N en remarquant que pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
I_N &= \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) \left(F(t_{k+1}) - F(t_k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k)F(t_{k+1}) - \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k)F(t_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} g(t_{k-1})F(t_k) - \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k)F(t_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} g(t_{k-1})F(t_k) - \sum_{k=1}^{N-1} g(t_k)F(t_k) + g(t_{N-1})F(b) - g(a)\underbrace{F(a)}_{=0} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \big(\underbrace{g(t_{k-1}) - g(t_k)}_{\geq 0}\big)F(t_k) + \underbrace{g(t_{N-1})}_{\geq 0} F(b). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $N \geq 1$,

$$m \sum_{k=1}^{N-1} \left(g(t_{k-1}) - g(t_k)\right) + mg(t_{N-1}) \leq I_N \leq M \sum_{k=1}^{N-1} \left(g(t_{k-1}) - g(t_k)\right) + Mg(t_{N-1}).$$

Ainsi, puisque les sommes ci-dessus sont téléscopiques, pour tout $N \geq 1$,

$$mg(a) \leq I_N \leq Mg(a).$$

Passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans ces inégalités, on a, compte tenu de la convergence de la suite $(I_N)_{N\geq 1}$ montrée précédemment,

$$mg(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq Mg(a).$$

Si $g(a) = 0$, alors la fonction g est identiquement nulle sur $[a, b]$ et donc $0 \leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0$. Dans ce cas, la relation (2.13) est vérifiée quel que soit $c \in [a, b]$. Sinon, $g(a) > 0$, et l'on a donc

$$\frac{1}{g(a)} \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \in [m, M]\,.$$

La fonction F étant continue sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles, et prenant les valeurs m et M, on sait par le théorème des valeurs intermédiaires qu'elle prend toutes les valeurs entre m et M. En particulier, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$F(c) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci achève la preuve de la démonstration. ■

Remarque 2.2.18 *L'identité* (2.13) *dans la propriété précédente est encore vraie lorsque $a = b$: il suffit de prendre $c = a = b$ et l'on a $0 = g(a) \times 0$.*

Remarque 2.2.19 *Si l'on suppose de plus que f est continue sur le segment $[a, b]$ et que g y est* *de classe $\mathcal{C}^1$, alors la preuve de la seconde formule de la moyenne est plus simple. En effet, on peut écrire directement par intégration par parties que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(t)g(t)\mathrm{d}t = [Fg]_a^b + \int_a^b F(t)\left(-g'(t)\right)\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction g est décroissante sur $[a,b]$, sa dérivée est négative sur le segment $[a,b]$. Par la première formule de la moyenne, on sait qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b F(t)\left(-g'(t)\right)\mathrm{d}t = F(d)\int_a^b \left(-g'(t)\right)\mathrm{d}t = (g(a)-g(b))\int_a^d f(t)\mathrm{d}t.$$

Compte tenu du fait que $F(a)=0$, on en déduit que

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(b)F(b) + (g(a)-g(b))\,F(d).$$

Le cas où $g(a)=0$ correspond à $g \equiv 0$ sur $[a,b]$, et la seconde formule de la moyenne est vraie pour tout $c \in [a,b]$. Supposons donc que $g(a)>0$. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(a)\Bigg(\underbrace{\frac{g(b)}{g(a)}}_{\in[0,1]}F(b) + \underbrace{\Big(1-\frac{g(b)}{g(a)}\Big)}_{\in[0,1]}F(d)\Bigg).$$

On en déduit que le terme en facteur de $g(a)$ dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus est dans le segment d'extrémités $F(b)$ et $F(d)$. Puisque la fonction F est continue sur le segment $[a,b]$ et $d \in [a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$F(c) = \frac{g(b)}{g(a)}F(b) + \Big(1-\frac{g(b)}{g(a)}\Big)F(d).$$

On a ainsi montré la seconde formule de la moyenne, dans un cas plus restrictif, sans avoir recours à la suite $(I_N)_{N\geq 1}$.

Cette propriété 2.2.17 ne vaut que pour les fonctions à valeurs réelles. Pour les fonctions à valeurs complexes, on a toutefois, dans le même esprit, la propriété suivante, dont la preuve s'inspire de la preuve précédente.

Propriété 2.2.20 *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a,b]$ (avec $a<b$), à valeurs complexes. Soit g une fonction positive décroissante sur $[a,b]$. On a l'inégalité*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq g(a)\sup_{c\in[a,b]}\left|\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right|. \tag{2.15}$$

Preuve. Reprenant les notations de la preuve précédente, on peut définir la suite I_N, les fonctions F et K, qui sont toujours lipschitziennes donc continues sur le segment $[a,b]$, et prouver comme précédemment que la suite $(I_N)_{N\geq 1}$ converge vers $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Menant la même transformation d'Abel que ci-dessus, on aboutit à (2.14). De cette égalité, en notant $C = \sup_{x\in[a,b]}|F(x)|$, on obtient pour tout $N \geq 1$,

$$|I_N| \leq C\left(\sum_{k=1}^{N-1}\left(g(t_{k-1})-g(t_k)\right)+g(t_{N-1})\right) = Cg(a).$$

Passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient l'inégalité (2.15) que l'on souhaitait démontrer. ■

Remarque 2.2.21 *Un intérêt remarquable de l'inégalité* (2.15) *est que le membre de droite comporte un module* **à l'extérieur** *de l'intégrale. Ceci signifie que les oscillations dans le cas complexe, et les changements de signe dans le cas réel, qui rendent des intégrales convergentes sans qu'il y ait d'intégrabilité absolue, sont pris en compte par cette inégalité. Il faut bien garder à l'esprit que l'inégalité*

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t,$$

est vraie dès que la fonction f est Riemann intégrable sur le segment $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes, mais le membre de droite peut être considérablement plus grand que le membre de gauche dans cette inégalité[4]*. En ce sens, l'inégalité* (2.15) *est très précise.*

2.2.3 Le critère d'Abel pour la convergence des intégrales

Lorsque l'on souhaite montrer qu'une intégrale d'une fonction sur un intervalle converge et que les critères d'intégrabilité absolue n'ont pas fonctionné (ou, idéalement, quand on est certain que l'intégrale ne converge pas absolument), on peut utiliser le critère suivant, qui permet parfois de conclure.

Propriété 2.2.22 (Critère d'Abel pour la convergence des intégrales) *Soit a, b avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On se donne une fonction f de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a,b[$, et une fonction g positive et décroissante sur $[a,b[$, tendant vers 0 en b. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in [a,b[, \qquad \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq M.$$

L'intégrale de fg converge sur $[a,b[$.

Preuve. Puisque g est décroissante sur $[a,b[$, elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a,b[$. Par produit, la fonction fg est donc également Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a,b[$. Utilisons le critère de Cauchy séquentiel de la propriété 2.2.4. Pour cela, considérons une suite $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de $[a,b[$ avec $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$. À l'aide de la relation de Chasles (propriété 2.1.9), écrivons que pour $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t. \tag{2.16}$$

Soit $\delta > 0$ tel que $[a, a+2\delta[\subset [a,b[$. La fonction fg est Riemann-intégrable sur le segment $[a, a+\delta]$, donc sa valeur absolue y est majorée par un certain $C > 0$. Par ailleurs, utilisant la propriété de la

4. On pourra par exemple considérer $f_n(t) = \cos(\frac{2n\pi}{b-a}t)$, pour $n \geq 1$.

moyenne 2.2.20, on peut écrire pour tout $n,p\in\mathbb{N}$, lorsque $b_n\leq b_{n+p}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| &\leq g(b_n)\sup_{c\in[b_n,b_{n+p}]}\left|\int_{b_n}^{c} f(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\leq g(b_n)\left(\left|\int_a^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right|+\sup_{c\in[b_n,b_{n+p}]}\left|\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right|\right)\\ &\leq 2Mg(b_n). \end{aligned}\tag{2.17}$$

Par une étude similaire laissée au lecteur dans le cas où $b_{n+p}<b_n$, on conclut que pour tout $n,p\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|\leq 2M\max(g(b_n),g(b_{n+p})).$$

Fixons maintenant $\varepsilon>0$. Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, il existe un rang $N_\varepsilon^1\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $n\geq N_\varepsilon^1$, on a $0\leq a_n-a\leq\min(\varepsilon/(2C),\delta)$. Par conséquent, on a pour tout $n\geq N_\varepsilon^1$ et $p\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{\min(a_n,a_{n+p})}^{\max(a_n,a_{n+p})}|f(t)g(t)|\mathrm{d}t\\ &\leq \int_a^{\max(a_n,a_{n+p})}|f(t)g(t)|\mathrm{d}t\\ &\leq C(\max(a_{n+p},a_n)-a)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}\tag{2.18}$$

Par ailleurs, puisque la fonction g tend vers 0 en b par hypothèse, et puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers b, il existe un rang $N_\varepsilon^2\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N_\varepsilon^2$, $|g(b_n)|\leq\varepsilon/(4M)$. Utilisant (2.17), on obtient pour tout $n\geq N_\varepsilon^2$ et $p\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.\tag{2.19}$$

Combinant (2.18) et (2.19) dans l'égalité (2.16), il vient par inégalité triangulaire que pour tout $n\geq\max(N_\varepsilon^1,N_\varepsilon^2)$, et tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$\left|\int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t-\int_{a_n}^{b_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ainsi, la propriété 2.2.4 assure que l'intégrale de fg converge sur $[a,b[$. ■

Remarque 2.2.23 *On peut évidemment écrire et montrer un critère d'Abel similaire pour des produits de fonctions sur un intervalle de la forme $]a,b]$ avec $-\infty\leq a<b<+\infty$ et des hypothèses adaptées. C'est un bon exercice pour le lecteur.*

Remarque 2.2.24 *Les propriétés 2.1.69 et 2.1.72, ainsi que leurs corollaires 2.1.70 et 2.1.73, qui n'utilisent que des propriétés locales (continuité, dérivabilité, etc) sont encore vrais si l'on suppose simplement que f est d'intégrale convergente sur I (ce qui est une hypothèse moins forte que $f\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$), comme le lecteur pourra s'en convaincre en exercice.*

2.2.4 Espace des fonctions de carré intégrable, inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide.

Définition 2.2.25 *On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions (Riemann-intégrables sur tout segment inclus dans I) dont le carré est absolument intégrable sur I. Pour $f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$, on note*

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Propriété 2.2.26 *L'ensemble $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. L'application $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi-norme sur cet espace.*

Preuve. Exercice. ■

Propriété 2.2.27 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit $f, g \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$. La fonction fg est absolument intégrable sur I et l'on a*

$$\left|\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_I |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_I |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |g(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Soit $f, g \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$. Observons que pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2.$$

Puisque f et g sont Riemann-intégrables sur tout segment de I, il en est de même de fg, de $|fg|$, de $|f|^2$ et de $|g|^2$. Par suite, pour tout segment $[a, b] \subset I$,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Puisque $f, g \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$, le membre de droite de cette inégalité est majoré indépendamment du segment $[a, b]$. Il en est donc de même du membre de gauche. On en déduit que fg est absolument intégrable sur I (*i.e.* $fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$). Utilisant l'inégalité (2.6) de la propriété 2.1.62, on obtient

$$\left|\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_I |f(x)g(x)|\mathrm{d}x.$$

Pour montrer l'autre partie de l'inégalité, on peut donc supposer sans perte de généralité que f et g sont à valeurs positives sur I. Dans ce cas, on définit classiquement la fonction

$$P : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \int_I (f(x) + \lambda g(x))^2 \mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

qui est bien définie par la propriété précédente puisque f et g sont de carrés sommables sur I. Remarquons que la fonction P est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ par positivité de l'intégrale et que c'est une fonction poynomiale de degré au plus 2. En effet, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad P(\lambda) = \left(\int_I g(x)^2 \mathrm{d}x\right)\lambda^2 + 2\left(\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)\lambda + \left(\int_I f(x)^2 \mathrm{d}x\right).$$

Supposons que $\int_I g(x)^2 \mathrm{d}x = 0$. Dans ce cas, l'intégrale de g^2 est nulle sur tout segment de I. Donc l'intégrale de g également, et il en est de même de l'intégrale de fg. On en déduit que l'intégrale de fg est nulle sur I. Ainsi, on a bien

$$\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_I f(x)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I g(x)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.20}$$

Supposons maintenant que $\int_I g(x)^2\mathrm{d}x > 0$. Dans ce cas, puisque P est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif ou nul. Cette condition sécrit

$$4\left(\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_I f(x)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_I g(x)^2\mathrm{d}x\right) \leq 0.$$

On en déduit que (2.20) est encore vraie dans ce cas. Ceci achève la preuve de l'inégalité. ■

2.3 Intégrales à paramètres

2.3.1 Fonctions définies par une intégrale sur un segment fixe

Commençons par énoncer et démontrer un résultat assurant la continuité.

Propriété 2.3.1 *Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$ et (X, d) un espace métrique localement compact (voir la définition 1.1.39). Soit f une fonction continue sur $X \times [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

est continue sur X.

Preuve. Remarquons que la continuité de la fonction f sur $X \times [a, b]$ implique que, pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue, donc Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Ainsi, la fonction F est bien définie sur X. Par ailleurs, si l'on fixe $x_0 \in X$, alors, puisque X est localement compact, il existe un voisinage V de x_0 dans X qui est compact. Ainsi, la partie $V \times [a, b]$ est compacte, comme produit de compacts. La fonction f étant continue, par restriction, à cette partie, il vient qu'elle est uniformément continue sur cette partie par le théorème de Heine [5]. Fixons $\varepsilon > 0$. Par le raisonnement précédent, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in V, \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b], \qquad \left(|t_1 - t_2| + d(x, y) < \eta \Longrightarrow |f(x, t_1) - f(y, t_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

En particulier, dès que $x \in V$ est tel que $d(x, x_0) < \eta$, on a

$$\forall t \in [a, b], \qquad |f(x, t) - f(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On en déduit que, pour $x \in V$ tel que $d(x, x_0) < \eta$,

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^b (f(x,t) - f(x_0,t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ceci montre que la fonction F est continue en tout $x_0 \in X$. ■

5. Ou plutôt par une généralisation du théorème de Heine. Voir par exemple le théorème 7-5.22 dans [12].

Remarque 2.3.2 *Le résultat vaut également pour une fonction f continue sur $X \times \Pi_{i=1}^d [a_i, b_i]$, et dans ce cas on a la continuité de la fonction $F(x) = \int_{\Pi_{i=1}^d [a_i,b_i]} f(x, t_1, \cdots, t_d) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_d$ sur X. La preuve est très similaire (et laissée en exercice).*

Remarque 2.3.3 *On généralise la propriété précédente aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$ en séparant partie réelle et partie imaginaire, et en raisonnant composante par composante.*

Présentons maintenant un résultat assurant le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par une intégrale sur un segment fixe.

Propriété 2.3.4 *Soit X un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, et a et b deux nombres réels avec $a < b$. On se donne une fonction f de $X \times [a, b]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on suppose continue sur $X \times [a, b]$. On suppose de plus que, pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur $X \times [a, b]$. Dans ce cas, la fonction F définie en (2.21) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et l'on a*

$$\forall i \in \{1, \cdots, d\}, \quad \forall (x_1, \cdots, x_d) \in X, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_d) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \mathrm{d}t. \tag{2.22}$$

Remarque 2.3.5 *L'hypothèse sur les dérivées partielles premières de la fonction f signifie que pour tout $t \in [a, b]$, $x \in X$ et $i \in \{1, \cdots, d\}$, en notant e_i le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, le rapport (défini pour h réel différent de 0 de valeur absolue assez petite car X est ouvert) $\frac{f(x+he_i,t)-f(x,t)}{h}$ admet une limite réelle (notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$), et que les d fonctions de $X \times [a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ainsi obtenues sont continues sur $X \times [a, b]$.*

Preuve. Commençons par remarquer que puisque X est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, il est localement compact et la propriété précédente s'applique, de sorte que la fonction F est bien définie et continue sur X. Fixons maintenant $i \in \{1, \cdots, d\}$ et montrons que la fonction F admet une dérivée partielle par rapport à x_i en tout point de X. Fixons $x = (x_1, \cdots, x_d) \in X$ et notons e_i le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Observons que, puisque X est ouvert, pour h réel assez petit, on a $x + he_i \in X$. De plus, pour un tel h, on a

$$F(x + he_i) - F(x) = \int_a^b (f(x + he_i, t) - f(x, t)) \, \mathrm{d}t.$$

Fixons $t \in [a, b]$. La fonction $s \mapsto f(x + se_i, t)$ est continue sur $[0, h]$ si $h > 0$ et sur $[h, 0]$ si $h < 0$. Elle est de plus dérivable sur ce segment, comme assuré par l'hypothèse sur f (et un résultat sur la dérivabilité des fonctions composées), de dérivée en s égale à $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + se_i, t)$. Ainsi, sa dérivée est continue sur le segment $[0, h]$ (ou $[h, 0]$) par hypothèse sur f. Par conséquent, le théorème fondamental du calcul vu en CDI1 assure que

$$f(x + he_i, t) - f(x, t) = \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + se_i, t) \mathrm{d}s.$$

Ceci implique, toujours pour h réel non nul assez petit, disons dans $] - \delta, \delta[\setminus\{0\}$ pour un certain $\delta > 0$, par le théorème de changement de variable vu en CDI1,

$$\frac{f(x + he_i, t) - f(x, t)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \sigma he_i, t) \mathrm{d}\sigma,$$

d'où l'on obtient que

$$\frac{F(x + he_i) - F(x)}{h} = \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + h\sigma, t) \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}t. \tag{2.23}$$

La fonction
$$g : \begin{pmatrix}]-\delta,\delta[\times([a,b]\times[0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,(t,\sigma)) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h\sigma,t) \end{pmatrix},$$
est continue sur $]-\delta,\delta[\times([a,b]\times[0,1])$, par hypothèse sur f et par utilisation des résultats sur les produits et compositions de fonctions continues. On peut donc lui appliquer le résultat montré à la propriété 2.3.1. Celui-ci assure que la fonction
$$G : \begin{pmatrix}]-\delta,\delta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$
est continue sur $]-\delta,\delta[$. En particulier, on peut passer à la limite quand h tend vers 0 dans le membre de droite de (2.23), et l'on obtient que F admet une dérivée partielle par rapport à la $i$ème variable en x, et que cette dérivée partielle au point x est
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+0\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t.$$
Condidérant les d dérivées partielles de F ainsi obtenues sur X, et utilisant de nouveau la propriété 2.3.1 pour montrer qu'elles sont continues sur X, on déduit d'un résultat de CDI1 que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert X et vérifie bien (2.22). ■

Remarque 2.3.6 *Le résultat vaut également pour une fonction f vérifiant les hypothèses sur $X \times \Pi_{i=1}^d[a_i,b_i]$, et dans ce cas on a le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction $F(x) = \int_{\Pi_{i=1}^d[a_i,b_i]} f(x,t_1,\cdots,t_d)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_d$ sur X. La preuve est très similaire (et laissée en exercice).*

Remarque 2.3.7 *On généralise la propriété précédente aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, $\mathbb{C}^{\tilde{d}}$ en séparant partie réelle et partie imaginaire, et en raisonnant composante par composante.*

Remarque 2.3.8 *Le résultat précédent vaut également lorsque X est un intervalle (non nécessairement ouvert) de $\mathbb{R}$.*

Exercice 2.3.9 (Calcul de l'intégrale de Gauss)

1. *Justifier que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.*
2. *Définissons les fonctions*
$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$
Montrer que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de F et F'.
3. *Calculer $H(0)$ et montrer que $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.*
4. *Déduire des questions précédentes que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\pi}{4} - H(x) = F(x)^2.$$
5. *En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.*

2.3.2 Fonctions définies par une intégrale sur un segment variable

Un résultat de continuité

Propriété 2.3.10 *Soit (X, d) un espace métrique localement compact et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit une fonction f continue sur $X \times [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} X \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,T) & \longmapsto & \int_a^T f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

est continue sur $X \times [a, b]$.

Preuve. Fixons $(x, T) \in X \times [a, b]$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur le segment $[a, T]$, par conséquent elle est Riemann-intégrable sur ce segment. Ceci assure que $F(x, T)$ est bien défini. Observons que, pour $y \in X$ et $\delta T \in \mathbb{R}$ tel que $T + \delta T \in [a, b]$, on a

$$F(y, T + \delta T) - F(x, T) = F(y, T + \delta T) - F(y, T) + F(y, T) - F(x, T). \tag{2.24}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque X est localement compact, il existe un voisinage compact V de x dans X. Puisque V et $[a, b]$ sont compacts, $V \times [a, b]$ est compact. Puisque f est continue sur ce compact, elle y est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $(x, t) \in V \times [a, b]$, $|f(y, t)| \leq M$. Ceci implique que, si $|\delta T| < \varepsilon/(2M)$, alors pour tout $y \in V$,

$$|F(y, T + \delta T) - F(y, T)| \leq \int_{\min(T,T+\delta T)}^{\max(T,T+\delta T)} |f(y, t)|\mathrm{d}t \leq M|\delta T| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.25}$$

Puisque f est continue sur le compact $V \times [a, b]$, elle est uniformément continue sur ce compact par le théorème de Heine [6]. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $y_1, y_2 \in V$ et $t_1, t_2 \in [a, b]$, si $d(y_1, y_2) + |t_1 - t_2| < \eta$, alors $|f(y_1, t_1) - f(y_2, t_2)| < \varepsilon/(2(b - a))$. On en déduit que pour tout $y \in V \cap B(x, \eta[$, on a

$$|F(y, T) - F(x, T)| \leq \int_a^T |f(y, t) - f(x, t)|\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{T - a}{b - a} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.26}$$

Notons $W = V \cap B(x, \eta[$. Remarquons que W est un voisinage de x, puisque c'est une intersection finie de voisinages de x. Utilisant les majorations (2.25) et (2.26) après une inégalité triangulaire dans le membre de droite (2.24), on obient pour $y \in W$ et $\delta T \in \mathbb{R}$ tel que $|\delta T| < \varepsilon/(2M)$,

$$|F(y, T + \delta T) - F(x, T)| \leq |F(y, T + \delta T) - F(y, T)| + |F(y, T) - F(x, T)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci démontre la continuité de F en (x, T). ∎

Remarque 2.3.11 *Utilisant la relation de Chasles (propriété 2.1.9) ainsi que la propriété de continuité d'une intégrale sur un segment fixe (propritété 2.3.1), on obtient facilement que, sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 2.3.10, pour tout $c \in [a, b]$, la fonction $(x, T) \mapsto \int_c^T f(x, t)\mathrm{d}t$ est continue sur $X \times [a, b]$.*

Corollaire 2.3.12 *Soient $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ deux segments de $\mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ et $a < b$. Soit f une fonction continue de $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et φ et ψ deux fonctions continues de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$. Alors la fonction*

$$F : \begin{pmatrix} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

6. Ou plutôt par une généralisation du théorème de Heine. Voir par exemple le théorème 7-5.22 dans [12].

est continue sur $[\alpha, \beta]$*.*

Preuve. Le segment $[\alpha, \beta]$ est localement compact. Puisque la fonction f est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$, la propriété 2.3.10 assure que la fonction $G : (x, T) \mapsto \int_a^T f(x, t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$. Par suite, la fonction $F_1 : (x, T_1, T_2) \mapsto G(x, T_1) - G(x, T_2)$ est continue sur $[\alpha, \beta] \times [a, b] \times [a, b]$. Observons que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$,

$$F(x) = F_1(x, \varphi(x), \psi(x)),$$

ce qui implique que F est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$ par composition de fonctions continues. ■

Un résultat de dérivabilité

Propriété 2.3.13 *Soit* X *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^d$*, et* a *et* b *deux nombres réels avec* $a < b$*. On se donne une fonction* f *de* $X \times [a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$*, que l'on suppose continue sur* $X \times [a, b]$*. On suppose de plus que, pour tout* $i \in \{1, \cdots, d\}$*, la fonction* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *existe et est continue sur* $X \times [a, b]$*. Dans ce cas, la fonction*

$$F : \begin{pmatrix} X \times [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, T) & \longmapsto & \int_a^T f(x, t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

admet des dérivées partielles premières par rapport à chacune de ses $d + 1$ *variables en tout point de* $X \times [a, b]$ *et celles-ci sont continues sur* $X \times [a, b]$[7] *et l'on a*

$$\forall i \in \{1, \cdots, d\}, \quad \forall (x_1, \cdots, x_d) \in X, \quad \forall T \in [a, b], \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_d, T) = \int_a^T \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)\mathrm{d}t. \tag{2.27}$$

et

$$\forall (x_1, \cdots, x_d) \in X, \quad \forall T \in [a, b], \qquad \frac{\partial F}{\partial T}(x_1, \ldots, x_d, T) = f(x, T). \tag{2.28}$$

Preuve. L'existence des dérivées partielles premières par rapport aux d premières variables s'obtient, à $T \in [a, b]$ fixé, avec la proposition 2.3.4 appliquée à la fonction G définie sur X par $G(x_1, \cdots, x_d) = F(x_1, \cdots, x_d, T)$. On obtient ainsi (2.27). La continuité de ces d dérivées partielles premières sur $X \times [a, b]$ est conséquence de la continuité des d dérivées partielles premières correspondantes de f par rapport aux mêmes variables sur le même ensemble (en appliquant la propriété de continuité 2.3.10 qui assure la continuité des d fonctions $(x_1, \cdots, x_d, T) \mapsto \int_a^T \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_d, t)\mathrm{d}t$). L'existence de la dérivée partielle première de F par rapport à sa dernière variable s'obtient, à $(x_1, \cdots, x_d) \in X$ fixé en appliquant le théorème fondamental du calcul à la fonction $g(T) = \int_a^T f(x_1, \cdots, x_d, t)\mathrm{d}t$. On obtient ainsi (2.28). La continuité de cette dérivée partielle sur $X \times [a, b]$ découle de l'hypothèse de continuité de f sur $X \times [a, b]$. ■

2.3.3 Fonctions définies par une intégrale convergente sur un intervalle fixe

Un exemple

Considérons la fonction

$$f : \begin{pmatrix} [0, 1] \times [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, t) & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-xt} \end{pmatrix}.$$

7. On prendra garde ici au fait que $X \times [a, b]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$, ce qui explique que l'on ne parle pas de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $X \times [a, b]$ dans ce syllabus.

On vérifie que la fonction f est continue sur $[0,1] \times [0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est d'intégrale (absolument) convergente sur $[0,+\infty[$. On peut ainsi définir la fonction

$$F : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $F(0) = 0$ alors que pour tout $x \in]0,1]$, $F(x) = 1$. Ainsi, malgré la continuité de f sur $[0,1] \times [0,+\infty[$, la fonction F n'est pas continue sur $[0,1]$. Ceci est une différence majeure avec le cas où l'on intègre sur un segment fixe une fonction globalement continue par rapport au couple formé du paramètre et de la variable d'intégration (voir propriété 2.3.1).

Notion d'intégrale convergeant uniformément par rapport à un paramètre

Soit X un ensemble non vide, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est d'intégrale convergente sur I. Utilisant la propriété 2.2.8, ceci signifie que

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I,\ \forall [c,d] \subset I, \qquad \left([a,b] \subset [c,d] \Longrightarrow \left| \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon \right).$$

On dira que l'intégrale de f converge sur I *uniformément sur* X *par rapport au paramètre* x lorsque le segment $[a,b]$ de la propriété ci-dessus peut être choisi de manière indépendante de x dans X.

Définition 2.3.14 *Soit X un ensemble non vide, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment de I. On dit que* **l'intégrale de f converge sur I uniformément sur X par rapport au paramètre x** *lorsque pour tout $x \in X$, l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I et de plus*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I,\ \forall x \in X,\ \forall [c,d] \subset I, \qquad \left([a,b] \subset [c,d] \Longrightarrow \left| \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon \right).$$

On peut également, dans l'esprit de la propriété 2.2.7, donner le critère suivant.

Propriété 2.3.15 (critère de Cauchy pour la convergence uniforme des intégrales) *Soit X un ensemble non vide, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment de I. L'intégrale de f converge sur I uniformément sur X par rapport au paramètre x si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I,\ \forall x \in X,\ \forall [c,d] \subset I, \qquad \left([a,b] \subset [c,d] \Longrightarrow \left| \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon \right).$$

Preuve. C'est exactement la même preuve que celle de l'equivalence entre les propriétés 2.2.7 et 2.2.8, de manière uniforme par rapport à $x \in X$. Elle est donc laissée en exercice. ∎

Remarque 2.3.16 *Une autre formulation équivalente, sous les mêmes hypothèses, à la convergence des intégrales sur I uniformément par rapport au paramètre $x \in X$, est que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I,\ \forall [c,d] \subset I,\ \textit{avec } [a,b] \subset [c,d], \qquad \sup_{x \in X} \left(\left| \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \right| \right) < \varepsilon.$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I, \qquad \sup_{[c,d] \ \textit{avec } [a,b] \subset [c,d] \subset I} \ \sup_{x \in X} \left(\left| \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \right| \right) < \varepsilon.$$

Remarque 2.3.17 *Une dernière formulation équivalente, sous les mêmes hypothèses, à la convergence des intégrales sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X est de dire : quelle que soit la suite exhaustive $([a_n,b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de segments de I, la suite de fonctions $\left(\alpha_n(x) = \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X (ou est uniformément de Cauchy sur X), comme on le verra par exemple dans la preuve de la propriété 2.3.18 .*

Retour sur l'exemple précédent

Dans l'exemple précédent, on a, pour $x \in]0,1]$ et $[c,d] \subset [0,+\infty[$,

$$\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t = x \int_c^d \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = x \left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x} \right]_c^d = \mathrm{e}^{-xc} - \mathrm{e}^{-xd}.$$

Ainsi,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t \right| = \left| 1 - \mathrm{e}^{-xc} + \mathrm{e}^{-xd} \right| = 1 - \mathrm{e}^{-xc} + \mathrm{e}^{-xd}.$$

Fixons $[a,b] \subset I$. Choisissant $[c,d] \subset I$ avec $c = 0$ et $d \geq b$, on a $[a,b] \subset [c,d]$. Pour tout $x \in]0,1]$, on a donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t \right| = \mathrm{e}^{-xd}.$$

Ceci implique (en traitant séparément le cas $x = 0$ qui est trivial) que

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t \right| = 1.$$

En particulier, on a pour tout segment $[a,b] \subset I$,

$$\sup_{[c,d] \text{ avec } [a,b] \subset [c,d] \subset I} \ \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t \right| \geq 1.$$

On en déduit que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ n'est pas convergente sur $\mathbb{R}^+$ uniformément par rapport au paramètre x sur $[0,1]$. L'objet de la prochaine propriété est de montrer que la continuité globale de f sur $X \times I$ et la convergence des intégrales sur I de $t \mapsto f(x,t)$ uniformément par rapport au paramètre x sur X suffit à assurer la continuité de F sur X.

Une condition suffisante de continuité

Propriété 2.3.18 *Soit (X,d) un espace métrique localement compact, et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide. On se donne une fonction f de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose continue sur $X \times I$, et telle que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

est continue sur X.

Preuve. À $x \in X$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est d'intégrale convergente sur I, de sorte que $F(x)$ est bien défini. Soit $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Puisque f est continue sur $X \times I$, elle est continue en restriction à $X \times [a_n,b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété 2.3.1 assure que la fonction F_n est continue sur X pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on a

$$|F(x) - F_n(x)| = \left| \int_I f(x,t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}t \right|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence des intégrales de $t \mapsto f(x,t)$ sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X, il existe $[a^\varepsilon, b^\varepsilon] \subset I$ tel que

$$\forall x \in X,\ \forall [c,d] \subset I \text{ avec } [a^\varepsilon,b^\varepsilon] \subset [c,d], \qquad \left| \int_I f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Par exhaustivité de la suite $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $[a^\varepsilon,b^\varepsilon] \subset [a_n,b_n]$. Par suite, pour $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\sup_{x\in X} |F(x) - F_n(x)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur X. Puisque chacune des fonctions F_n est continue sur X, il en est de même de F par le corollaire 1.2.10. ∎

Une condition suffisante de dérivabilité (caractère $\mathcal{C}^1$)

Propriété 2.3.19 *Soit X un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Soit f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose continue sur $X \times I$. On suppose que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X. On suppose de plus que f admet des dérivées partielles premières par rapport à ses d premières variables en tout point de $X \times I$ et que les d fonctions $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ sont continues sur $X \times I$. On suppose enfin que pour tout $i \in \{1,\cdots,d\}$, l'intégrale de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X. La fonction F définie en* (2.29) *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X, et l'on a*

$$\forall i \in \{1,\cdots,d\},\ \forall x \in X, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t. \tag{2.30}$$

Remarque 2.3.20 *On peut remplacer l'hypothèse "X est un ouvert de $\mathbb{R}^d$" par "X est un intervalle de $\mathbb{R}$" et avoir la même conclusion (avec les mêmes autres hypothèses) dans la propriété précédente.*

Preuve. On peut travailler comme dans la preuve précédente avec les mêmes fonctions F_n, dont on vérifie cette fois qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur X par la propriété 2.3.4. De plus, cette suite converge vers F uniformément sur X et chaque suite de dérivées partielles $\frac{\partial F_n}{\partial x_i}$ converge uniformément sur X vers $x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t$. Par le théorème 1.3.5, il vient que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et que (2.30) est vérifiée. ∎

2.3.4 Deux conditions suffisantes de convergence uniforme d'intégrales

Propriété 2.3.21 (Critère de Weierstrass pour la convergence uniforme des intégrales) *Soit $I \neq \emptyset$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X \neq \emptyset$ un ensemble. Soit f une application de $X \times I$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I. On suppose qu'il existe une fonction g de I dans $\mathbb{R}^+$ absolument intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in X, \quad \forall t \in I, \qquad |f(x,t)| \leq g(t). \tag{2.31}$$

Alors l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I, uniformément par rapport au paramètre x dans X.

Preuve. Remarquons que, si $[a,b] \subset I$ et $[c,d] \subset I$ avec $[a,b] \subset [c,d]$, alors la majoration (2.31) assure que pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_c^a f(x,t)\mathrm{d}t + \int_b^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_c^a f(x,t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_b^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_c^a |f(x,t)|\mathrm{d}t + \int_b^d |f(x,t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_c^a g(t)\mathrm{d}t + \int_b^d g(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \int_c^d g(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque g est positive et d'intégrale convergente sur I, la propriété 2.2.7 de Cauchy assure qu'il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que pour tout segment $[c,d] \subset I$ contenant $[a,b]$, on a $\int_c^d g(t)\mathrm{d}t - \int_a^d g(t)\mathrm{d}t < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout segment $[c,d] \subset I$ avec $[a,b] \subset [c,d]$, les majorations précédentes impliquent que

$$\forall x \in X, \qquad \left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

La propriété 2.3.15 assure alors que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X. ∎

Remarque 2.3.22 *L'inégalité* (2.31) *demande une majoration* **du module** *de l'intégrande à paramètre par une fonction* **intégrable sur** *I, de manière* **indépendante** *du paramètre x dans X. Il s'agit d'un analogue du critère de Weierstrass (déjà vu pour les séries de fonctions) pour les intégrales à paramètres.*

On présente le critère suivant, dit d'Abel pour la convergence uniforme des intégrales, sur un intervalle de la forme $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On peut bien sûr écrire un théorème similaire (en exercice) sur $]a, b]$ lorsque $-\infty \leq a < b < +\infty$.

Propriété 2.3.23 (Critère d'Abel pour la convergence uniforme des intégrales) *Soit $I = [a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $X \neq \emptyset$ un ensemble. Soit u une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{C}$, telle que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto u(x, t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I et il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in X, \quad \forall c \in [a, b[, \qquad \left| \int_a^c u(x, t) \mathrm{d}t \right| \leq M.$$

Soit v une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto v(x, t)$ est décroissante sur $[a, b[$ et est de limite nulle en b^- de manière uniforme par rapport à $x \in X$, c'est-à-dire telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists c_\varepsilon \in [a, b[, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in [c_\varepsilon, b[, \qquad |v(x, t)| < \varepsilon.$$

Alors la fonction $f = uv$ a la propriété suivante : l'intégrale de $t \mapsto f(x, t)$ converge sur I, uniformément par rapport au paramètre x dans X.

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve de la propriété 2.2.22, et de s'apercevoir que, grâce aux hypothèses de la propritété 2.3.23, les majorations s'obtienent de manière uniforme par rapport à $x \in X$. ∎

2.3.5 Des théorèmes de Fubini

Considérons une fonction f est définie sur un produit $I \times J$ d'intervalles de $\mathbb{R}$. Supposons d'une part que pour tout $x \in I$, $y \mapsto f(x, y)$ est d'intégrale convergente sur J et que la fonction $x \mapsto \int_J f(x, y) \mathrm{d}y$ est d'intégrale convergente sur I. Supposons d'autre part que pour tout $y \in J$, $x \mapsto f(x, y)$ est d'intégrale convergente sur I et que la fonction $y \mapsto \int_I f(x, y) \mathrm{d}x$ est d'intégrale convergente sur J. On donne dans ce paragraphe des conditions suffisantes pour assurer que

$$\int_I \left(\int_J f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

que l'on présente sous le nom de théorèmes de Fubini.

Théorème 2.3.24 (de Fubini sur un produit de segments) *Soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments de $\mathbb{R}$. On se donne une fonction f continue de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$. On a que, pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur le segment $[c, d]$. De plus, la fonction $x \mapsto \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$ est continue sur $[a, b]$ donc intégrable sur ce segment. De même, on a que pour tout $y \in [c, d]$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur le segment $[a, b]$. De plus, la fonction $y \mapsto \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$ est continue sur $[c, d]$ donc intégrable sur ce segment. Enfin, on a*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \tag{2.32}$$

Preuve. Soit $B \in [a,b]$. La continuité des applications $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ et $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ sur $[a,B]$ et $[c,d]$ respectivement découle de la continuité de f sur $[a,B]\times[c,d]$ et de la propriété 2.3.1. Pour $B=b$, on justifie ainsi le début des conclusions du théorème. Il ne reste à montrer que (2.32). Pour $B \in [a,b]$ quelconque, on pose

$$F(B) = \int_a^B \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad G(B) = \int_c^d \left(\int_a^B f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

La continuité de l'application $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ sur $[a,b]$ implique que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et pour tout $B \in [a,b]$,

$$F'(B) = \int_c^d f(B,y)\mathrm{d}y,$$

par un théorème de CDI1 inclus et rappelé dans la propriété 2.1.72. Par la même propriété, et par continuité de f sur $[a,b]\times[c,d]$, pour tout $y\in[c,d]$, la fonction $B \mapsto \int_a^B f(x,y)\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et sa dérivée en B vaut $f(B,y)$. Puisque cette dernière fonction de (B,y) est continue sur $[a,b]\times[c,d]$, et puisque $(B,y)\mapsto \int_a^B f(x,y)\mathrm{d}x$ l'est également (par la propriété 2.3.10), la propriété 2.3.4 assure finalement que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et l'on a pour tout $B\in[a,b]$,

$$G'(B) = \int_c^d f(B,y)\mathrm{d}y.$$

Remarquant alors que la fonction $F-G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et de dérivée nulle, elle y est constante. Puisqu'elle est nulle en $B=a$, il vient qu'elle est identiquement nulle sur $[a,b]$. La relation $F(b)=G(b)$ fournit finalement (2.32). ∎

Théorème 2.3.25 (de Fubini sur le produit d'un segment et d'un intervalle) *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a<b$ et I un intervalle non vide. Soit f une fonction continue de $[a,b]\times I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'intégrale de $t\mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans $[a,b]$. Sous ces hypothèses, d'une part, la fonction*

$$F : \begin{pmatrix} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

est continue sur $[a,b]$, d'autre part, la fonction

$$G : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

est continue sur I. De plus, l'intégrale de G converge sur I et l'on a

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_I G(t)\mathrm{d}t, \tag{2.33}$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_a^b \left(\int_I f(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_I \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t. \tag{2.34}$$

Preuve. La continuité de f sur $[a,b] \times I$ implique celle de G sur I par la propriété 2.3.1. La continuité de f sur $[a,b] \times I$ et la convergence des intégrales de $t \mapsto f(x,t)$ sur I uniformément par rapport au paramètre x dans $[a,b]$ implique la continuité de F sur $[a,b]$ par la propriété 2.3.18. Soit $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence des intégrales de $t \mapsto f(x,t)$ sur I uniformément par rapport au paramètre x sur $[a,b]$ (voir la remarque 2.3.17), il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, et tout $x \in [a,b]$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Par suite, on a pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left| \int_a^b \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_a^b \int_I f(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon.$$

Par le théorème 2.3.24, on obtient, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, par continuité de f sur $[a,b] \times [a_n,b_n]$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci s'écrit encore, pour $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} G(t)\mathrm{d}t - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, l'intégrale de G converge sur I et l'on a (2.33), donc (2.34). ∎

Théorème 2.3.26 (de Fubini sur un produit d'intervalles) *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides. Soit f une fonction continue de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction g de I dans $\mathbb{R}^+$, absolument intégrable sur I et une fonction h de J dans $\mathbb{R}^+$, absolument intégrable sur J telles que*

$$\forall x \in I, \quad \forall t \in J, \qquad |f(x,t)| \leq g(x)h(t). \tag{2.35}$$

Sous ces hypothèses, la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I et la fonction $G : t \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}x$ est continue sur J. De plus, F est absolument intégrable sur I, G est absolument intégrable sur J, et l'on a

$$\int_I F(x)\mathrm{d}x = \int_J G(t)\mathrm{d}t, \tag{2.36}$$

c'est-à-dire

$$\int_I \left(\int_J f(x,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,t)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t. \tag{2.37}$$

Preuve. Montrons que F est continue sur I. Pour cela, commençons par montrer que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur J uniformément par rapport au paramètre x sur tout segment de I. Soit donc $[\alpha,\beta] \subset I$. Puisque g est absolument intégrable sur I, elle est Riemann-intégrable sur le segment $[\alpha,\beta]$, donc elle est bornée sur $[\alpha,\beta]$. Utilisant l'hypothèse (2.35), il vient que

$$\forall x \in [\alpha,\beta], \quad \forall t \in J, \qquad |f(x,t)| \leq \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]} h(t). \tag{2.38}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque h est absolument intégrable sur J, il existe $[a^\varepsilon, b^\varepsilon] \subset J$ tel que pour tout $[c,d] \subset J$, contenant $[a^\varepsilon, b^\varepsilon]$,

$$\left| \int_c^d h(t)\mathrm{d}t - \int_{a^\varepsilon}^{b^\varepsilon} h(t)\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{1 + \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]}}.$$

Compte tenu du fait que la fonction h est positive sur I, ceci s'écrit encore grâce à la relation de Chasles de la propriété 2.1.9,

$$0 \leq \int_c^{a^\varepsilon} h(t)\mathrm{d}t + \int_{b^\varepsilon}^d h(t)\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{1+\|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]}}. \tag{2.39}$$

On peut alors écrire, pour tout $[c,d] \subset J$ contenant $[a^\varepsilon, b^\varepsilon]$, et tout $x \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_{a^\varepsilon}^{b^\varepsilon} f(x,t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_c^{a^\varepsilon} f(x,t)\mathrm{d}t + \int_{b^\varepsilon}^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_c^{a^\varepsilon} |f(x,t)|\mathrm{d}t + \int_{b^\varepsilon}^d |f(x,t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \int_c^{a^\varepsilon} h(t)\mathrm{d}t + \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \int_{b^\varepsilon}^d h(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]}}{1+\|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]}}\varepsilon < \varepsilon,
\end{aligned}$$

en utilisant successivement la relation de Chasles de la propriété 2.1.9, une inégalité triangulaire puis la propriété 2.1.11 et enfin la majoration (2.38) et l'inégalité (2.39). Cette majoration valant pour tout $x \in [a,b]$, il vient que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur J uniformément par rapport au paramètre x dans $[\alpha,\beta]$. Par continuité de f sur $[\alpha,\beta] \times J$, la propriété 2.3.18 assure que F est continue sur $[\alpha,\beta]$. Ceci valant pour tout segment $[\alpha,\beta] \subset I$, il vient que F est continue sur I tout entier. Un raisonnement similaire, laissé en exercice au lecteur, fournit la continuité de G sur J.

Montrons maintenant que la fonction F est absolument intégrable sur I. Pour cela, considérons un segment $[\alpha,\beta] \subset I$ et observons que, en utilisant la propriété 2.1.62 et en intégrant l'inégalité 2.35,

$$\forall x \in [\alpha,\beta], \qquad |F(x)| = \left|\int_J f(x,t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_J |f(x,t)|\mathrm{d}t \leq g(x)\int_J h(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent, on a

$$\int_\alpha^\beta |F(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_J h(t)\mathrm{d}t\right) \leq \left(\int_I g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_J h(t)\mathrm{d}t\right),$$

en utilisant à nouveau la positivité de g. Puisque cette dernière borne est (finie et) indépendante du segment $[\alpha,\beta]$ de I, il vient que F est absolument intégrable sur I. On obtient l'intégrabilité absolue de G sur J par un raisonnement symétrique laissé en exercice au lecteur.

Montrons enfin la relation (2.37), qui équivaut à (2.36). Pour cela, considérons une suite exhaustive $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par continuité de f sur $[a_n,b_n] \times J$ et par convergence des intégrales de $t \mapsto f(x,t)$ sur J uniformément par rapport au paramètre x dans $[a_n,b_n]$ montrée en début de preuve, il vient par le théorème 2.3.25 que

$$\int_{a_n}^{b_n} F(x)\mathrm{d}x = \int_{a_n}^{b_n}\left(\int_J f(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_J\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Par suite, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^{b_n} F(x)\mathrm{d}x - \int_J G(t)\mathrm{d}t &= \int_J\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t - \int_J\left(\int_I f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_J\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x - \int_I f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Abusant un peu la notation intégrale et en désignant par $I \setminus [a_n, b_n]$ la réunion des 0, 1 ou 2 intervalles qui composent cet ensemble, en fonction des cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $t \in J$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x - \int_I f(x,t)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{I\setminus[a_n,b_n]} f(x,t)\mathrm{d}x \right| \leq h(t) \int_{I\setminus[a_n,b_n]} g(x)\mathrm{d}x,$$

d'où l'on tire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_J \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}x - \int_I f(x,t)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \right| \leq \left(\int_J h(t)\mathrm{d}t \right) \left(\int_{I\setminus[a_n,b_n]} g(x)\mathrm{d}x \right).$$

Ceci implique pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} F(x)\mathrm{d}x - \int_J G(t)\mathrm{d}t \right| \leq \left(\int_J h(t)\mathrm{d}t \right) \left(\int_I g(x)\mathrm{d}x - \int_{a_n}^{b_n} g(x)\mathrm{d}x \right).$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par absolue intégrabilité de g sur I (et de h sur J). On en déduit que (2.36), donc (2.37). ■

2.4 Application à la régularisation par convolution

2.4.1 Approximations de l'identité

Propriété 2.4.1 *Il existe une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, d'intégrale (absolument) convergente sur $\mathbb{R}$, telle que ρ et toutes ses dérivées tendent vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$.*

Preuve. On peut par exemple considérer la fonction

$$\rho : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \end{pmatrix},$$

et utiliser le ŕesultat de l'exercice 2.3.9 qui assure que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, non identiquement nulle mais nulle en dehors d'un compact, convenablement normalisée, convient également. ■

On désigne par ρ une telle fonction dans la suite de cette section. On désigne par $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\rho_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{1}{\varepsilon_n}\rho(\frac{y}{\varepsilon_n}) \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Propriété 2.4.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction ρ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, d'intégrale (absolument) convergente sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1$. De plus, ρ_n et toutes ses dérivées tendent vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.*

Preuve. Exercice. ■

Propriété 2.4.3 *La fonction ρ et toutes ses dérivées sont bornées sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour chacun des fonctions ρ_n pour $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Exercice. ■

Définition 2.4.4 (de la convolution) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto \rho(x-y)f(y)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'on pose*

$$\rho \star f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Preuve. Puisque la fonction ρ est bornée sur $\mathbb{R}$ d'après la propriété 2.4.3, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho(x) \leq M$. Par suite, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad |\rho(x-y)f(y)| \leq M|f(y)|.$$

■

Propriété 2.4.5 *Soit f une continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction*

$$\rho \star f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \end{pmatrix},$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (\rho \star f)^{(k)} = \left(\rho^{(k)}\right) \star f. \tag{2.42}$$

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $F : (x,y) \mapsto \rho(x-y)f(y)$ admet une dérivée partielle par rapport à x à tout ordre inférieur ou égal à k en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $p \in \{0, \cdots, k\}$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,y) = \rho^{(p)}(x-y)f(y).$$

Cette fonction est par ailleurs continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ quel que soit $p \in \{1, \cdots, k\}$. Puisque, par la propriété 2.4.3, la fonction ρ et toutes ses dérivées de ρ sont bornées sur $\mathbb{R}$, on sait que pour tout $p \in \{0, \cdots, k\}$, il existe $M_p > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}$, $|\rho^{(p)}(X)| \leq M_p$. Par suite, pour tout $p \in \{0, \ldots, k\}$, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left|\frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,y)\right| \leq M_p|f(y)|.$$

Puisque la fonction f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, cette dernière majoration implique que l'intégrale de $y \mapsto \frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,y)$ converge (absolument) sur $\mathbb{R}$ uniformément par rapport au paramètre $x \in \mathbb{R}$. Utilisant la propriété 2.3.19 k fois, on obtient que la fonction $\rho \star f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$,..., et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ (car les dérivées successives $\rho \star f$ sont continues sur $\mathbb{R}$ par convergence uniforme des intégrales d'une fonction globalement continue (sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)) et pour tout $p \in \{0, \ldots, k\}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\rho \star f)^{(p)}(x) = \left(\left(\rho^{(p)}\right) \star f\right)(x).$$

■

Propriété 2.4.6 *Soit f une continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction $\rho \star f$ ainsi que toutes ses dérivées tendent vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.*

Preuve. D'après la propriété précédente, et vu l'identité (2.42), il suffit de montrer le résultat pour $\rho \star f$, car le même raisonnement vaudra pour les dérivées successives de $\rho \star f$, sous réserve de ne pas utiliser la positivité de ρ et le fait que cette fonction est d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque ρ tend vers 0 en $\pm\infty$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}$ tel que $|X| \geq R$, on a

$$0 \leq \rho(X) \leq \frac{\varepsilon}{2(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\mathrm{d}t + 1)}.$$

Écrivons alors, à l'aide de la propriété 2.1.65, pour $x \in \mathbb{R}$, puisque l'intégrale de $y \mapsto \rho(x-y)f(y)$ converge absolument sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{x-R}^{x+R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{x-R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y + \int_{x+R}^{+\infty} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y. \quad (2.43)$$

Majorons tout d'abord la valeur absolue de chacun des deux derniers termes de cette égalité. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{x-R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \right| &\leq \int_{-\infty}^{x-R} \rho(x-y)|f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y + 1)} \int_{-\infty}^{x-R} |f(y)|\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \left| \int_{x+R}^{+\infty} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \right| &\leq \int_{x+R}^{+\infty} \rho(x-y)|f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y + 1)} \int_{x+R}^{+\infty} |f(y)|\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{-\infty}^{x-R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y + \int_{x+R}^{+\infty} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y + 1)} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque la fonction f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, par la propriété 2.2.5, il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus [-R_1, R_1]$, on a $\int_a^b |f(y)|\mathrm{d}y \leq \varepsilon/(2(\|\rho\|_{\infty,\mathbb{R}} + 1))$. Observons que, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $|x| > R + R_1$, alors $[x-R, x+R] \subset \mathbb{R} \setminus [-R_1, R_1]$. Ceci implique que, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R + R_1$,

$$\left| \int_{x-R}^{x+R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \right| \leq \|\rho\|_{\infty,\mathbb{R}} \int_{x-R}^{x+R} |f(y)|\mathrm{d}y \leq \|\rho\|_{\infty,\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{2(\|\rho\|_{\infty,\mathbb{R}} + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par inégalité triangulaire dans (2.43), il vient que pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| > R + R_1$, on a

$$|\rho \star f(x)| \leq \varepsilon.$$

■

Propriété 2.4.7 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On désigne par ρ_n la suite de fonctions définie en* (2.40)*. Dans ce cas,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\rho_n \star f)(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x). \quad (2.44)$$

Remarque 2.4.8 *Notons $\mathcal{C}^{\infty}_{\to 0}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$ ainsi que toutes leurs dérivées. Notons $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions* *continues bornées sur $\mathbb{R}$. Sous les hypothèses précédentes, la suite de fonctions $\rho_n \star f$ converge donc ponctuellement vers la fonction f. C'est pourquoi la suite d'applications linéaires $\rho_n \star \cdot$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par*

$$\rho_n\star : \begin{pmatrix} \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty_{\to 0}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \rho_n \star f \end{pmatrix},$$

est appelée approximation de l'identité.

Remarque 2.4.9 *Le résultat précédent affirme que toute fonction continue bornée absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ est limite simple d'une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty_{\to 0}$.*

Remarque 2.4.10 *Une version continue de la propriété précédente est que, sous les mêmes hypothèses,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} f(x). \tag{2.45}$$

Preuve. Nous allons montrer la version (2.45) du résultat. La version (2.44) suivra par composition de limites puisque $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, écrivons, à l'aide de la propriété 2.1.78, que

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) f(x-u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \rho\,(u)\, f(x-\varepsilon u)\mathrm{d}u.$$

Par la propriété 2.4.1, on a $\int_{\mathbb{R}} \rho(u)\mathrm{d}u = 1$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \rho\,(u)\, f(x-\varepsilon u)\mathrm{d}u - f(x)\int_{\mathbb{R}} \rho(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(u)\left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Notons $M > 0$ un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$. Fixons $\delta > 0$ et observons que, par absolue intégrabilité de ρ sur $\mathbb{R}$, par la propriété 2.2.8, il existe $R > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-R} \rho(u)\mathrm{d}u + \int_{R}^{+\infty} \rho(u)\mathrm{d}u < \frac{\delta}{4M}.$$

Ceci implique en particulier que

$$\left|\int_{-\infty}^{-R} \rho(u)\left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\mathrm{d}u\right| + \left|\int_{R}^{+\infty} \rho(u)\left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\mathrm{d}u\right| \le 2M\frac{\delta}{4M} = \delta/2. \tag{2.47}$$

Par ailleurs, par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [-\eta, \eta]$, $|f(x-y) - f(x)| < \delta/2$. En particulier, si l'on suppose $\varepsilon < \eta/R$, alors on a

$$\forall u \in [-R, R], \qquad |f(x-\varepsilon u) - f(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

Ceci implique que, pour $\varepsilon < \eta/R$, on a

$$\left|\int_{-R}^{R} \rho(u)\left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\mathrm{d}u\right| \le \frac{\delta}{2}\int_{-R}^{R} \rho(u)\mathrm{d}u \le \frac{\delta}{2}. \tag{2.48}$$

Utilisant la relation de Chasles de la propriété 2.1.65 dans l'intégrale dans le membre de droite de (2.46) (l'intégrande étant absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction absolument intégrable ρ par la somme de deux fonctions bornées sur $\mathbb{R}$) en utilisant les intervalles $]-\infty,-R]$, $[-R,R]$ et $[R,+\infty[$, on conclut par inégalité triangulaire que, dès que $\varepsilon<\eta/R$, on a

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)\mathrm{d}y-f(x)\right|\leq\delta,$$

à l'aide des inégalités (2.47) et (2.48). ■

Propriété 2.4.11 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On désigne par ρ_n la suite de fonctions définie en* (2.40)*. Dans ce cas sur tout compact K de $\mathbb{R}$, on a*

$$\sup_{x\in K}\left|\left(\rho_n\star f\right)(x)-f(x)\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0. \tag{2.49}$$

Autrement dit : la suite $\rho_n\star f$ converge vers f uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$.

Remarque 2.4.12 *Une version continue de la propriété séquentielle est que, sous les mêmes hypothèses, pour tout compact $K\subset\mathbb{R}$ non vide,*

$$\sup_{x\in K}\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)\mathrm{d}y-f(x)\right|\underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow}0.$$

Preuve. Soit K un compact de $\mathbb{R}$ non vide. Il existe $R_1>0$ tel que $K\subset[-R_1,R_1]$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur le segment $[-R_1-1,R_1+1]$, donc elle est uniformément continue sur ce segment par le théorème de Heine [8]. Fixons $\delta>0$. Comme dans la preuve de la propriété précédente, il existe $R>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'estimation (2.47) a lieu (en notant toujours $M>0$ un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$). Par uniforme continuité de f sur $[-R_1-1,R_1+1]$, il existe un $\eta>0$ tel que pour tous $u,v\in[-R_1-1,R_1+1]$, $|f(u)-f(v)|<\delta/2$. En particulier, si $\varepsilon\in]0,\min(\eta,1)/R[$, on a pour tout $x\in[-R_1,R_1]$, et tout $u\in[-R,R]$, $x-\varepsilon u\in[-R_1-1,R_1+1]$ et donc $|f(x-\varepsilon u)-f(x)|<\delta/2$. Ainsi, dans le même esprit que pour (2.48), on a

$$\forall x\in[-R_1,R_1],\quad\forall\varepsilon\in]0,\min(1,\eta)/R[,\qquad\left|\int_{-R}^{R}\rho(y)\left(f(x-\varepsilon u)-f(x)\right)\mathrm{d}u\right|\leq\frac{\delta}{2}\int_{-R}^{R}\rho(u)\mathrm{d}u\leq\frac{\delta}{2}.$$

On conclut comme à la propriété précédente par inégalité triangulaire après relation de Chasles dans le second membre de l'égalité (2.46), les estimations étant uniformes en x sur $[-R_1,R_1]$ (donc sur K). ■

2.4.2 Le théorème d'approximation de Weierstrass

Théorème 2.4.13 (d'approximation de Weierstrass) *Soit $a<b$ deux nombres réels. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-P\|_{\infty,[a,b]}<\varepsilon$.*

Preuve. Étape 1 : Prolongement et changement de variable. Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Notons $\tilde{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui coïncide avec f sur $[a,b]$, qui est nulle sur $]-\infty,a-1]$ et sur $[b+1,+\infty[$, qui est affine sur $[a-1,a]$ et sur $[b,b+1]$, et qui est globalement continue sur $\mathbb{R}$. Posons φ la bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $t\in\mathbb{R}$ par $\varphi(t)=(b-a+2)t+\frac{b+a}{2}$.

8. Voir par exemple le théorème 7-5.22 dans [12].

Observons que $\varphi([-1/2,1/2]) = [a-1,b+1]$ et que φ préserve les fonctions polynomiales : pour toute fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, h est polynomiale sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $h\circ\varphi$ l'est. Posons $g = \tilde{f}\circ\varphi$. Remarquons que g est continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1/2,1/2]$. Soit $\varepsilon > 0$. Si l'on montre qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|g-Q\|_{\infty,[-1/2,1/2]} < \varepsilon$, alors on aura que $P = Q\circ(\varphi^{-1}) \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\|f-P\|_{\infty,[a-1,b+1]} < \varepsilon$, et en particulier $\|f-P\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$.

Étape 2 : Étude d'une suite de noyaux de convolution. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$h_k : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (1-x^2)^k & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Observons que, quel que soit $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction h_k est continue et positive sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, mais nulle en dehors de $[-1,1]$. En particulier, elle est (absolument) intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} h_k(x)\mathrm{d}x > 0$. On peut ainsi définit la fonction normalisée $\rho_k = h_k/\alpha_k$, de sorte que ρ_k est continue et positive sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1,1]$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, et d'intégrale égale à 1. Observons par ailleurs que, pour tout $k \geq 1$,

$$\alpha_k = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^k\mathrm{d}t = 2\int_0^1(1-t^2)^k\mathrm{d}t \geq 2\int_0^1(1-t)^k\mathrm{d}t = \frac{2}{k+1}. \tag{2.50}$$

Montrons que pour tout $\delta \in]0,1[$, la fonction ρ_k converge uniformément vers 0 sur $]-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty[$. Fixons $\delta \in]0,1[$. Pour $x \in]-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty[$, et $k \in \mathbb{N}^\star$, on a $\delta^2 \leq x^2$ et donc $1-x^2 \leq 1-\delta^2$. Ainsi, en utilisant (2.50),

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \forall x \in]-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty[, \qquad 0 \leq \rho_k(x) \leq \frac{(1-\delta^2)^k}{\alpha_k} \leq \frac{k+1}{2}(1-\delta^2)^k. \tag{2.51}$$

Puisque ce dernier majorant, indépendant de $x \in]-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty[$, tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, ceci démontre que $(\rho_k)_{k\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $]-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty[$.

Étape 3 : On approche la fonction f par convolution avec la suite de noyaux Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $t \mapsto \rho_k(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1/2,1/2]$, donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'on peut définir

$$g_k(x) = \rho_k \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_k(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho_k(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction g_k est polynomiale sur $[-1/2,1/2]$. D'une part, pour $x \in [-1/2,1/2]$, et $t \in [-1/2,1/2]$, on a $x-t \in [-1,1]$, de sorte que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\rho_k(x-t) = \left(1-(x-t)^2\right)^k/\alpha_k$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, il existe $2k+1$ fonctions polynomiales sur $[-1/2,1/2]$, notées $a_0^k, ..., a_{2k}^k$ telles que pour tout $(x,t) \in [-1/2,1/2]$,

$$\forall (x,t) \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2, \qquad \rho_k(x-t) = a_{2k}^k(t)x^{2k} + a_{2k-1}^k(t)x^{2k-1} + \cdots + a_1^k(t)x + a_0^k(t).$$

Multipliant par $g(t)$ et intégrant sur $[-1/2,1/2]$, on trouve par linéarité de l'intégrale sur $[-1/2,1/2]$, pour tout $k \geq 1$,

$$g_k(x) = x^{2k}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_{2k}^k(t)g(t)\mathrm{d}t + \cdots + x\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_1^k(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_0^k(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci montre que pour tout $k \geq 1$, la fonction g_k est polynomiale sur $[-1/2,1/2]$. Montrons maintenant que g_k converge vers g uniformément sur $[-1/2,1/2]$. Pour cela, écrivons que, pour $k \in \mathbb{N}^\star$

et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\begin{aligned} g_k(x) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_k(x-t)g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_{\mathbb{R}} \rho_k(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_k(u)g(x-u)\mathrm{d}u - \int_{\mathbb{R}} g(x)\rho_k(u)\mathrm{d}u \qquad (2.52) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-1}^{1} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u. \qquad (2.53) \end{aligned}$$

Notons toujours ε le nombre réel strictement positif fixé à la fin de la première étape ci-dessus. Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur le segment $[-3/2, 3/2]$. Par le théorème de Heine[9], elle est donc uniformément continue sur $[-3/2, 3/2]$. Ainsi, il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$ et tout $u \in [-\delta, \delta]$, $|g(x-u) - g(x)| \leq \varepsilon/2$. Ceci implique que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\delta}^{\delta} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |g(x-u) - g(x)|\,\rho_k(u)\mathrm{d}u \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} \rho_k(u)\mathrm{d}u \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.54) \end{aligned}$$

Puisque la fonction $|g|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, elle est bornée par un certain $M > 0$ sur $\mathbb{R}$. Ceci implique, pour $k \geq 1$ et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\delta}^{1} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right| &\leq \int_{\delta}^{1} |g(x-u) - g(x)|\,\rho_k(u)\mathrm{d}u \\ &\leq 2M\int_{\delta}^{1} \rho_k(u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On montre de même que, pour $k \geq 1$ et $x \in [-1/2, 1/2]$, on a

$$\left|\int_{-1}^{-\delta} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right| \leq 2M\int_{-1}^{-\delta} \rho_k(u)\mathrm{d}u.$$

Utilisant la convergence uniforme de ρ_k vers 0 sur $\mathbb{R}\setminus]-\delta, \delta[$, et plus explicitement la borne (2.51), il vient en additionnant les inégalités précédentes que, pour $k \geq 1$ et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\left|\int_{\delta}^{1} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right| + \left|\int_{-1}^{-\delta} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right| \leq 2M(1-\delta)(k+1)(1-\delta^2)^k. \qquad (2.55)$$

Utilisons finalement la relation de Chasles dans l'égalité (2.53) en découpant le segment $[-1, 1]$ en $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ et $[\delta, 1]$, puis une inégalité triangulaire, et la majoration (2.54), qui est uniforme en x sur $[-1/2, 1/2]$, on obtient pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$|g_k(x) - g(x)| \leq \left|\int_{-1}^{-\delta} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right| + \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_{\delta}^{1} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right|.$$

9. Voir par exemple le théorème 7-5.22 dans [12].

Enfin, utilisant la majoration précédente, elle aussi uniforme en $x \in [-1/2, 1/2]$, on obtient pour tout $k \geq 1$,

$$\sup_{x\in[-1/2,1/2]} |g_k(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M(1-\delta)(k+1)(1-\delta^2)^k.$$

Choisissant $k_\varepsilon \geq 1$ assez grand pour que $2M(1-\delta)(k_\varepsilon+1)(1-\delta^2)^{k_\varepsilon} < \varepsilon/2$, il vient que la fonction polynomiale $Q = g_{k_\varepsilon}$ vérifie $\|g - Q\|_{\infty,[-1/2,1/2]} < \varepsilon$. ■

Corollaire 2.4.14 *Soit $a < b$ deux nombres réels. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$.*

Preuve. Reprendre la preuve du théorème 2.4.13 ligne à ligne lorsque f est à valeurs complexes pour conclure. ■

2.5 Application à la transformation de Fourier

2.5.1 La classe de Schwartz

Définition 2.5.1 *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes telles que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |P(x)f^{(\alpha)}(x)| \leq M. \tag{2.56}$$

L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est appelé **classe de Schwartz***.*

Propriété 2.5.2 *Une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes est dans la classe de Schwartz si et seulement si pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a*

$$P(x)f^{(\alpha)}(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Exercice. ■

Propriété 2.5.3 *La classe de Schwartz est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. Exercice. ■

Propriété 2.5.4 *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} \in \mathcal{S}$.
Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Preuve. Exercice. ■

Propriété 2.5.5 *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est dans la classe de Schwartz.*

Preuve. Exercice. ■

Propriété 2.5.6 *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*
C'est-à-dire que les fonctions dans la classe de Schwartz sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Utilisant par exemple le polynôme $P = 1 + X^2$ dans la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on sait que, puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |(1 + x^2) f(x)| \leq M.$$

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est Riemann-intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. En outre, la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leq \frac{M}{1 + x^2},$$

assure, en utilisant la propriété 2.1.74, que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto M/(1 + x^2)$ l'est. ■

2.5.2 Définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Définition 2.5.7 *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit la fonction*

$$\mathcal{F}(f) : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \mathrm{d}x \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

La fonction $\mathcal{F}(f)$ est appelée **transformée de Fourier de** *f.*

Propriété 2.5.8 *La fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}^k \mathcal{F}(f)}{\mathrm{d}\xi^k}(\xi) = \mathcal{F}((-i\cdot)^k f(\cdot))(\xi). \tag{2.58}$$

Preuve. Montrons tout d'abord que la fonction $\mathcal{F}(f)$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée en $\xi \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathcal{F}(f)'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix) f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \mathrm{d}x$. Pour cela considérons la fonction $g : (\xi, x) \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$. La foncion g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, car elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert. De plus, sa dérivée partielle par rapport à ξ au point $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par $-ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$. Observons que cette fonction est également continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus, on a la majoration

$$\forall (\xi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad \left| -ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x} \right| \leq |xf(x)|,$$

qui assure que l'intégrale de $x \mapsto -ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ converge sur $\mathbb{R}$ uniformément par rapport à ξ sur $\mathbb{R}$. En effet, le majorant du module de cette fonction est une fonction (absolument) intégrable sur $\mathbb{R}$ (par la propriété 2.5.4), indépendante de ξ. Par la propriété 2.3.19, il vient que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a la formule annoncée. Ceci valant pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on en déduit la propriété 2.5.8 et en particulier (2.58) par stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par multiplication par un polynôme (propriété 2.5.4). ■

Corollaire 2.5.9 *On a également*[10],

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(P(-i\cdot)f(\cdot))(\xi).$$

10. Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)$ l'opérateur différentiel $\sum_{k=0}^d a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}$.

Preuve. Il suffit d'utiliser la propriété précédente, la linéarité de l'intégrale, et la linéarité de la dérivation. ■

Propriété 2.5.10 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On a*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad (i\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(\xi). \tag{2.59}$$

Preuve. Montrons la propriété pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $k = 1$. Le cas général s'en déduisant par stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ par dérivation (propriété 2.5.4). Soit donc $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Observons que $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ par la propriété 2.5.4. Fixons $\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Puisque les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $R > 0$, par intégration par parties,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x = \left[f(x)\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}\right]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f'(x)\frac{\mathrm{e}^{-i\xi i}}{-i\xi}\mathrm{d}x. \tag{2.60}$$

Multiplions par $i\xi/\sqrt{2\pi}$ pour obtenir

$$\frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\right]_{-R}^{R} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R} f'(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x.$$

Cette identité est par ailleurs triviale (c'est le théorème fondamental de l'analyse) pour $\xi = 0$. On en déduit qu'elle vaut pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Soit donc $\xi \in \mathbb{R}$. Observons que le terme entre crochets dans l'égalité ci-dessus tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$ car la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est dans la classe de Schwartz (propriété 2.5.5). De plus, les intégrandes dans les termes du membre de droite et du membre de gauche sont dans la classe de Schwartz (propriétés 2.5.4 et 2.5.5). On en déduit par la propriété 2.5.6 que ce sont deux fonctions absolument intégrales sur $\mathbb{R}$. En particulier, en passant à la limite quand R tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad (i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f')(\xi).$$

Ceci montre (2.59) pour $k = 1$. Le résultat pour tout $k \in \mathbb{N}$ s'en déduit comme indiqué en début de preuve. ■

Corollaire 2.5.11 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On a*

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad P(i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}\left(P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f\right)(\xi).$$

Preuve. C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale et de (2.59). ■

Remarquons à ce stade que l'on a montré que la transformation de Fourier "échange" dérivation par rapport à une variable et multiplication par rapport à $\pm i$ fois l'autre variable. En effet, dériver $\mathcal{F}(f)$ par rapport à ξ revient à calculer $\mathcal{F}((-ix)f(x))(\xi)$ (voir la propriété 2.5.8), et calculer $\mathcal{F}(f')(\xi)$ revient à calculer $(i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi)$ (voir la propriété 2.5.10). Il est par ailleurs remarquable que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$, définie par (2.57), vue comme l'application (dont on vérifie aisément qu'elle est $\mathbb{C}$-linéaire),

$$\mathcal{F} : \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & \mathcal{F}(f) \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

laisse en fait stable l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, comme on va le voir ci-dessous.

Lemme 2.5.12 (de Riemann-Lebesgue) *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Considérons le polynôme $P = 1 - X^2 \in \mathbb{C}[X]$. Par le corollaire 2.5.11, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 - (i\xi)^2\right) \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}\left(f - f''\right)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) - \mathcal{F}(f'')(\xi).$$

Observons que l'on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_R f(x) \mathrm{e}^{-ix\xi} \mathrm{d}x \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}x, \qquad \text{et} \qquad \left| \int_R f''(x) \mathrm{e}^{-ix\xi} \mathrm{d}x \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f''(x)| \mathrm{d}x,$$

de sorte que les fonctions $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(f'')$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Par suite, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{M}{1 + \xi^2},$$

et le lemme en découle. ∎

Comme annoncé, ceci assure la stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ vue comme en (2.61). C'est l'objet du résultat suivant.

Propriété 2.5.13 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La fonction $\mathcal{F}(f)$ est également dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On sait déjà que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par la propriété 2.5.8. Utilisant la propriété 2.5.2, il nous suffit de montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$P(\xi) \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\xi^\alpha} \mathcal{F}(f)(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.62}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Par la propriété 2.5.8, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\xi^\alpha} \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x))(\xi).$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Par le corollaire 2.5.10, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad P(\xi) \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\xi^\alpha} \mathcal{F}(f)(\xi) = P(\xi) \mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x))(\xi) = \mathcal{F}\left(P\left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)[(-ix)^\alpha f(x)]\right)(\xi).$$

On sait depuis la propriété 2.5.4 que $x \mapsto P\left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)[(-ix)^\alpha f(x)]$ est une fonction dans la classe de Schwartz car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Le lemme de Riemann–Lebesgue 2.5.12 assure que

$$\mathcal{F}\left(P\left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)[(-ix)^\alpha f(x)]\right)(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que l'on a (2.62) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. ∎

On peut définir la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ *via* la formule (2.57) sur des espaces bien plus gros que $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: il suffit que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour que cette formule soit bien définie. Et si l'on requiert un peu de régularité sur f (par exemple f est dérivable sur $\mathbb{R}$ un certain nombre de fois, de dérivées continues et dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$), on peut avoir des formules de type (2.59) pour l'entier k jusqu'à une certaine valeur. On peut alors comprendre ce résultat comme un "échange" entre f

et $\mathcal{F}(f)$: la régularité de f se traduit par de la "décroissance" de $\mathcal{F}(f)$ (au sens où l'on contrôle $|\xi\mathcal{F}(f)(\xi)|$ pour $|\xi|$ grand).

De même, si l'on suppose que f et un certain nombre des premières puissances de x fois f sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors on peut définir $\mathcal{F}(f)$ *via* la formule (2.57) et avoir la dérivabilité de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$ jusqu'à un certain rang et des formules de type (2.57) jusqu'à un certain entier k. On peut de nouveau interpréter ces propriétés comme un échange : la "décroissance" de f (au sens où l'on contrôle quelques puissances de x fois $f(x)$ pour $|x|$ grand) implique de la régularité sur $\mathcal{F}(f)$.

Ces propriétés, dans leur forme précise, dépassent le cadre du cours. Cependant on peut remarquer que la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est un parfait compromis entre les deux aspects : il y a dans cette classe uniquement des fonctions très régulières *et* très "décroissantes" (au sens précédent). Ainsi, les transformées de Fourier des fonctions de la classe de Schwartz sont très "décroissantes" *et* très régulières. Au point que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}))\subset\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Nous allons être encore plus précis dans la section 2.5.4, en montrant que $\mathcal{F}$ est en fait un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (application linéaire bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même ; on ne parlera pas de sa continuité éventuelle, car on ne parlera pas de la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$), et expliciter sa bijection réciproque.

2.5.3 Transformée de Fourier d'une gaussienne

On rappelle que l'on a montré à l'exercice 2.3.9 que

$$I=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}. \tag{2.63}$$

Exercice 2.5.14 *Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la fonction*

$$f:\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-ax^2}\end{pmatrix}$$

1. *Justifier que la fonction f est dans la classe de Schwartz.*
2. *Justifier que $\mathcal{F}(f)(0)=\frac{1}{\sqrt{2a}}$.*
3. *Justifier que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a*

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\qquad \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}(f)}{\mathrm{d}\xi}(\xi)=-\frac{\xi}{2a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

4. *À l'aide du cours sur les équations différentielles (voir le chapitre 3), en déduire que*

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\qquad \mathcal{F}(f)(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \tag{2.64}$$

2.5.4 Le théorème d'inversion de Fourier

Pour $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on définit la fonction

$$\mathcal{G}(f):\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ \xi & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{+i\xi x}\mathrm{d}x\end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\quad \forall\xi\in\mathbb{R},\qquad \mathcal{G}(f)(\xi)=\mathcal{F}(f)(-\xi).$$

On déduit de cette observation que la fonction $\mathcal{G}$, tout comme la fonction $\mathcal{F}$ (comme on l'a vu en section 2.5.2), est une application (linéaire) de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même.

Théorème 2.5.15 (d'inversion de Fourier) *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(\mathcal{G}(f))(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x). \tag{2.65}$$

Remarque 2.5.16 *Une autre maniere d'écrire ce théorème est la suivante :*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{G} \circ \mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})}.$$

En particulier, les applications linéaires de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans lui-même que sont $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont injectives et surjectives, et inverses l'une de l'autre.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $X \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction

$$h_\varepsilon : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, \xi) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \mathrm{e}^{+i\xi X} \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad |h_\varepsilon(x, \xi)| \leq |f(x)| \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2},$$

et le majorant s'écrit comme le produit d'une fonction de la première variable et d'une fonction de la seconde variable, chacune étant dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Par le théorème de Fubini 2.3.26, il vient que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(x, \xi) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(x, \xi) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{+i\xi X} \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2} \mathrm{e}^{-i\xi(x-X)} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x.$$

Ceci implique

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathrm{e}^{+i\xi X} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2})(x - X) \mathrm{d}x. \tag{2.66}$$

À l'aide de la relation (2.64) de l'exercice 2.5.14, on peut écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2})(x - X) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-X)^2}{4\varepsilon^2}}.$$

On peut ainsi écrire le membre de droite de (2.66),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2})(x - X) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(X-x)^2}{4\varepsilon^2}} \mathrm{d}x. \tag{2.67}$$

En définissant la fonction ρ pour $u \in \mathbb{R}$ par $\rho(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/4}$, on a une fonction de la classe de Schwartz à valeurs positives, et d'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{u}{2}\right)^2} \times \frac{1}{2} \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-v^2} \mathrm{d}v = 1,$$

en utilisant (2.63). Utilisant la relation (2.67), on peut donc écrire le membre de droite de (2.66) sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2})(x - X) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \times \frac{1}{\varepsilon} \rho \left(\frac{X - x}{\varepsilon} \right) \mathrm{d}x.$$

Puisque la fonction f est dans la classe de Schwartz, elle est continue, bornée, et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. La propriété 2.4.7, sous la forme (2.45), assure que le membre de droite de (2.66) tend vers $f(X)$ quand ε tend vers 0. Considérons maintenant le membre de gauche de (2.66). Considérons la fonction

$$g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\delta, \xi) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\delta^2 \xi^2} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathrm{e}^{i\xi X} \end{pmatrix}.$$

Puisque la fonction f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il en est de même de la fonction $\mathcal{F}(f)$ par la propriété 2.5.13. En particulier, cette dernière fonction est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus, on a la majoration

$$\forall (\delta, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad |g(\delta, \xi)| \leq |\mathcal{F}(f)(\xi)|,$$

et le majorant est une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ indépendante de δ. Ceci assure que l'intégrale de $\xi \mapsto g(\delta, \xi)$ converge sur $\mathbb{R}$, uniformément par rapport au paramètre δ dans $\mathbb{R}$. Par suite, la propriété 2.3.18 assure que la fonction

$$G : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \delta & \longrightarrow & \int_{\mathbb{R}} g(\delta, \xi) \mathrm{d}\xi \end{pmatrix},$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet en particulier une limite en 0, qui est

$$G(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathrm{e}^{i\xi X} \mathrm{d}\xi = \sqrt{2\pi} \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(X).$$

En particulier, le membre de gauche de (2.66) converge vers $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(X)$ quand ε tend vers 0. Passant à la limite quand ε tend vers 0 dans (2.66), il vient

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(X) = f(X).$$

On a ainsi démontré la seconde partie du théorème 2.5.15, au sens où l'on a montré la seconde égalité de (2.65). Pour déduire la première égalité de (2.65) de la seconde, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}(\mathcal{G}(f))(X)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{i\xi x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{-iX\xi}} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \mathrm{e}^{-i\xi x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{iX\xi} \mathrm{d}\xi \\ &= \mathcal{G}(\mathcal{F}(\overline{f}))(X) \\ &= \overline{f(X)}, \end{aligned}$$

en utilisant le résultat que l'on vient de démontrer (puisque $\overline{f} \in \mathcal{S}$ dès que $f \in \mathcal{S}$). On en déduit en conjuguant le calcul précédent que

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(f))(X) = f(X),$$

et le théorème est ainsi montré en totalité. ∎

Remarque 2.5.17 *Le théorème d'inversion de Fourier assure que, lorsque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \mathrm{e}^{ix\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Toute fonction f dans la classe de Schwartz (on pourrait affaiblir les hypothèses, mais cela dépasse le cadre de ce syllabus) s'écrit ainsi comme une "somme" (continue) de fonctions ondulatoires de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ix\xi}$, affectées de la densité (complexe) $\mathcal{F}(f)(\xi)/\sqrt{2\pi}$, ou du poids (complexe) $\mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{d}\xi/\sqrt{2\pi}$.

Remarque 2.5.18 *Si l'on interprète la variable x comme une variable temporelle, alors la variable ξ est naturellement une pulsation, et $\xi/(2\pi)$ est naturellement une fréquence.*

Remarque 2.5.19 *Le fait que $\mathcal{F}$ est bijective implique en particulier qu'il y a exactement autant d'information dans f que dans $\mathcal{F}(f)$: connaître f ou connaître $\mathcal{F}(f)$ sont deux choses rigoureusement équivalentes.*

2.5.5 La convolution dans la classe de Schwartz

Lemme 2.5.20 (Inégalité de Young) *Pour tout $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$, on a*

$$\forall u, v \geq 0, \qquad uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}. \tag{2.68}$$

Preuve. C'est évident si $u = 0$ ou $v = 0$. On suppose donc que $u > 0$ et $v > 0$. On peut donc poser

$$U = p \ln(u) \qquad \text{et} \qquad V = q \ln(v).$$

Puisque la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et puisque $1/p \geq 0$, $1/q \geq 0$ et $1/p + 1/q = 1$, on a

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{p}U + \frac{1}{q}V} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^U + \frac{1}{q}\mathrm{e}^V.$$

Ceci s'écrit encore

$$\mathrm{e}^{\ln(u) + \ln(v)} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^{p \ln u} + \frac{1}{q}\mathrm{e}^{q \ln v}.$$

On en déduit aisément (2.68) ■

Lemme 2.5.21 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que*

$$\forall a, b \geq 0, \qquad (a+b)^\alpha \leq C_\alpha \left(a^\alpha + b^\alpha\right).$$

De plus, on peut choisir $C_\alpha = 2^{\alpha - 1}$.

Preuve. Le résultat est trivial pour $\alpha = 0$ avec $C_0 = \frac{1}{2}$, et pour $\alpha = 1$ avec $C_1 = 1$. Raisonnons par récurrence. Afin de montrer l'hérédité, supposons le résultat vrai pour un certain $\alpha \geq 1$. Pour tout $a, b \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} (a+b)^{\alpha+1} &\leq (a+b)^\alpha (a+b) \\ &\leq C_\alpha \left(a^\alpha + b^\alpha\right)(a+b) \\ &\leq C_\alpha \left(a^{\alpha+1} + a^\alpha b + b^\alpha a + b^{\alpha+1}\right). \end{aligned}$$

Or, par inégalité de Young (lemme 2.5.20), on a

$$a^\alpha b \leq \frac{\alpha}{\alpha+1} a^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} b^{\alpha+1} \qquad \text{et} \qquad b^\alpha a \leq \frac{\alpha}{\alpha+1} b^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} a^{\alpha+1}.$$

On en déduit que

$$(a+b)^{\alpha+1} \leq C_\alpha \left(2a^{\alpha+1} + 2b^{\alpha+1}\right).$$

Le résultat suit alors avec $C_{\alpha+1} = 2C_\alpha$ au rang $\alpha + 1$. ■

Propriété 2.5.22 (La convolution laisse stable $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$) *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On définit la fonction*

$$f \star g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \end{pmatrix}.$$

La fonction $f \star g$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et elle vérifie (2.56) *pour tout polynôme P, de sorte qu'elle est elle-même dans la classe de Schwartz.*

Remarque 2.5.23 *Pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\mathrm{d}u,$$

comme on le constate en posant $u(y) = x-y$, après avoir constaté que l'intégrande est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ à $x \in \mathbb{R}$ fixé comme on va le voir ci-dessous. On généralise ainsi le produit de convolution introduit à la définition 2.4.4.

Preuve. L'intégrande

$$h : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & f(y)g(x-y) \end{pmatrix},$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, puisque f et g sont dans la classe de Schwartz. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha}(x,y) = f(y)g^{(\alpha)}(x-y).$$

Désignons par $M_\alpha \geq 0$ un majorant de $|g^{(\alpha)}|$ sur $\mathbb{R}$ (qui existe puisque g est dans la classe de Schwartz). On obtient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left|\frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha}(x,y)\right| \leq M_\alpha |f(y)|.$$

Puisque la fonction f est dans la classe de Schwartz, elle est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ par la propriété 2.5.6. Par suite, la fonction $y \mapsto |f(y)|$ est une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, indépendante du paramètre $x \in \mathbb{R}$. On déduit de la propriété 2.3.21 que l'intégrale de $y \mapsto \frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha}(x,y)$ converge sur $\mathbb{R}$ uniformément par rapport au paramètre x sur $\mathbb{R}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Utilisant la propritété 2.3.19, il vient que $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (f \star g)^{(\alpha)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g^{(\alpha)}(x-y)\mathrm{d}y. \tag{2.69}$$

Justifions maintenant que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $x \mapsto x^\beta (f \star g)^{(\alpha)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Fixons $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2$ et observons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^\beta (f \star g)^{(\alpha)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)x^\beta g^{(\alpha)}(x-y)\mathrm{d}y.$$

Majorons le module de l'intégrande en remarquant que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left|f(y)x^\beta g^{(\alpha)}(x-y)\right| &\leq |f(y)||(x-y)+y|^\beta |g^{(\alpha)}(x-y)| \\ &\leq C_\beta \left(\left|y^\beta f(y)g^{(\alpha)}(x-y)\right| + \left|f(y)(x-y)^\beta g^{(\alpha)}(x-y)\right|\right). \end{aligned}$$

Puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il existe $M_\beta > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left|(1+y^2)y^\beta f(y)\right| \leq M_\beta \qquad \text{et} \qquad \left|(1+y^2)f(y)\right| \leq M.$$

De même, puisque $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il existe $N_{\alpha,\beta} > 0$ et $N_\alpha > 0$ tels que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left|g^{(\alpha)}(y)\right| \leq N_\alpha \qquad \text{et} \qquad \left|(y)^\beta g^{(\alpha)}(y)\right| \leq N_{\alpha,\beta}.$$

On déduit de ces dernières inégalités que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \left|f(y)x^\beta g^{(\alpha)}(x-y)\right| \leq C_\beta \left(N_\alpha \frac{M_\beta}{1+y^2} + N_{\alpha,\beta}\frac{M}{1+y^2}\right).$$

Utilisant (2.69), il vient par intégration que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|x^\beta (f\star g)^{(\alpha)}(x)\right| \leq \pi C_\beta \left(N_\alpha M_\beta + N_{\alpha,\beta} M\right).$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x^\beta (f\star g)^{(\alpha)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci valant quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, on en déduit que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto P(x)(f\star g)^{(\alpha)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Finalement, on conclut que $f\star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ en utilisant la définition 2.5.1. ■

Propriété 2.5.24 (Transformée de Fourier d'une convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$) *Pour tout $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})^2$, on a*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(f\star g)(\xi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\xi) \times \mathcal{F}(g)(\xi).$$

Autrement dit : dans la classe de Schwartz, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est, à une constante multiplicative près, le produit (classique) des transformées de Fourier.

Preuve. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Écrivons pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\star g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (f\star g)(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x \qquad (2.70)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi((x-y)+y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}g(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En admettant pour le moment que les hypothèses du théorème 2.3.26 de Fubini sont vérifiées, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\star g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}g(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2.71)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(u)\mathrm{e}^{-i\xi u}\mathrm{d}u\mathrm{d}y\\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}\mathrm{d}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(u)\mathrm{e}^{-i\xi u}\mathrm{d}u\\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\xi) \times \mathcal{F}(g)(\xi),
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème du changement de variable 2.1.78. Justifions maintenant que les hypothèses du théorème 2.3.26 de Fubini utilisé ci-dessus sont vérifiées. Pour cela, observons que, puisque $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \left|(1+y^2)^2 f(y)(1+(x-y)^2)g(x-y)\right| \leq M.$$

Ceci implique

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(y)g(x-y)| \leq \frac{M}{1+y^2} \times \frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(x-y)^2}. \tag{2.72}$$

Observons, que, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 2$, la fonction

$$h_x : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \frac{1}{1+y^2}\frac{1}{1+(x-y)^2} \end{pmatrix},$$

est majorée sur $\mathbb{R}$ par sa valeur en $\frac{x \pm \sqrt{x^2-2}}{2}$. On en déduit que la fonction

$$u : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-2}}{2}\right)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{x^2-2}}{2}\right)^2}\mathbb{1}_{]-\infty,2]\cup[2,+\infty[}(x) + \mathbb{1}_{]-2,2[}(x) \end{pmatrix},$$

vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad h_x(y) \leq u(x).$$

Puisque la fonction $x \mapsto (1+x^2)u(x)$ est de plus majorée sur $\mathbb{R}$, il vient qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \leq C/(1+x^2)$. En particulier, utilisant (2.72), il vient que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \left| f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y} g(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)} \right| \leq \frac{M}{1+y^2}\frac{C}{1+x^2}.$$

Cette majoration par le produit de deux fonctions (absolument) intégrables sur $\mathbb{R}$, l'une par rapport à la première variable, l'autre par rapport à la seconde, permet d'appliquer le théorème de Fubini à l'intégrande (continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et à valeurs complexes à $\xi \in \mathbb{R}$ fixé), pour passer de (2.70) à (2.71). ∎

2.5.6 Le théorème de Plancherel

Définition 2.5.25 *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit la fonction*

$$R(f) : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \overline{f(-x)} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.5.26 *1. Vérifier que $R(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

2. Justifier que R définit une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans lui-même.

3. Justifier que R est une involution.

4. En déduire que R est une application bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans lui-même.

5. Justifier que

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(f \star R(f))(\xi) = \sqrt{2\pi}\,|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2.$$

Définition 2.5.27 *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions*

$$D_\lambda(f) : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(\lambda x) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_{x_0}(f) : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x - x_0) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.5.28 (Dilatations et translations) *1. Vérifier que $D_\lambda(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $T_{x_0}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

2. Vérifier que D_λ et T_{x_0} sont des applications linéaires de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même.

3. Vérifier que $D_\lambda \circ D_{1/\lambda} = T_{x_0} \circ T_{-x_0} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$.

4. En déduire que D_λ et T_{x_0} sont des applications bijectives de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même.

5. Justifier que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}\left(D_\lambda f\right)(\xi) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{F}\left(T_{x_0} f\right)(\xi) = \mathrm{e}^{-i\xi x_0}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Propriété 2.5.29 *On a l'inclusion*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est Riemann-intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Il en est donc de même de f^2 et de $|f^2|$. De plus, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1+x^2)|f(x)| \leq M.$$

En particulier, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)|^2 \leq \left(\frac{M}{1+x^2}\right)^2.$$

Puisque la fonction $x \mapsto M^2/(1+x^2)^2$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction $|f|^2$. ■

Propriété 2.5.30 (Identité de Plancherel) *On a*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi. \tag{2.73}$$

Preuve. Utilisons à nouveau la suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en (2.40) pour une certaine suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs qui tend vers 0. Soit $f \in \mathcal{S}$. Notons $R(f)$ la fonction définie en 2.5.25. Posons $g = f \star R(f)$. Par l'exercice 2.5.26, on a que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(g) = \sqrt{2\pi}|\mathcal{F}(f)|^2$. On peut donc définir pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\rho_n \star g$ par (2.41). De plus on a $\rho_n \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ par la propriété 2.5.22. Par la propriété 2.4.7, on a

$$\left(\rho_n \star g\right)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0).$$

Or

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} f(0-y)R(f)(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(-y)\overline{f(-y)}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 \,\mathrm{d}y,$$

en utilisant le théorème de changement de variable de la propriété 2.1.78. Ainsi,

$$\left(\rho_n \star g\right)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 \,\mathrm{d}y. \tag{2.74}$$

Par ailleurs, utilisant l'exercice 2.64, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)^2} = \rho_n(x).$$

Ainsi, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(\rho_n \star g)(0) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n(0-y) g(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{e}^{-i\xi y} \mathrm{d}\xi \right) g(y) \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Afin d'utiliser le théorème de Fubini 2.3.26, remarquons que l'intégrande est une fonction continue de (ξ, y) sur $\mathbb{R}^2$, et que son module vérifie

$$\forall \xi, y \in \mathbb{R}, \qquad \left| \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{e}^{-i\xi y} g(y) \right| \leq M \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \frac{1}{1+y^2},$$

pour un certain $M > 0$ puisque $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Cette majoration permet d'appliquer le théorème de Fubini 2.3.26 pour obtenir

$$\begin{aligned}(\rho_n \star g)(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g)(\xi) \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi} \left| \mathcal{F}(f)(\xi) \right|^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}(f)(\xi) \right|^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$h : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\varepsilon, \xi) & \longmapsto & \left| \mathcal{F}(f)(\xi) \right|^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon \xi}{2}\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus, elle vérifie

$$\forall (\varepsilon, \xi) \in \mathbb{R}^2, \qquad |h(\varepsilon, \xi)| \leq \left| \mathcal{F}(f)(\xi) \right|^2.$$

Le majorant étant dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et indépendant de $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on en déduit que l'intégrale de $\xi \mapsto h(\varepsilon, \xi)$ converge sur $\mathbb{R}$ uniformément par rapport au paramètre ε dans $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction

$$H : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varepsilon & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} h(\varepsilon, \xi) \mathrm{d}\xi \end{pmatrix},$$

est continue sur $\mathbb{R}$ par la propriété 2.3.18. En particulier,

$$(\rho_n \star g)(0) = H(\varepsilon_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} H(0) = \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}(f)(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Par unicité de la limite de la suite $((\rho_n \star g)(0))_{n \in \mathbb{N}}$, on déduit de la ligne précédente et de (2.74) que (2.73) a lieu. ■

Corollaire 2.5.31 (Identité de Plancherel polarisée) *Pour tout* $(f, g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} \mathrm{d}\xi. \tag{2.75}$$

Preuve. Pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose

$$q_1(f) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad q_2(f) = \int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}(f)(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi,$$

et
$$\varphi_1(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(f,g) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)\overline{\mathcal{F}(g)(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$
Ces quatres fonctions sont bien définies à l'aide des propriétés 2.5.29 et 2.2.27. De plus, on a par simple calcul pour $k \in \{1,2\}$,
$$\varphi_k(f,g) = \frac{1}{4}\left(q_k(f+g) - q_k(f-g) + iq_k(f+ig) - iq_k(f-ig)\right). \tag{2.76}$$
L'identité de Plancherel (2.73) assure que $q_1 = q_2$. La relation ci-dessus assure par conséquent que $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

Remarque 2.5.32 *Les fonctions q_1 et q_2 sont des formes quadratiques sur l'espace vectoriel complexe $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont les formes hermitiennes associées. Le fait que q_1 et q_2 coïcindent sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ implique que φ_1 et φ_2 coïncident également sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, par la relation* (2.76)*, appelée dans ce contexte identité de polarisation.*

Remarque 2.5.33 *La forme*
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2} : \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \end{pmatrix},$$
est hermitienne, définie et positive sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. C'est donc un produit scalaire complexe sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. La norme associée est donnée par $\|f\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x}$. En appliquant (2.75) *à f et $\tilde{g} = \mathcal{G}(g)$, on obtient*
$$\forall f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \qquad \langle f, \mathcal{G}(g)\rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mathcal{G}(g)(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)\overline{g(\xi)}\mathrm{d}\xi = \langle \mathcal{F}(f), g\rangle_{\mathcal{L}^2}.$$
Ceci indique que l'application linéaire $\mathcal{F}$ admet $\mathcal{G}$ comme adjoint dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2})$.

Remarque 2.5.34 *Avec les notations de la remarque précédente, une manière d'écrire l'identité de Plancherel de la propriété 2.5.30 est de dire que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une isométrie de $(\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^2})$ dans lui-même. On obtient sans peine (et en exercice) qu'il en est de même de sa bijection réciproque $\mathcal{G}$.*

Remarque 2.5.35 *Attention, l'espace $(\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2})$ est un espace préhilbertien complexe qui n'est pas complet.*

2.5.7 Application à une équation elliptique linéaire en dimension 1

Exercice 2.5.36 *Soit $c > 0$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On cherche une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -u''(x) + cu(x) = f(x). \tag{2.77}$$

1. *Justifier que, si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est solution de* (2.77)*, alors on a*
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \left(c+\xi^2\right)\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi).$$
2. *Justifier que $\xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)/(c+\xi^2)$ est une fonction de la classe de Schwartz.*
3. *Justifiquer que l'équation* (2.77) *admet une unique solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Chapitre 3

Équations différentielles

3.1 Généralités

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 *On appelle* **équation différentielle** *toute équation de la forme*

$$F(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(p)}(t)) = 0, \tag{3.1}$$

où

- $p \geq 1$ *est un entier donné appelé* **ordre** *de l'équation,*
- F *est une fonction donnée, définie sur le produit d'un intervalle* J *par un produit de* $p+1$ *ouverts de* $\mathbb{R}^N$*, notés* $\Omega_0, \cdots, \Omega_p$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}^N$*,*
- y *est une fonction inconnue définie sur un intervalle* $I \subset J$ *également inconnu,* p *fois dérivable sur* I*, et telle que, pour tout* $t \in I$ *et* $k \in \{0, \cdots, p\}$*,* $y^{(k)}(t) \in \Omega_k$*, et la relation* (3.1) *est vérifiée.*

Définition 3.1.2 *On appelle* **solution de l'équation différentielle** (3.1) *tout couple* (I, y) *d'un intervalle* $I \subset J$ *et d'une fonction* y *de* I *dans* Ω_0*,* p *fois dérivable sur* I*, et telle que pour tout* $k \in \{1, \cdots, p\}$ *et* $t \in I$*,* $y^{(k)}(t) \in \Omega_k$ *et la relation* (3.1) *a lieu.*

Définition 3.1.3 *Une équation différentielle* (3.1) *d'ordre* p *est dite* **sous forme résolue** *lorsque la fonction* F *est de la forme*

$$F(t, y_0, \cdots, y_p) = G(t, y_0, \cdots, y_{p-1}) - y_p,$$

pour tout $t \in J$*,* $(y_0, \cdots, y_p) \in \Omega_0 \times \cdots \times \Omega_p$*, où* G *est une certaine fonction de* $(t, y_0, \cdots, y_{p-1})$ *indépendante de* y_p*.*

Remarque 3.1.4 *L'équation différentielle* (3.1) *s'écrit alors*

$$y^{(p)}(t) = G(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(p-1)}(t)). \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.5 *Le plus souvent, l'équation différentielle* (3.1) *peut être mise sous forme résolue (au moins localement dans* $J \times \Omega_0 \times \cdots \times \Omega_p$*), par exemple en utilisant le théorème des fonctions implicites, dans le cas où* F *est suffisamment régulière et* $\frac{\partial F}{\partial y_p}$ *est inversible. On travaillera dans la suite de ce syllabus avec des équations différentielles sous forme résolue.*

Exemple 3.1.6 *Les équations du mouvement d'une particule de masse* $m > 0$*, dans un référentiel galiléen identifié à* $\mathbb{R}^3$*, soumise à un champ de forces dérivant d'un potentiel différentiable* $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*, s'écrivent*

$$mx''(t) = -\nabla V(x(t)). \tag{3.3}$$

La fonction position $t \mapsto x(t)$ *de la particule est donc solution d'une équation différentielle d'ordre* 2*, qui est par ailleurs naturellement sous forme résolue (quitte à diviser les deux membres de l'équation par* m*).*

Remarque 3.1.7 *En introduisant la quantité de mouvement* $p(t) = mx'(t)$*, l'équation* (3.3) *s'écrit encore, de manière équivalente*

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p(t) \\ -\nabla V(x(t)) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

c'est-à-dire qu'on peut transformer cette équation différentielle résolue d'ordre 2 *dont l'inconnue* x *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}^3$ *en une équation différentielle résolue d'ordre* 1 *dont l'inconnue* (x, p) *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}^6$*. C'est en fait quelque chose de général, comme on va le voir en 3.1.2*

3.1.2 Réduction à l'ordre 1

Propriété 3.1.8 *Toute équation différentielle de la forme* (3.2) *est équivalente à une équation différentielle résolue d'ordre 1 en la nouvelle inconnue*

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Pour le constater, adoptons la convention suivante : pour tout $Y \in \mathbb{R}^{Np}$, on note Y_1 le vecteur contenant les N premières composantes de Y, Y_2 celui contenant les N suivantes, etc, jusque Y_p celui contenant les N dernières, de sorte que

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Np} = \left(\mathbb{R}^N\right)^p.$$

On peut alors définir la nouvelle fonction

$$f(t, Y) = \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_p \\ G(t, Y_1, \dots, Y_p) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

sur le produit de J par $\Omega_0 \times \cdots \times \Omega_{p-1}$. Dans ce cas, la recherche d'une fonction y, p fois dérivable sur un certain intervalle $I \subset J$, avec pour tout $k \in \{0, \cdots, p-1\}$ et $t \in I$, $y^{(k)}(t) \in \Omega_k$, vérifiant (3.2) *équivaut à la recherche d'une fonction Y, dérivable sur le même intervalle I, à valeurs dans $\Omega_0 \times \cdots \times \Omega_{p-1}$, vérifiant*

$$\forall t \in I, \qquad Y'(t) = f(t, Y(t)). \tag{3.7}$$

Preuve. Connaissant une solution (I, y) de (3.2), on forme la fonction Y via le changement d'inconnue (3.5), et on obtient une solution (I, Y) de (3.7). Réciproquement, connaissant une solution (I, Y) de (3.7), en posant $y(t) = Y_1(t)$ pour $t \in I$, on obtient une solution (I, y) de (3.2). ∎

Remarque 3.1.9 *Les fonctions G et f ont par ailleurs exactement la même régularité sur $J \times \Omega_0 \times \cdots \times \Omega_{p-1}$, comme on le constate en utilisant la relation* (3.6)*.*

Remarque 3.1.10 *Une fois mise sous forme résolue à l'ordre 1, l'équation différentielle* (3.7) *est caractérisée par la donnée d'une fonction f du produit d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ par un ouvert $\Omega = \Omega_0 \times \cdots \times \Omega_{p-1}$ de $(\mathbb{R}^N)^p = \mathbb{R}^{Np}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{Np}$. Cette fonction est appelée* **champ de vecteurs** *de l'équation* (3.7)*.*

Dans la suite de ce syllabus, nous traitons donc non seulement des équations différentielles résolues (voir la remarque 3.1.5), mais de plus on les supposera réduites à l'ordre 1. On notera comme dans la remarque ci-dessus $\Omega = \Omega_0 \times \cdots \times \Omega_{p-1}$.

3.1.3 Notion de problème de Cauchy

Définition 3.1.11 *Pour une équation différentielle résolue d'ordre 1 de la forme* (3.7)*, où f est une fonction donnée sur le produit d'un intervalle J par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{Np}$, on appelle* **donnée de Cauchy** *tout couple $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$.*

Définition 3.1.12 *Pour une équation différentielle résolue d'ordre 1 de la forme* (3.7)*, où f est une fonction donnée sur le produit d'un intervalle J par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{Np}$, et une donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, on appelle* **problème de Cauchy** *le système formé de l'équation différentielle* (3.7) *et de la condition initiale $Y(t_0) = y_0$.*

Définition 3.1.13 (Rappel) *Avec les notations de la définition précédente, on appelle* **solution de l'équation différentielle** (3.7) *tout couple (I, Y) d'un intervalle $I \subset J$ et d'une fonction Y de I dans Ω, dérivable sur l'intervalle I et vérifiant* (3.7)*.*

Définition 3.1.14 *Avec les notations de la définition précédente, on appelle* **solution du problème de Cauchy**

$$\begin{cases} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}, \tag{3.8}$$

tout couple (I, y) d'un intervalle $I \subset J$ contenant t_0 et d'une fonction y de I dans Ω, dérivable sur l'intervalle I, vérifiant l'équation différentielle sur I et la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Définition 3.1.15 *Lorsque le champ de vecteurs f est indépendant de t, l'équation différentielle est dite* **autonome***. Il en est de même du problème de Cauchy* (3.8)*. On peut alors, sans perte de généralité, considérer que $t_0 = 0$. En effet, pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, la fonction $t \mapsto y(t)$ est une solution du problème de Cauchy pour la donnée de Cauchy (t_0, y_0) sur l'intervalle I (contenant t_0) si et seulement si la fonction $t \mapsto y(t + t_0)$ est solution du problème de Cauchy pour la donnée de Cauchy $(0, y_0)$ sur l'intervalle $I - t_0$.*

Définition 3.1.16 *Considérons une équation différentielle autonome*

$$y'(t) = f(y(t)),$$

où f est une fonction donnée définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{Np}$. On appelle **point d'équilibre de** (3.1.16) *tout élément $y^\star \in \Omega$ tel que $f(y^\star) = 0$.*

Remarque 3.1.17 *Dans ce cas, la fonction constante $t \mapsto y^\star$ est évidemment solution de* (3.1.16) *sur $\mathbb{R}$.*

3.1.4 Formulation intégrale du problème de Cauchy

Propriété 3.1.18 *Soit f une fonction continue sur le produit d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{Np}$, et soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ une donnée de Cauchy. Soit $I \subset J$ un intervalle contenant t_0 et y une fonction de I dans Ω. La fonction y est solution du problème de Cauchy* (3.8) *sur l'intervalle I si et seulement si elle est continue sur I et vérifie*

$$\forall t \in I, \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s. \tag{3.9}$$

Preuve. Dans le sens direct, puisque y est une solution de (3.8) sur I, elle est dérivable sur I et à valeurs dans Ω. En particulier, elle est continue sur I à valeurs dans Ω. Puisque la fonction f est continue sur $J \times \Omega$, et puisque $I \subset J$, la fonction $s \mapsto f(s, y(s))$ est continue sur I par composition. Puisque la fonction y est solution de (3.8), il vient que y' est continue sur I, donc y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Par théorème fondamental de l'analyse, on obtient

$$\forall t \in I, \qquad y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} y'(s)\mathrm{d}s.$$

Puisque y est solution du problème de Cauchy (3.8), ceci s'écrit encore

$$\forall t \in I, \qquad y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s,$$

ce qui fournit (3.9).

Dans le sens réciproque, supposons que y est continue sur I, et vérifie (3.9). Puisque y est à valeurs dans Ω et puisque f est continue sur $J \times \Omega$, il vient par composition que $s \mapsto f(s, y(s))$ est continue sur I (on rappelle que $I \subset J$). Par théorème sur les intégrales fonction d'une de leurs bornes (inclus dans la propriété 2.1.72), il vient que la fonction $t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Puisque y vérifie (3.9), on en déduit qu'elle est bien solution du problème de Cauchy (3.8) sur I. ■

3.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz local

3.2.1 Rappel sur le théorème du point fixe de Picard

Théorème 3.2.1 (du point fixe de Picard) [1] *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X non-vide et complète. Soit f une contraction de A dans A, c'est-à-dire une application de A dans A telle qu'il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que*

$$\forall x, y \in A, \qquad d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

L'application f admet un unique point fixe $x^\star \in A$ (c'est-à-dire qu'il existe un unique $y \in A$ vérifiant $f(y) = y$). De plus, quel que soit $x_0 \in A$, la suite récurrente partant de x_0 définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ est convergente, de limite $x^\star$.

Preuve. Montrons tout d'abord que la fonction f admet effectivement un point fixe dans A. Puisque $A \neq \emptyset$, on peut choisir $x_0 \in A$. Puisque la partie A est stable par f, la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Observons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}^\star$,

$$d(x_{n+m+1}, x_{n+m}) = d(f(x_{n+m}), f(x_{n+m-1})) \leq k d(x_{n+m}, x_{n+m-1}).$$

Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^\star$, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^\star$,

$$d(x_{n+m+1}, x_{n+m}) \leq k^m d(x_{n+1}, x_n),$$

et l'on s'aperçoit que cette majoration est encore valable pour $m = 0$. On en déduit que pour tout

1. Le théorème du point fixe de Picard est (très) souvent appelé théorème du point fixe de Banach. C'est toutefois à Picard que l'on doit l'idée de l'utiliser pour montrer l'existence de solutions à une équation différentielle.

$(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{m=0}^{p-1} d(x_{n+m+1}, x_{n+m}) \\ &\leq \sum_{m=0}^{p-1} k^m d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_{n+1}, x_n) \sum_{m=0}^{p-1} k^m \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) \sum_{m=0}^{p-1} k^m \\ &\leq k^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-k}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

puisque $k \in [0,1[$. De plus, toujours car $k \in [0,1[$, on a $k^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, l'inégalité (3.10) montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans A. Puisque la partie A est complète, on en déduit que cette suite converge vers un certain $x^\star \in A$. Puisque la fonction f est lipschitzienne sur A, elle est en particulier continue sur A, donc elle est continue en $x^\star$. On en déduit que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x^\star)$. Or, cette suite est exactement la suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers $x^\star$, comme suite extraite d'une suite convergeant vers $x^\star$. L'unicité de la limite de cette suite assure que $x^\star = f(x^\star)$. Ceci démontre l'existence d'un point fixe pour f dans A. L'unicité provient du fait que si $x^\star \in A$ et $y^\star \in A$ sont deux points fixes de f dans A, alors

$$d(x^\star, y^\star) = d(f(x^\star), f(y^\star)) \leq k d(x^\star, y^\star).$$

Ainsi, $(1-k)d(x^\star, y^\star) \leq 0$. Or $(1-k) > 0$. Donc $d(x^\star, y^\star) \leq 0$, donc $d(x^\star, y^\star) = 0$, donc $x^\star = y^\star$. L'unicité du point fixe de f dans A est ainsi démontrée. Enfin, le fait que, quel que soit $x_0 \in A$, la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est en fait convergente vers $x^\star$ provient de l'analyse faite en début de preuve (cette suite converge vers un point fixe de f dans A) et de l'unicité du point fixe de f dans A. ■

Corollaire 3.2.2 *Soit (X,d) un espace métrique et A une partie de X non-vide et complète. Soit f une application de A dans A, telle qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que la fonction*

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

est une contraction sur A. La fonction f admet un unique point fixe dans A.

Preuve. Appliquant le théorème précédent à la fonction f^n, il existe un unique $a \in A$ tel que $f^n(a) = a$. On en déduit par associativité de la composition des applications que

$$f(a) = f(f^n(a)) = f^{n+1}(a) = f^n(f(a)).$$

Ceci assure que $f(a)$ est un point fixe de f^n dans A (puisque $a \in A$ et f est une application de A dans A). Par unicité du point fixe de f^n dans A, il vient que $f(a) = a$. Ceci démontre l'existence d'un point fixe de f dans A. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que tout point fixe de f dans A est un point fixe de f^n dans A. Or f^n admet un unique point fixe dans A. ■

3.2.2 Cylindres de sécurité en espace-temps

On fixe $d \in \mathbb{N}^\star$ (correspondant au produit Np des sections précédentes) et l'on munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne usuelle, notée $\|\cdot\|$. Ainsi, $\mathbb{R}^d$, muni de la distance induite par $\|\cdot\|$ est un espace métrique. On utilisera en particulier abondamment les notations sur les boules ouvertes et fermées introduites en Section 1.1.3.

Définition 3.2.3 *On appelle* **cylindre en espace-temps** *toute partie de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *de la forme* $[a, b] \times B(y_0, r]$ *avec* $a < b$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ *et* $r > 0$. *Le point* $\left(\frac{a+b}{2}, y_0\right)$ *est appelé* **centre du cylindre**, r *est son* **rayon**, *et* $b - a$ *est sa* **hauteur**.

Définition 3.2.4 *Soit* $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ *et* $\ell > 0$. *On note* $S(t_0, y_0, \ell, r)$ *le cylindre en espace-temps de centre* (t_0, y_0), *de hauteur* 2ℓ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble*

$$S(t_0, y_0, \ell, r) = \left\{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \;\middle|\; |t - t_0| \leq \ell \text{ et } \|y - y_0\| \leq r\right\} = [t_0 - \ell, t_0 + \ell] \times B(y_0, r].$$

On note également $S^-(t_0, y_0, \ell, r)$ *et* $S^+(t_0, y_0, \ell, r)$ *les deux cylindres en espace-temps suivants, dont la réunion est* $S(t_0, y_0, \ell, r)$ *:*

$$\begin{aligned} S^+(t_0, y_0, \ell, r) &= \left\{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \;\middle|\; 0 \leq t - t_0 \leq \ell \text{ et } \|y - y_0\| \leq r\right\} = [t_0, t_0 + \ell] \times B(y_0, r] \\ S^-(t_0, y_0, \ell, r) &= \left\{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \;\middle|\; 0 \leq t_0 - t \leq \ell \text{ et } \|y - y_0\| \leq r\right\} = [t_0 - \ell, t_0] \times B(y_0, r]. \end{aligned}$$

Définition 3.2.5 *On se donne une fonction* f *définie sur le produit d'un intervalle* J *par une partie* Ω *de* $\mathbb{R}^d$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *Pour* $t_0 \in I$ *et* $y_0 \in \Omega$, $\ell > 0$ *et* $r > 0$, *on dit que le cylindre* $S(t_0, y_0, \ell, r)$ *est* **de sécurité pour le problème de Cauchy** (3.8) *lorsque* $S(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega$ *et*

$$\forall (t, y) \in S(t_0, y_0, \ell, r), \qquad \|f(t, y)\| \leq \frac{r}{\ell}.$$

On dit que $S^+(t_0, y_0, \ell, r)$ *est* **de sécurité pour le problème de Cauchy** (3.8) *lorsque* $S^+(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega$ *et*

$$\forall (t, y) \in S^+(t_0, y_0, \ell, r), \qquad \|f(t, y)\| \leq \frac{r}{\ell},$$

et l'on dit que $S^-(t_0, y_0, \ell, r)$ *est* **de sécurité pour le problème de Cauchy** (3.8) *lorsque* $S^-(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega$ *et*

$$\forall (t, y) \in S^-(t_0, y_0, \ell, r), \qquad \|f(t, y)\| \leq \frac{r}{\ell}.$$

Remarque 3.2.6 *On remarquera que* (t_0, y_0) *est le centre de* $S(t_0, y_0, \ell, r)$ *mais n'est ni celui de* $S^-(t_0, y_0, \ell, r)$ *ni celui de* $S^+(t_0, y_0, \ell, r)$.

Propriété 3.2.7 *Soit* f *une fonction définie sur le produit d'un intervalle* I *par une partie* Ω *de* $\mathbb{R}^d$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *et* $S = S(t_0, y_0, \ell, r)$ *un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy* (3.8). *Pour tout* $L \in]0, \ell[$, *le cylindre* $\tilde{S} = S(t_0, y_0, L, r)$ *est de sécurité pour le problème de Cauchy* (3.8).

Preuve. Fixons $L \in]0, \ell[$. Observons que $\tilde{S} \subset S$. Puisque S est de sécurité pour f, on a pour tout $(t, y) \in S$, $\|f(t, y)\| \leq r/\ell$. À plus forte raison, on a pour tout $(t, y) \in \tilde{S}$, $\|f(t, y)\| \leq r/\ell$. Puisque $r/\ell < r/L$, on conclut que $\tilde{S}$ est également de sécurité pour f. ∎

Lemme 3.2.8 (de sécurité) *Soit f une fonction définie sur le produit d'un intervalle J par une partie Ω de $\mathbb{R}^d$ et $S = S(t_0, y_0, \ell, r)$ un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy* (3.8)*. Soit y une fonction dérivable sur $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ à valeurs dans Ω, solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases}. \tag{3.11}$$

Alors la fonction y est à valeurs dans $B(y_0, r]$ sur $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$.

Remarque 3.2.9 *C'est ce lemme de sécurité qui justifie l'expression "de sécurité" pour le cylindre S relativement à la fonction f : toute solution y de* (3.11) *sur la partie temporelle du cylindre $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ passant par y_0 en t_0 ne peut pas sortir de S sur $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ (elle reste en sécurité).*

Remarque 3.2.10 *Ce lemme de sécurité, comme on va le voir dans la preuve ci-dessous, peut également s'écrire pour des cylindres de sécurité pour* (3.11) *de la forme $S^+(t_0, y_0, \ell, r)$ et des solutions sur $[t_0, t_0 + \ell]$, ainsi que pour des cylindres de sécurité pour* (3.11) *de la forme $S^-(t_0, y_0, \ell, r)$ et des solutions sur $[t_0 - \ell, t_0]$.*

Preuve. La fonction y est dérivable sur $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$, et elle est donc continue sur cet intervalle. Puisque $B(y_0, r[$ est un ouvert contenant $y(t_0) = y_0$, l'ensemble $y^{-1}(B(y_0, r[)$ est un ouvert de $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ contenant t_0. En particulier, il contient $[t_0, t_0 + \delta]$ pour un certain $\delta \in]0, \ell[$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $\tilde{t} \in [t_0, t_0 + \ell]$ tel que $y(\tilde{t}) \notin B(y_0, r]$. En particulier, on a $\tilde{t} \in]t_0 + \delta, t_0 + \ell]$. La partie

$$A = \{t \in [t_0, t_0 + \ell] \mid y(t) \notin B(y_0, r]\},$$

est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient $\tilde{t}$) minorée (par t_0). Elle admet donc une borne inférieure $t^\star \in [t_0, t_0 + \ell]$. Puisque $y([t_0, t_0 + \delta]) \subset B(y_0, r[$, on a également $t^\star \in [t_0 + \delta, t_0 + \ell]$. Par définition de $t^\star$ et de A, on a de plus, pour $t \in [t_0, t^\star[$, $\|y(t) - y_0\| \leq r$. Par continuité de la fonction y en $t^\star$, on en déduit que $\|y(t^\star) - y_0\| \leq r$. Ceci interdit le fait que $t^\star = t_0 + \ell$ (si $t^\star = t_0 + \ell$, alors A est vide). On a donc $t^\star \in [t_0 + \delta, t_0 + \ell[$. La fonction y étant dérivable sur $[t_0, t^\star]$, on a par inégalité des accroissements finis (CDI1),

$$\begin{aligned} \|y(t^\star) - y(t_0)\| & \leq (t^\star - t_0) \sup_{t \in [t_0, t^\star]} \|y'(t)\| \\ & \leq (t^\star - t_0) \sup_{t \in [t_0, t^\star]} \|f(t, y(t))\| \\ & \leq (t^\star - t_0) \sup_{(t,y) \in [t_0, t^\star] \times B(y_0, r]} \|f(t, y)\| \\ & \leq (t^\star - t_0) \sup_{(t,y) \in S} \|f(t, y)\| \\ & \leq r \frac{(t^\star - t_0)}{\ell} \\ & < r, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que S est de sécurité pour (3.8), puis que $t^\star - t_0 < \ell$. On en déduit que $t^\star \in y^{-1}(B(y_0, r[)$. Or ce dernier ensemble est un ouvert de $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ et $t^\star \in [t_0 + \delta, t_0 + \ell[$. On en déduit qu'il existe $t_1 \in]t_\star, t_0 + \ell[$ tel que $[t^\star, t_1] \subset y^{-1}(B(y_0, r[)$. Ceci contredit le fait que $t^\star = \inf A$ (car aucun élément de $[t^\star, t_1]$ n'est dans A). On a finalement montré par l'absurde que $y([t_0, t_0 + \ell]) \subset B(y_0, r]$.

On montre de manière similaire que $y([t_0-\ell,t_0])\subset B(y_0,r]$. Ceci complète la preuve du lemme. ■

En adaptant la preuve du lemme de sécurité 3.2.8, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.11 (de sécurité) *Soit f une fonction définie sur le produit d'un intervalle J par une partie Ω de $\mathbb{R}^d$ et $S=S(t_0,y_0,\ell,r)$ un cylindre de sécurité pour le problème de Cauchy* (3.8)*. Soit y une fonction dérivable sur un intervalle D contenant t_0, à valeurs dans Ω, solution du problème de Cauchy* (3.11)*. Alors la fonction y est à valeurs dans $B(y_0,r]$ sur l'intervalle $D\cap[t_0-\ell,t_0+\ell]$.*

Preuve. Les intervalles J et D admettent t_0 comme point commun, donc $D\cap J$ est un intervalle (qui contient t_0). En adaptant la preuve du lemme 3.2.8, on montre que y est à valeurs dans $B(y_0,r]$ sur tout segment de la forme $[t_0,t_0+\delta]\subset D\cap J$ (pour $\delta>0$) et sur tout intervalle de la forme $[t_0-\delta,t_0]\subset D\cap J$ (pour $\delta>0$). Ceci démontre la conclusion du corollaire 3.2.11. ■

Propriété 3.2.12 (existence de cylindres de sécurité) *Soit f une fonction continue sur le produit d'un intervalle ouvert J par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $(t_0,y_0)\in J\times\Omega$. Il existe $\ell>0$ et $r>0$ tels que $S(t_0,y_0,\ell,r)$ est de sécurité pour le problème de Cauchy* (3.8)*.*

Preuve. Puisque J est ouvert et $t_0\in J$, il existe $L>0$ tel que $]t_0-L,t_0+L[\subset J$. Puisque Ω est ouvert et $y_0\in\Omega$, il existe $R>0$ tel que $B(y_0,R[\subset\Omega$. Posons $\tilde{S}=S(t_0,y_0,L/2,R/2)$, et observons que $\tilde{S}\subset J\times\Omega$. Puisque la fonction f est continue sur $J\times\Omega$, elle est continue sur $\tilde{S}$. Puisque $\tilde{S}$ est compact, la fonction f est bornée sur $\tilde{S}$. Il existe donc $M>0$ tel que pour tout $(t,y)\in\tilde{S}$, $\|f(t,y)\|\le M$. Posant $\ell=\min(L/2,R/(2M))$, il vient que le cylindre $S=S(t_0,y_0,\ell,R/2)$ est de sécurité pour le problème de Cauchy (3.8). En effet, on a $S\subset\tilde{S}\subset J\times\Omega$ et de plus

$$\forall(t,y)\in S,\qquad \|f(t,y)\|\le M\le\frac{R}{2\ell},$$

car $\ell\le R/(2M)$ (c'est une redite de la proposition 3.2.7). ■

3.2.3 Champs de vecteurs localement lipschitziens en espace

Définition 3.2.13 *Soit f une fonction définie sur le produit d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit $I\subset J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X\subset\Omega$ une partie de Ω. On dit que la fonction f est* **lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable** *(ou encore "***lipschitzienne en espace***") sur $I\times X$ s'il existe $M>0$ tel que*

$$\forall t\in I,\quad \forall y,z\in X,\qquad \|f(t,y)-f(t,z)\|\le M\|y-z\|.$$

Définition 3.2.14 *Soit f une fonction définie sur le produit d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On dit que f est* **localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable** *(parfois "***localement lipschitzienne en espace***") sur $J\times\Omega$ lorsque pour tout $(t_0,y_0)\in J\times\Omega$, il existe $M>0$, $\delta>0$ et $r>0$ tels que $B(y_0,r]\subset\Omega$ et*

$$\forall t\in J\cap[t_0-\delta,t_0+\delta],\quad \forall y,z\in B(y_0,r],\qquad \|f(t,y)-f(t,z)\|\le M\|y-z\|.$$

Autrement dit, la fonction f est localement lipschitzienne en espace sur $J\times\Omega$ lorsque tout point $(t_0,y_0)\in J\times\Omega$ est inclus dans un certain $(J\cap[t_0-\delta,t_0+\delta])\times B(y_0,r]$ (pour un certain $r>0$ et un certain $\delta>0$) sur lequel elle est lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

Une dernière manière équivalente de dire que la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur $J \times \Omega$ est de dire que tout point de $J \times \Omega$ possède un voisinage (pour la topologie induite sur cette partie par celle de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$) sur lequel la fonction est lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

Lemme 3.2.15 *Soit $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, $y \in B(y_0, r[$ et $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Définissons la fonction*

$$\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ t & \longmapsto & y + tu \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\varphi^{-1}(B(y_0, r[)$ est un intervalle ouvert borné contenant 0.

Preuve. La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble $B(y_0, r[$ étant un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'ensemble $\varphi^{-1}(B(y_0, r[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Le fait qu'il contient 0 traduit le fait que $\varphi(0) = y$ et que $y \in B(y_0, r[$ par hypothèse. Le fait qu'il est borné vient du fait que, puisque $u \neq 0_{\mathbb{R}^d}$, on a $\|\varphi(t)\| \underset{|t|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (alors que $B(y_0, r[$ est borné). Enfin, montrons que cet ensemble est un intervalle. Soit $t_1, t_2 \in \varphi^{-1}(B(y_0, r[)$. Ceci signifie que $\|\varphi(t_1) - y_0\| < r$ et $\|\varphi(t_2) - y_0\| < r$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Observons que

$$\begin{aligned} \|\varphi(\lambda t_2 + (1-\lambda)t_1) - y_0\| &= \|y + (\lambda t_2 + (1-\lambda)t_1)u - y_0\| \\ &= \|\lambda\,(y + t_2 u - y_0) + (1-\lambda)\,(y + t_1 u - y_0)\,\| \\ &\leq \lambda\|y + t_2 u - y_0\| + (1-\lambda)\|y - t_1 u - y_0\| \\ &\leq \lambda\|\varphi(t_2) - y_0\| + (1-\lambda)\|\varphi(t_1) - y_0\|, \end{aligned}$$

et l'on conclut que $\varphi(\lambda t_2 + (1-\lambda)t_1) \in B(y_0, r[$ car le dernier majorant ci-dessus est toujours strictement plus petit que r. Ceci montre que $[t_1, t_2] \subset \varphi^{-1}(B(y_0, r[)$, et l'on conclut ainsi que $\varphi^{-1}(B(y_0, r[)$ est un intervalle. ■

Propriété 3.2.16 *Soit f une fonction définie sur le produit d'un intervalle non trivial J de $\mathbb{R}$ par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Cette fonction est localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$ si et seulement si elle est lipschitzienne par rapport à sa seconde variable sur tout cylindre en espace-temps inclus dans $J \times \Omega$.*

Preuve. Dans le sens direct, supposons la fonction f localement lipschitzienne en espace sur $J\times\Omega$. Soit S un cylindre en espace temps inclus dans $J \times \Omega$. On peut l'écrire $[a, b] \times B(y_0, r]$ pour certains $a < b$, $r > 0$ et $y_0 \in \Omega$. Soit $(t, y) \in S$. Puisque la fonction f est localement lipschitzienne sur $J\times\Omega$, en utilisant la définition 3.2.14, il existe $\delta_{t,y} > 0$, $r_{t,y} > 0$ et $M_{t,y} > 0$ tels que $B(y, r_{t,y}] \subset \Omega$ et

$$\forall s \in [a, b] \cap [t - \delta_{t,y}, t + \delta_{t,y}], \quad \forall y_1, y_2 \in B(y, r_{t,y}], \qquad \|f(s, y_1) - f(s, y_2)\| \leq M_{t,y}\|y_1 - y_2\|.$$

En particulier, on a

$$S = [a, b] \times B(y_0, r] \subset \underset{(t,y)\in S}{\cup} \left(]t - \delta_{t,y}, t + \delta_{t,y}[\times B(y, r_{t,y}[\right).$$

Puisque S est compact dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ (il est non-vide par définition des cylindres), on peut extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert ci-dessus par la propriété de Borel-Lebesgue (voir la définition 1.1.29). Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ et $t_1, \ldots, t_N \in [a, b]$, $y_1, \ldots, y_N \in B(y_0, r]$ tels que

$$S = [a, b] \times B(y_0, r] \subset \underset{n\in\{1,\ldots,N\}}{\cup} \left(]t_n - \delta_{t_n,y_n}, t_n + \delta_{t_n,y_n}[\times B(y_n, r_{t_n,y_n}[\right). \tag{3.12}$$

On peut ainsi définir le nombre réel strictement positif.

$$M = \max_{n\in\{1,\dots,N\}} M_{t_n,y_n}. \tag{3.13}$$

Nous allons montrer que M est une constante de Lipschitz en la seconde variable pour la fonction f sur S, c'est-à-dire que

$$\forall t \in [a,b], \quad \forall z_1, z_2 \in B(y_0,r], \qquad \|f(t,z_1) - f(t,z_2)\| \leq M\|z_1 - z_2\|. \tag{3.14}$$

Fixons donc $t \in [a,b]$ et $z_1, z_2 \in B(y_0,r]$. Si $z_1 = z_2$, alors l'inégalité voulue (3.14) est évidente. Supposons donc $z_1 \neq z_2$. Puisque $(t,z_1) \in S$, on a par (3.12) qu'il existe $n_1 \in \{1,\cdots,N\}$ tel que $(t,z_1) \in]t_{n_1} - \delta_{t_{n_1},y_{n_1}}, t_{n_1} + \delta_{t_{n_1},y_{n_1}}[\times[B(y_{n_1}, r_{t_{n_1},y_{n_1}}[$. Considérant la fonction φ définie pour $s \in \mathbb{R}$ par $\varphi(s) = z_1 + s(z_2 - z_1)$, il vient par le lemme 3.2.15 que $\varphi^{-1}(B(y_{n_1}, r_{t_{n_1},y_{n_1}}[)$ est un intervalle ouvert borné contenant 0. Notons $s_1 = \sup \varphi^{-1}(B(y_{n_1}, r_{t_{n_1},y_{n_1}}[)$. On a $0 < s_1 < +\infty$. Si $s_1 \geq 1$, alors par continuité de φ, on a $\varphi([0,1]) \subset B(y_{n_1}, r_{t_{n_1},y_{n_1}}]$. En particulier, $\varphi(1) = z_2 \in B(y_{n_1}, r_{t_{n_1},y_{n_1}}]$. Ainsi, on a

$$\|f(t,z_1) - f(t,z_2)\| \leq M_{t_{n_1},y_{n_1}}\|z_1 - z_2\| \leq M\|z_1 - z_2\|,$$

et l'inégalité annoncée (3.14) est vérifiée dans ce cas. Dans le cas contraire ($s_1 < 1$), on a pour $s \in]s_1, 1]$, $\varphi(s) \notin B(y_{n_1}, r_{t_{n_1},y_{n_1}}]$ (par le lemme 3.2.15), et donc $(t,\varphi(s)) \notin]t_{n_1} - \delta_{t_{n_1},y_{n_1}}, t_{n_1} + \delta_{t_{n_1},y_{n_1}}[\times B(y_{n_1}, r_{t_{n_1},y_{n_1}}[$. Par ailleurs, en utilisant la continuité de φ en s_1, $\|\varphi(s_1) - y_{n_1}\| = r_{t_{n_1},y_{n_1}}$. On peut alors recommencer. Utilisant à nouveau (3.12), il existe $n_2 \in \{1,\cdots,N\} \setminus \{n_1\}$ tel que $(t,\varphi(s_1)) \in]t_{n_2} - \delta_{t_{n_2},y_{n_2}}, t_{n_2} + \delta_{t_{n_2},y_{n_2}}[\times B(y_{n_2}, r_{t_{n_2},y_{n_2}}[$. Par le lemme 3.2.15, l'ensemble $\varphi^{-1}(B(y_{n_2}, r_{t_{n_2},y_{n_2}}[)$ est un intervalle ouvert borné contenant s_1 et l'on peut poser $s_2 = \sup \varphi^{-1}(B(y_{n_2}, r_{t_{n_2},y_{n_2}}[)$, puis distinguer suivant que $s_2 \geq 1$ ou $s_2 < 1$. Puisque N est fini, et puisque la suite $n_1, n_2, \dots$ ne se répète pas (grâce au lemme 3.2.15), il existe $p \geq 1$ tel que $s_p \geq 1$. Posant $s_0 = 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\|f(t,\varphi(1)) - f(t,\varphi(0))\| &\leq \|f(t,\varphi(1)) - f(t,\varphi(s_{p-1}))\| + \sum_{k=1}^{p-1} \|f(t,\varphi(s_k)) - f(t,\varphi(s_{k-1}))\| \\
&\leq M_{t_{n_p},y_{n_p}}\|\varphi(1) - \varphi(s_{p-1})\| + \sum_{k=1}^{p-1} M_{t_{n_k},y_{n_k}}\|\varphi(s_k) - \varphi(s_{k-1})\| \\
&\leq M\|\varphi(1) - \varphi(s_{p-1})\| + M\sum_{k=1}^{p-1} \|\varphi(s_k) - \varphi(s_{k-1})\|,
\end{aligned}$$

en utilisant la définition (3.13) de M. Puisque les points $\varphi(0), \varphi(s_1), \dots, \varphi(1)$ sont alignés, il vient que

$$\|z_1 - z_2\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| = \|\varphi(1) - \varphi(s_{p-1})\| + \sum_{k=1}^{p-1} \|\varphi(s_k) - \varphi(s_{k-1})\|.$$

On en déduit que

$$\|f(t,\varphi(1)) - f(t,\varphi(0))\| \leq M\|z_1 - z_2\|.$$

Ceci achève la preuve de (3.14) et de l'implication dans le sens direct de la propriété. Dans le sens réciproque, la propriété est évidente (on utilise le fait que l'intervalle J est non trivial). Ainsi, la propriété est démontrée. ■

Remarque 3.2.17 *Dans la preuve précédente, la suite $s_1, \dots, s_p$ dépend de t, z_1 et z_2, mais pas la constante M dans la majoration finale : celle-ci ne dépend que de S et de la fonction f.*

Propriété 3.2.18 *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On se donne une fonction f de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$, que l'on suppose continue sur $J \times \Omega$ et admettant en tout point de $J \times \Omega$ des dérivées partielles par rapport à chacune des variables d'espace, de telle sorte que pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$ la fonction $(t, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_i}(t, y)$ est continue sur $J \times \Omega$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). Sous ces hypothèses, la fonction f est localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$.*

Preuve. Si J est vide, il n'y a rien à démontrer. Si J est réduit à un point, on adapte facilement la preuve qui va suivre en travaillant sur des boules fermées incluses dans Ω [2]. Sinon, l'intervalle J est non trivial. Utilisant le résultat de la propriété 3.2.16, il nous suffit de montrer que f est lipschitzienne en espace sur tout cylinde de sécurité inclus dans $J \times \Omega$. Fixons donc $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, $r, \ell > 0$ tels que $S(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega$. Fixons $t \in [t_0 - \ell, t_0 + \ell]$, les hypothèses sur f impliquent que la fonction $y \mapsto f(t, y)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω. Notons $f_1, \ldots, f_d$ les composantes de f (qui sont donc des fonctions de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}$). Fixons $(y_1, y_2) \in B(y_0, r]$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, la fonction

$$g_k : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & f_k(t, sy_2 + (1-s)y_1) \end{pmatrix},$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$ par composition et par convexité de $B(y_0, r]$. Le théorème fondamental de l'analyse assure alors que $g_k(1) - g_k(0) = \int_0^1 g_k'(s)\mathrm{d}s$. Ceci s'écrit encore

$$f_k(t, y_2) - f_k(t, y_1) = \int_0^1 \langle \nabla f_k(t, sy_2 + (1-s)y_1), y_2 - y_1 \rangle \mathrm{d}s. \tag{3.15}$$

Puisque pour tout $(k, i) \in \{1, \ldots, d\}^2$, l'application $(t, y) \mapsto \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(t, y)$ est continue sur le compact $S(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall (p, i) \in \{1, \ldots, d\}^2, \quad \forall (s, y) \in S(t_0, y_0, \ell, r), \quad \left| \frac{\partial f_p}{\partial y_i}(s, y) \right| \leq M.$$

Ceci implique que

$$\forall p \in \{1, \ldots, d\}, \quad \forall (s, y) \in S(t_0, y_0, \ell, r), \quad \|\nabla f_p(s, y)\| \leq M\sqrt{d}.$$

Utilisant (3.15) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|f_k(t, y_2) - f_k(t, y_1)| \leq M\sqrt{d}\|y_2 - y_1\|.$$

Ceci valant pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$, il vient

$$\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq Md\|y_2 - y_1\|.$$

Ceci valant pour tout $t \in [t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ et tout $(y_1, y_2) \in B(y_0, r]$, il vient que f est lipschitzienne en espace sur $S(t_0, y_0, \ell, r)$. Ceci valant pour tout cylindre en espace-temps inclus dans $J \times \Omega$, la propriété 3.2.16 assure que f est localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$. ■

Corollaire 3.2.19 *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(J \times \Omega, \mathbb{R}^d)$. La fonction f est localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$.*

Preuve. Il suffit de se rendre compte que les hypothèses de ce corollaire assurent que celles de la propriété 3.2.18 sont vérifiées. La conclusion suit. ■

2. Si $J = \{t_0\}$, il suffit de montrer que $y \mapsto f(t_0, y)$ est lipschitzienne en espace sur toute boule fermée incluse dans Ω.

Remarque 3.2.20 *Dans le cas où f est autonome, il suffit que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω pour que f soit localement lipschitzienne sur Ω.*

3.2.4 Le théorème de Cauchy-Lipschitz local

Théorème 3.2.21 (de Cauchy-Lipschitz local) *Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et f un champ de vecteurs de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$, qui est continu sur $J \times \Omega$ et localement lipschitzien en espace sur $J \times \Omega$. Pour tout $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, et tous $r, \ell > 0$ tels que $S(t_0, y_0, \ell, r) \subset J \times \Omega$ est de sécurité[3] pour (3.8), il existe une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ à valeurs dans $B(y_0, r] \subset \Omega$ solution du problème de Cauchy (3.8). De plus, toute autre solution z du problème de Cauchy (3.8) sur un intervalle D contenant t_0 vérifie*

$$\forall t \in [t_0 - \ell, t_0 + \ell] \cap D, \qquad z(t) = y(t).$$

Preuve. Fixons $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ et $r, \ell > 0$ comme dans les hypothèses. Notons I le segment $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$. Commençons par prouver l'existence d'une telle fonction y en construisant un opérateur T laissant stable une partie non vide et complète de l'espace de Banach $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ (muni de la norme infinie sur I), dont une puissance est contractante et dont tout point fixe est solution du problème de Cauchy (3.8). Pour cela, notons

$$A = \{y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d) \mid \forall t \in I,\ \|y(t) - y_0\| \leq r\}.$$

Observons que la partie A de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ est non vide (elle contient la fonction constante égale à y_0). Elle est de plus fermée donc complète dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$. Pour $y \in A$, définissons la fonction

$$T(y) : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ t & \longmapsto & y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \mathrm{d}s \end{pmatrix}.$$

Observons que, puisque $y \in A$, cette fonction prend ses valeurs dans $B(y_0, r] \subset \Omega$. Puisque par ailleurs $I \subset J$, il vient que la fonction $s \mapsto f(s, y(s))$ est bien définie sur I. Elle est de plus continue sur I par composition, puisque la fonction f est continue sur $J \times \Omega$ par hypothèse. On en déduit que la fonction $T(y)$ est bien définie sur I. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur I par la propriété 2.1.72. En particulier, c'est une fonction continue sur I. De plus, pour tout $t \in I$, on a

$$\|T(y)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \mathrm{d}s \right\| \leq \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(s, y(s))\| \mathrm{d}s \leq |t - t_0| \|f\|_{\infty,S} \leq \ell \|f\|_{\infty,S} \leq r,$$

car S est de sécurité pour (3.8). Ainsi, $T(y) \in A$. On en déduit que T est une application de A dans A.

Puisque f est localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$, et puisque $S(t_0, y_0, \ell, r)$ est un cylindre en espace-temps inclus dans $J \times \Omega$, la fonction f est lipschitzienne en espace sur $S(t_0, y_0, \ell, r)$ par la propritété 3.2.16. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \forall z_1, z_2 \in B(y_0, r], \qquad \|f(t, z_1) - f(t, z_1)\| \leq M \|z_1 - z_2\|. \tag{3.16}$$

Montrons par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall y_1, y_2 \in A, \quad \forall t \in I, \qquad \|T^p(y_1)(t) - T^p(y_2)(t)\| \leq \frac{M^p |t - t_0|^p}{p!} \|y_1 - y_2\|_{\infty,I}.$$

3. À (t_0, y_0) fixés, un tel couple $r, \ell > 0$ existe par la propriété 3.2.12.

L'initialisation ($p = 0$) est triviale. Pour montrer l'hérédité, supposons la propriété vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie également pour $p + 1$. Considérons $y_1, y_2 \in A$ et $t \in I$. Observons que

$$\begin{aligned}
\left\| T^{p+1}(y_1)(t) - T^{p+1}(y_2)(t) \right\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s, T^p(y_1)(s)) - f(s, T^p(y_2)(s)) \right) \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \| f(s, T^p(y_1)(s)) - f(s, T^p(y_2)(s)) \| \, \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} M \, \| T^p(y_1)(s) - T^p(y_2)(s) \| \, \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

en utilisant (3.16). Utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que

$$\begin{aligned}
\left\| T^{p+1}(y_1)(t) - T^{p+1}(y_2)(t) \right\| &\leq M \int_{\min(t,t_0)}^{\max(t,t_0)} \frac{M^p |s - t_0|^p}{p!} \mathrm{d}s \, \| y_1 - y_2 \|_{\infty, I} \\
&\leq \frac{M^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \, \| y_1 - y_2 \|_{\infty, I} \, .
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'hérédité de la propriété. Cette propriété implique en particulier que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall y_1, y_2 \in A, \qquad \| T^p(y_1) - T^p(y_2) \|_{\infty, I} \leq \frac{M^p \ell^p}{p!} \| y_1 - y_2 \|_{\infty, I}.$$

Choisissant $p_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour avoir $(M\ell)^{p_0}/(p_0!) < 1$, il vient que T^{p_0} est une contraction de A dans A. Par le corollaire 3.2.2, il vient que T admet un unique point fixe $y \in A$. En particulier, il existe $y \in A$ tel que

$$\forall t \in I, \qquad T(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) \mathrm{d}s = y(t).$$

Par la propriété 3.1.18, il vient que y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (elle est dans A donc à valeurs dans $B(y_0, r]$) et est une solution de (3.8) sur I. Ceci achève la preuve de l'existence.

Pour l'unicité, considérons une solution z de (3.8) sur un intervalle $D \subset J$ contenant t_0. Montrons que la fonction z coïncide avec y sur tout segment de la forme $[t_0 - \delta, t_0]$ inclus dans $D \cap I$ et sur tout segment de la forme $[t_0, t_0 + \delta]$ inclus dans $D \cap I$. Pour cela, considérons un segment de la forme $[t_0, t_0 + \delta]$ inclus dans $D \cap I$ (le cas $[t_0 - \delta, t_0]$ se traite de manière similaire). En utilisant le corollaire 3.2.11 du lemme 3.2.8, la fonction z, restreinte à $[t_0, t_0 + \delta]$, est à valeurs dans $B(y_0, r]$. Considérons la partie

$$A_\delta = \{ u \in \mathcal{C}^0([t_0, t_0 + \delta], \mathbb{R}^d) \mid \forall t \in [t_0, t_0 + \delta], \; \| u(t) - y_0 \| \leq r \}.$$

La restriction de y, construite ci-dessus, à $[t_0, t_0 + \delta]$ est un élément de A_δ. Par les arguments précédents, la restriction de z à $[t_0, t_0 + \delta]$ est également un élément de A_δ. De plus, l'opérateur T_δ défini pour $u \in A_\delta$ par

$$T_\delta(u) : \begin{pmatrix} [t_0, t_0 + \delta] & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ t & \longmapsto & y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) \mathrm{d}s \end{pmatrix},$$

admet un unique point fixe dans A_δ en adaptant l'analyse précédente. Puisque les restrictions de y et z à $[t_0, t_0 + \delta]$ sont solution du problème de Cauchy (3.8) sur $[t_0, t_0 + \delta]$, chacune d'elle est fixe par T_δ en utilisant la propriété 3.1.18. On en déduit que ces restrictions sont égales sur $[t_0, t_0 + \delta]$. Ceci valant pour tout intervalle de la forme $[t_0, t_0 + \delta]$ inclus dans $D \cap I$ (et pour tout intervalle de la forme $[t_0-\delta,t_0]$ inclus dans $D\cap I$ en adaptant un peu ce qui précède), il vient que z et y coïncident sur tout l'intervalle $D\cap I$. Ceci montre l'unicité locale pour le problème de Cauchy (3.8). ■

Propriété 3.2.22 (régularité du champ de vecteur implique régularité des solutions) *Soit $k\in\mathbb{N}$. Si $f:J\times\Omega\to\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J\times\Omega$, alors toute solution de l'équation différentielle*

$$y'(t)=f(t,y(t)), \tag{3.17}$$

sur un intervalle $I\subset J$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I.

Preuve. On montre par récurrence sur $p\in\{0,\cdots,k\}$ que y est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I.
Pour l'initialisation, constatons que, puisque $t\mapsto y(t)$ est dérivable sur I, elle est continue sur I. Ainsi, $t\mapsto(t,y(t))$ est continue sur I à valeurs dans $J\times\Omega$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J\times\Omega$, elle est continue sur $J\times\Omega$. Par composition, il vient que $t\mapsto f(t,y(t))$ est continue sur I. Utilisant (3.17), il vient que y' est continue sur I. Par suite, y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Pour l'hérédité, supposons que y est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I pour un certain $p\in\{1,\ldots,k\}$. Alors la fonction $t\mapsto(t,y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, à valeurs dans $J\times\Omega$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J\times\Omega$, elle est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $J\times\Omega$. Par composition, $t\mapsto f(t,y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I. Utilisant (3.17), il vient que y' est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I. Par suite, y est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I. ■

3.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz global

3.3.1 Motivation

Soit f un champ de vecteur défini sur le produit d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, que l'on suppose continu sur $J\times\Omega$, et localement lipschitzien en espace sur $J\times\Omega$, de sorte qu'il vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21. Soit $(t_0,y_0)\in J\times\Omega$ une donnée de Cauchy. Par la propriété 3.2.12, on sait qu'il existe $r,\ell>0$ tel que $S(t_0,y_0,\ell,r)$ est de sécurité pour (3.8). Par le théorème 3.2.21, on sait qu'il existe une unique fonction $y_1:[t_0-\ell,t_0+\ell]\to B(y_0,r]$ solution de (3.8) sur $[t_0-\ell,t_0+\ell]$. En particulier, on a $(t_0+\ell,y_1(t_0+\ell))\in J\times\Omega$, et l'on peut considérer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t,y(t)) \\ y(t_0+\ell) &= y_1(t_0+\ell), \end{cases}$$

Par les mêmes arguments que précédemment, celui-ci admet une solution y_2 sur un certain $[t_0+\ell-\tilde{\ell},t_0+\ell+\tilde{\ell}]$. La fonction

$$y:\begin{pmatrix} [t_0-\ell,t_0+\ell+\tilde{\ell}] & \longrightarrow & \Omega \\ t & \longmapsto & \begin{cases} y_1(t) \text{ si } t\le t_0+\ell \\ y_2(t) \text{ si } t_0+\ell<t \end{cases} \end{pmatrix},$$

est alors une fonction continue sur $[t_0-\ell,t_0+\ell+\tilde{\ell}]$, dérivable sur $[t_0-\ell,t_0+\ell]$ et sur $[t_0+\ell,t_0+\ell+\tilde{\ell}]$, avec les demi-dérivées à droite et à gauche en $t_0+\ell$ qui coïncident. En particulier, elle est dérivable en $t_0+\ell$ et y vérifie l'équation différentielle. C'est donc également une solution du problème de Cauchy initial, qui prolonge y_1.

Le but de cette section 3.3 est de décrire les limites de cette possibilité de prolongement de solutions locales d'un problème de Cauchy.

3.3.2 Exemples

Exercice 3.3.1 *Pour $J = \mathbb{R}$ et $\Omega =]0, +\infty[$ $(d = 1)$, on considère l'équation différentielle*

$$y'(t) = -3\sin(t)\,(y(t))^{\frac{4}{3}}\,. \tag{3.18}$$

1. *Écrire le champ de vecteurs f associé à l'équation différentielle* (3.18) *et montrer qu'il vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21.*
2. *Déterminer une solution de l'équation différentielle* (3.18) *pour la donnée de Cauchy $(t_0, y_0) = (\pi/2, 1/8)$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *Déterminer une solution de l'équation différentielle* (3.18) *pour la donnée de Cauchy $(t_0, y_0) = (\pi/2, 8)$ sur $]\pi/3, 5\pi/3[$. Déterminer la limite de la solution aux bords de cet intervalle.*

Exercice 3.3.2 *Pour $J =]0, +\infty[$ et $\Omega = \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle*

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right). \tag{3.19}$$

1. *Écrire le champ de vecteurs f associé à l'équation différentielle* (3.19) *et montrer qu'il vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21. On remarquera que, lorsque f ne dépend pas de y, il s'agit d'un problème de calcul de primitives, et l'hypothèse de caractère localement lipschitzien en espace de f est trivialement vérifiée.*
2. *Déterminer une solution de l'équation différentielle* (3.19) *pour la donnée de Cauchy $(t_0, y_0) = (\frac{1}{2\pi}, 1)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.*
3. *Montrer que cette solution n'admet pas de limite finie en 0^+. Déterminer la limite de cette solution en $+\infty$.*

3.3.3 Bouts droits et gauches

On rappelle maintenant quelques notions de topologie qui seront utiles pour étudier le comportement des solutions maximales (qui seront définies en section 3.3.4) aux bords de leur intervalle de définition.

Définition 3.3.3 *Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $x \in X$. On dit que x* **est adhérent à** *A lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad B(x, \varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

On dit que x **est un point d'accumulation de** *A lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad (B(x, \varepsilon[\setminus\{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Un point adhérent à A qui n'est pas un point d'accumulation de A est (nécessairement dans A et) dit **point isolé (de** *A***)**.

On peut traduire ces définitions en termes de suites.

Propriété 3.3.4 *Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $x \in A$.*

Le point x est adhérent à la partie A si et seulement s'il est limite d'une suite de points de A.

Le point x est une point d'accumulation de la partie A si et seulement s'il est limite d'une suite **injective** *de points de A.*

Exemple 3.3.5 *Considérons $X = \mathbb{R}$ muni de la distance induite par la valeur absolue. Considérons la partie $A = (\mathbb{Q} \cap [0, 2]) \cup \{-1\}$.*

— *Le point 0 est un point de A, adhérent à A, d'accumulation de A.*
— *Le point $\sqrt{2}$ est un point hors de A, adhérent à A, d'accumulation de A.*
— *Le point -1 est un point de A, adhérent à A, mais qui n'est pas un point d'accumulation de A : c'est donc un point isolé de A.*

Définition 3.3.6 *Soient X et Y deux ensembles et f une fonction de X dans Y. On appelle* **graphe de la fonction** f *la partie* $\mathrm{Gr}(f)$ *de $X \times Y$ définie par*

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Définition 3.3.7 *Soit $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert (avec $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$), et y une application de I dans $\mathbb{R}^d$. On considère le graphe* $\mathrm{Gr}(y)$ *comme une partie de l'espace métrique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. On appelle* **bout gauche de** *y tout point d'accumulation de* $\mathrm{Gr}(y)$ *dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ de la forme (α, z) (où $z \in \mathbb{R}^d$) ; remarquer que $-\infty < \alpha$ dans ce cas. De même, on appelle* **bout droit de** *y tout point d'accumulation de* $\mathrm{Gr}(y)$ *dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ de la forme (β, z) (où $z \in \mathbb{R}^d$) ; remarquer que $\beta < +\infty$ dans ce cas.*

Exercice 3.3.8 *Déterminer les (éventuels) bouts droits et gauches des trois solutions calculées aux exercices de la section 3.3.2.*

3.3.4 Solutions maximales

Dans cette section, à nouveau, J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et f est une application de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$. On note $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ une donnée de Cauchy.

Définition 3.3.9 *Soit y_1 une solution du problème de Cauchy* (3.8) *sur un intervalle I_1 contenant t_0, et y_2 une solution du problème de Cauchy* (3.8) *sur un intervalle I_2 contenant t_0. On dit que y_2* **est une sur-solution de** y_1 *(sous entendu comme solution du problème de Cauchy* (3.8)*), ou de manière équivalente que y_1* **est une sous-solution de** y_2 *lorsque, d'une part, $I_1 \subset I_2$ et d'autre part*

$$\forall t \in I_1, \qquad y_1(t) = y_2(t).$$

Remarque 3.3.10 *Notons que, si y est une solution du problème de Cauchy* (3.8)*, alors c'est une sur-solution (et également une sous-solution) d'elle-même.*

Définition 3.3.11 *Une solution y du problème de Cauchy* (3.8) *sur l'intervalle I contenant t_0 est dite* **maximale** *si sa seule sur-solution est elle-même. Autrement dit, la solution y est maximale lorsque, quelle que soit la sur-solution $\tilde{y}$ de y sur un intervalle $\tilde{I}$ contenant t_0, on a $\tilde{I} \subset I$ (et donc $\tilde{I} = I$) et $\tilde{y} = y$.*

3.3.5 Le théorème de Cauchy-Lipschitz global

Théorème 3.3.12 (de Cauchy-Lipschitz global) *Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et f un champ de vecteurs de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$, qui est continu sur $J \times \Omega$ et localement lipschitzien en espace sur $J \times \Omega$. Pour tout $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy* (3.8)*. Celle-ci est définie (et solution) sur un intervalle ouvert I inclus* *dans J et contenant t_0. De plus, ses bouts droits et gauches*[4] *sont des éléments du bord $\partial(J \times \Omega)$ de $J \times \Omega$.*

Preuve. Partie 1 : existence d'une solution maximale
Considérons l'ensemble $\mathcal{I}$ des intervalles non triviaux inclus dans J sur lesquels il existe une solution au problème de Cauchy (3.8). Notons N_1 l'ensemble des extrémités gauches de ces intervalles et N_2 l'ensemble de leurs extrémités droites. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21 (propriété d'existence locale), il existe $\ell > 0$ tel que $[t_0 - \ell, t_0 + \ell] \in \mathcal{I}$. En particulier, $t_0 - \ell \in N_1$ et $t_0 + \ell \in N_2$. Les ensembles N_1 et N_2 sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides. On peut donc poser

$$\alpha = \inf N_1 \qquad \text{et} \qquad \beta = \sup N_2. \tag{3.20}$$

Puisque α est limite d'une suite décroissante d'éléments de J et β est limite d'une suite croissante d'éléments de J, et puisque J est un intervalle, on a

$$]\alpha, \beta[\subset J.$$

De plus, on a par construction $\alpha \leq t_0 - \ell < t_o$ et $t_0 < t_0 + \ell \leq \beta$, et donc

$$\alpha < t_0 < \beta.$$

Nous allons construire une solution de (3.8) sur $]\alpha, \beta[$ et nous montrerons ensuite qu'elle est maximale. Nous indiquons maintenant comment on la définit sur $[t_0, \beta[$ (la construction sur $]\alpha, t_0]$ est similaire, et laissée en exercice). Pour cela, fixons $t \in]t_0, \beta[$. Considérons deux solutions y_1 et y_2 de (3.8) respectivement sur I_1 et I_2, où I_1 et I_2 sont des intervalles contenant t_0 et t (ils contiennent donc chacun le segment $[t_0, t]$). Montrons que y_1 et y_2 coïncident sur $[t_0, t]$. Pour cela, introduisons la partie

$$A = \{s \in [t_0, t] \mid y_1 = y_2 \text{ sur } [t_0, s]\}. \tag{3.21}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21 assure que A contient un certain $t_0 + \ell$ (par la propriété d'unicité locale) pour un certain $\ell > 0$. En particulier, l'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide. L'ensemble A est de plus majoré par t. On peut donc poser $\tau = \sup A$ et observer que

$$t_0 < t_0 + \ell \leq \tau \leq t. \tag{3.22}$$

Montrons maintenant que $\tau \in A$. Pour cela, observons que, pour tout $\varepsilon \in]0, \ell[$, $\tau - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, et donc il existe $s_\varepsilon \in]\tau - \varepsilon, \tau]$ tel que $s_\varepsilon \in A$. Faisant tendre ε vers 0, il vient que s_ε tend vers τ. De plus, le fait que y_1 et y_2 coïncident sur $[t_0, s_\varepsilon]$ pour tout ε implique que y_1 et y_2 coïncident sur $[t_0, \tau[$. Les fonctions y_1 et y_2 étant continues sur $[t_0, t]$, elles sont continues en τ (car $\tau \in [t_0, t]$ par (3.22)). Le fait que pour tout $\varepsilon \in]0, \ell[$, $y_1(s_\varepsilon) = y_2(s_\varepsilon)$ assure par passage à la limite que $y_1(\tau) = y_2(\tau)$. Ainsi, y_1 et y_2 coïncident sur $[t_0, \tau]$ et donc $\tau \in A$.
Montrons maintenant que $\tau = t$. Utilisant (3.22) et raisonnant par l'absurde, supposons que $\tau < t$. On peut alors considérer la donnée de Cauchy $(\tau, y_1(\tau)) = (\tau, y_2(\tau))$ pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. L'unicité locale du théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21 assure que y_1 et y_2 coïncident sur un certain $[\tau, \tau + \delta]$ pour un certain $\delta > 0$, que l'on peut choisir suffisamment petit pour que $\tau + \delta < t$. Puisqu'elles coïncent sur $[t_0, \tau]$, elles coïncident sur $[t_0, \tau + \delta]$, et ceci contredit la définiton de τ comme la borne supérieure de la partie A définie en (3.21). Ceci démontre (par l'absurde) que $\tau = t$. On en déduit que y_1 et y_2 coïncident sur $[t_0, t]$ tout entier.

4. Attention, le théorème n'affirme pas que la solution maximale du problème de Cauchy admet des bouts, mais que, si elle en a, ceux-ci sont dans $\partial(J \times \Omega)$.

Par un raisonnement similaire laissé en exercice, on montre que pour tout $t \in]\beta, t_0]$, si y_1 et y_2 sont deux solutions de (3.8) sur des intervalles respectifs I_1 et I_2 contenant (t_0 et) t, alors elles coïncident sur $[t, t_0]$.
Ceci permet de définir l'application

$$Y : \begin{pmatrix}]\alpha,\beta[& \longrightarrow & \Omega \\ t & \longmapsto & y(t) \end{pmatrix},$$

où pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $y(t)$ est la valeur à l'instant t de **n'importe quelle** solution y de (3.8) sur un intervalle contenant $[t_0, t]$ si $t \geq t_0$, ou contenant $[t, t_0]$ si $t < t_0$. D'une part, une telle solution y existe par définition de α et β en (3.20), et d'autre part, la valeur de y à l'instant t ne dépend pas de la solution y considérée par le raisonnement précédent. Il est de plus facile de vérifier que Y est bien une solution du problème de Cauchy (3.8) sur $]\alpha, \beta[$. Justifions maintenant que cette solution est maximale. Pour cela, supposons qu'il existe une sur-solution stricte $\tilde{Y}$ de Y. En particulier, cette solution est définie en β ou en α. Supposons qu'elle l'est en β (le cas α se traite de la même manière). Alors $\beta \in J$ et l'on peut appliquer de nouveau le théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21 avec la donnée initiale $(\beta, \tilde{Y}(\beta))$ pour prolonger (si besoin) $\tilde{Y}$ sur un certain $[\beta, \beta + \tilde{\ell}]$ pour un certain $\tilde{\ell} > 0$. Ceci contredit alors la définition de β en (3.20). On en déduit que Y est bien une solution maximale du problème de Cauchy (3.8).
Partie 2 : unicité de la solution maximale On conserve la solution maximale Y du problème de Cauchy (3.8) définie à la partie 1 de la preuve. Considérons une autre solution maximale $\tilde{Y}$ du problème de Cauchy (3.8) sur un intervalle $\tilde{I} \subset J$ d'extrémité gauche $\tilde{\alpha} < t_0$ et d'extrémité droite $\tilde{\beta} > t_0$ [5]. Utilisant la définition de α et β en (3.20), il vient que

$$\alpha \leq \tilde{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\beta} \leq \beta. \tag{3.23}$$

De plus, par définition de Y, les fonctions Y et $\tilde{Y}$ coïncident sur $]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$. Si $\alpha < \tilde{\alpha}$, alors on peut, à l'aide de Y, construire une sursolution stricte de $\tilde{Y}$ et ceci est impossible car $\tilde{Y}$ est maximale. Donc $\alpha = \tilde{\alpha}$. On obtient de la même manière que $\beta = \tilde{\beta}$. On en déduit que $]\alpha, \beta[\subset \tilde{I}$. Par maximalité de Y cette fois, il n'est pas possible que $]\alpha, \beta[$ soit **strictement** inclus dans $\tilde{I}$. On en déduit que $\tilde{I} =]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$. Ainsi, on a $]\alpha, \beta[= \tilde{I}$ et $Y = \tilde{Y}$. Ceci démontre l'unicité de la solution maximale de (3.8).
Partie 3 : le théorème des bouts Notons toujours Y la solution maximale du problème de Cauchy (3.8), sur l'intervalle $]\alpha, \beta[\subset J$. Soit $(\beta, Y^\star)$ un bout droit de Y (la preuve est similaire pour un bout gauche, et laissée en exercice). Il est clair que $(\beta, Y^\star) \in \overline{J \times \Omega}$ car c'est un bout droit. Supposons par l'absurde que $(\beta, Y^\star) \in J \times \Omega$. Par la propriété 3.2.12, il existe $\ell_0 > 0$ et $r_0 > 0$ tels que $S = S(\beta, Y^\star, \ell_0, r_0)$ est de sécurité pour le problème de Cauchy formé par l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ et la donnée de Cauchy $(\beta, Y^\star)$. Puisque $(\beta, Y^\star)$ est un bout droit de Y, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]\alpha, \beta[^{\mathbb{N}}$ telle que

$$(t_n, Y(t_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\beta, Y^\star).$$

En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(t_{n_0}, Y(t_{n_0})) \in S(\beta, Y^\star, \ell_0/4, r_0/4)$. Observons que le cylindre $S' = S(t_{n_0}, Y(t_{n_0}), \ell_0/2, r_0/2)$ est inclus dans S, de sorte que $\|f\|_{\infty,S'} \leq \|f\|_{\infty,S}$. Puisque S est de sécurité, on a $\ell_0 \|f\|_{\infty,S} \leq r_0$. Ceci implique que

$$\frac{\ell_0}{2}\|f\|_{\infty,S'} \leq \frac{\ell_0}{2}\|f\|_{\infty,S} \leq \frac{r_0}{2},$$

et ainsi, S' est de sécurité pour le problème de Cauchy avec la donnée initiale $(t_{n_0}, Y(t_{n_0}))$. En

5. dont on ne sait pas *a priori* si elles appartiennent ou non à l'intervalle $\tilde{I}$

particulier, par le théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21, il existe une solution à ce problème de Cauchy sur $[t_{n_0}, t_{n_0} + \ell_0/2]$. Cette solution permet de prolonger Y en une solution sur $]\alpha, \beta[\cup[t_{n_0}, t_{n_0} + \ell_0/2]$. Or $0 < \beta - t_{n_0} \leq \ell_0/4$, et donc $t_{n_0} + \ell_0/2 \geq \beta + \ell_0/2 - \ell_0/4 = \beta + \ell_0/4 > \beta$. Ceci contredit la maximalité de Y. On en déduit que le bout $(\beta, Y^\star) \notin J \times \Omega$. Ceci assure que $(\beta, Y^\star) \in \overline{J \times \Omega} \setminus J \times \Omega$. Rappelons que $J \times \Omega$ est ouvert comme produit d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ par un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Ainsi, $\partial(J \times \Omega) = \overline{J \times \Omega} \setminus J \times \Omega$, et finalement $(\beta, Y^\star) \in \partial(J \times \Omega)$. On montre de même (et en exercice) que tout bout gauche d'une solution maximale est dans $\partial(J \times \Omega)$. Ceci achève la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz global ■

Remarque 3.3.13 *Les hypothèses sur l'intervalle de temps I, l'espace des phases Ω, le champ de vecteurs f et la donnée de Cauchy (t_0, y_0) sont exactement les mêmes dans le théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21 et dans le théorème de Cauchy-Lipschitz global 3.3.12.*

Remarque 3.3.14 *On peut supposer que J est un intervalle de $\mathbb{R}$ (sans qu'il soit nécessairement ouvert) et conserver les autres hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz global 3.3.12 pour avoir la conclusion suivante : pour tout $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, le problème de Cauchy* (3.8) *admet une unique solution maximale sur J. Celle-ci est définie sur un intervalle I (contenant t_0) ouvert de J (c'est-à-dire que I est la trace sur J d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$). De plus, ses bouts, droits et gauches (si elle en a), sont dans $\partial(J \times \Omega)$. Ceci permet de traiter des problèmes de Cauchy comme celui-associé au champ de vecteurs*

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, y) & \longmapsto & \frac{\sqrt{t}}{1+y^2} \end{pmatrix},$$

et à la donnée initiale $y(0) = 1$ (i.e. $J = [0, +\infty[$, $\Omega = \mathbb{R}$ et $(t_0, y_0) = (0, 1)$). On ne présentera toutefois pas cette généralisation dans le cours.

3.3.6 Solutions globales et lemme de sortie de tout compact

Dans cette section, à nouveau, J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et f est une application de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$. On note $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ une donnée de Cauchy.

Définition 3.3.15 *Une solution y du problème de Cauchy* (3.8) *est dite* **globale** *lorsqu'elle est définie (et solution) sur J tout entier.*

Remarque 3.3.16 *Une solution globale du problème de Cauchy* (3.8) *est necessairement maximale. En revanche, une solution maximale n'est pas nécessairement globale (voir par exemple l'exercice 3.3.1).*

L'objet du lemme suivant est de décrire le comportement asymptotique en temps d'une solution maximale d'un problème de Cauchy (3.8) qui n'est pas globale, sous les hypothèses des théorèmes de Cauchy-Lipschitz.

Lemme 3.3.17 (de sortie de tout compact) *Plaçons-nous sous les hypothèses (et utilisons les notations) du théorème de Cauchy-Lipschitz local 3.2.21 (ou sous celles du théorème de Cauchy-Lipschitz global 3.3.12, qui sont identiques). Notons $J =]a, b[$ l'intervalle de temps ouvert intervenant dans la définition du champ de vecteurs f, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Désignons par y la* *solution maximale du problème de Cauchy* (3.8) *associée à la donnée de Cauchy* $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$. *Notons* $]\alpha, \beta[\subset]a, b[$ *l'intervalle ouvert (contenant* t_0*) sur lequel cette solution maximale est définie.*

D'une part, si $\beta < b$*, alors la solution maximale sort de tout compact en temps fini. C'est-à-dire que, pour tout compact* $K \subset \Omega$*, il existe* $\varepsilon \in]0, \beta - \alpha[$ *tel que*

$$\forall t \in]\beta - \varepsilon, \beta[, \qquad y(t) \notin K.$$

D'autre part, si $a < \alpha$*, alors pour tout compact* $K \subset \Omega$*, il existe* $\varepsilon \in]0, \beta - \alpha[$ *tel que*

$$\forall t \in]\alpha, \alpha + \varepsilon[, \qquad y(t) \notin K.$$

Preuve. Plaçons-nous dans le cas où $\beta < b$ (le cas $a < \alpha$ se traite de manière similaire et est laissé en exercice). Supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \beta - \alpha[$, il existe $t \in]\beta - \varepsilon, \beta[$ tel que $y(t) \in K$. On peut ainsi construire une suite $(t_n)_{n \geq 0} \in]\alpha, \beta[^{\mathbb{N}}$ strictement croissante et tendant vers β telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y(t_n) \in K$. Puisque $(y(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points du compact K, elle admet une sous-suite convergente dans K par la propriété de Bolzano-Weierstrass (théorème 1.1.31). En particulier, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $y^\star \in K$ tels que

$$y(t_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y^\star.$$

Ainsi,

$$\left(t_{\varphi(n)}, y(t_{\varphi(n)})\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (\beta, y^\star),$$

et $(\beta, y^\star)$ est un bout droit de la solution maximale y. Or, $\beta \in]a, b[$ car $\beta < b$ et $y^\star \in K \subset \Omega$. Donc $(\beta, y^\star) \in J \times \Omega$ (qui est ouvert), donc $(\beta, y^\star)$ n'est pas dans $\partial(J \times \Omega)$. Ceci contredit la conclusion du théorème de Cauchy-Lipschitz global 3.3.12. ■

3.4 Notion de flot et dépendance en la donnée initiale

3.4.1 Notion de flot d'une équation différentielle

Dans cette section, à nouveau, J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et f est une application de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$. On note $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ une donnée de Cauchy. Plaçons-nous dans les hypothèses des théorèmes de Cauchy-Lipschitz 3.2.21 et 3.3.12. Sous ces hypothèses, on peut définir la solution maximale y du problème de Cauchy 3.8 sur un intervalle ouvert $]a, b[$, où $]a, b[$ dépend de (t_0, y_0). Pour $t \in]a, b[$, on peut donc poser

$$\Phi(t, t_0, y_0) = y(t), \tag{3.24}$$

et définir ainsi une fonction (mais pas une application, au sens où $\Phi(\cdot, t_0, y_0)$ n'est pas défini sur tout J a priori, mais sur un intervalle ouvert contenant t_0) de $J \times J \times \Omega$ dans Ω. Remarquons que le domaine de définition de cette application n'est pas un produit cartésien, en général.

Définition 3.4.1 *On appelle* **flot de l'équation différentielle** (3.17) *la fonction* Φ *ci-dessus.*

Remarque 3.4.2 *Pour tout* $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, $\Phi(t_0, t_0, y_0) = y_0$. *On en déduit que* $\Phi(t_0, t_0, \cdot) = \mathrm{Id}_\Omega$.

Propriété 3.4.3 *Plaçons-nous sous les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz 3.2.21. Soit* $]a,b[$ *l'intervalle de définition de la solution maximale* y *de* (3.17) *issue de* (t_0,y_0)*. Quel que soit* $t\in]a,b[$*, la solution maximale de* (3.17) *issue de* $(t,y(t))$ *est la même fonction* y *et de plus, pour tout* $h\in\mathbb{R}$ *tel que* $t+h\in]a,b[$*, on a*

$$\Phi(t+h,t_0,y_0)=\Phi(t+h,t,\Phi(t,t_0,y_0)).$$

Preuve. Exercice. ■

Propriété 3.4.4 *Plaçons-nous sous les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz 3.2.21. Quels que soient* $t,t_0\in J$*, la fonction* $y\mapsto\Phi(t,t_0,y)$ *est une injection de* Ω *dans lui-même.*

Preuve. Exercice, avec le théorème de Cauchy–Lipschitz global 3.3.12. ■

3.4.2 Dépendance du flot en la donnée initiale

Nous ferons un usage répété du lemme suivant, dans cette section comme dans la section sur les équations différentielles linéaires 3.6.

Lemme 3.4.5 (de Gronwall) *Soit* $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *un segment (avec* $a<b$*), soit* u *une fonction continue sur* $[a,b]$ *à valeurs réelles, et* α *et* β *deux nombres réels positifs. Supposons que*

$$\forall t\in[a,b],\qquad u(t)\le\alpha+\beta\int_a^t u(s)\mathrm{d}s. \tag{3.25}$$

Dans ce cas,

$$\forall t\in[a,b],\qquad u(t)\le\alpha\mathrm{e}^{\beta(t-a)}. \tag{3.26}$$

Remarque 3.4.6 *L'intérêt du lemme de Gronwall est de passer d'une estimation de* u *par une intégrale de* u *en* (3.25) *à une estimation de* u *qui ne fait plus intervenir* u *en* (3.26)*.*

Preuve. Si $\beta=0$, alors le résultat est évident. Sinon, $\beta>0$ et l'on peut considérer la fonction

$$f:\begin{pmatrix}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \left(\frac{\alpha}{\beta}+\int_a^t u(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\beta(t-a)}\end{pmatrix}.$$

Puisque u est continue sur $[a,b]$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. De plus, pour tout $t\in[a,b]$, on a

$$f'(t)=\left(u(t)-\alpha-\beta\int_a^t u(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\beta(t-a)}.$$

L'hypothèse (3.25) et le fait que la fonction exponentielle est positive assurent que f' est une fonction négative sur $[a,b]$. Par suite, la fonction f est décroissante sur le segment $[a,b]$. Ceci implique que

$$\forall t\in[a,b],\qquad f(t)\le f(a).$$

On en déduit que

$$\forall t\in[a,b],\qquad \frac{\alpha}{\beta}+\int_a^t u(s)\mathrm{d}s\le\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{e}^{\beta(t-a)}.$$

Multipliant cette inégalité par le réel strictement positif β et utilisant à nouveau (3.25), on obtient (3.26). ■

Corollaire 3.4.7 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant un certain t_0, soit u une fonction continue sur I et α et β deux nombres réels positifs. Supposons que*

$$\forall t \in I, \qquad u(t) \leq \alpha + \beta \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} u(s)\mathrm{d}s. \tag{3.27}$$

Dans ce cas,

$$\forall t \in I, \qquad u(t) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta|t-t_0|}. \tag{3.28}$$

Preuve. Comme pour le lemme de Gronwall 3.4.5, le résultat est évident si $\beta = 0$. On suppose donc $\beta > 0$. Fixons $a, b \in I$ avec $a \leq t_0 \leq b$. Appliquant le lemme de Gronwall à la restriction de u au segment $[t_0, b]$ lorsque $t_0 < b$ (sinon (3.29) est trivial, lorsque $t_0 = b$), on obtient

$$\forall t \in [t_0, b], \qquad u(t) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(t-t_0)} = \alpha \mathrm{e}^{\beta|t-t_0|}. \tag{3.29}$$

Pour traiter l'autre côté de t_0, lorsque $a < t_0$ (sinon, lorsque $a = t_0$, (3.30) est trivial) on définit la fonction

$$g : \begin{pmatrix} [a, t_0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left(\frac{\alpha}{\beta} + \int_t^{t_0} u(s)\mathrm{d}s\right) \mathrm{e}^{\beta(t-t_0)} \end{pmatrix}.$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, t_0]$ et l'on a

$$\forall t \in [a, t_0], \qquad g'(t) = \left(\alpha + \beta \int_t^{t_0} u(s)\mathrm{d}s - u(t)\right) \mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}.$$

Utilisant l'hypothèse (3.27), on a $g'(t) \geq 0$ pour $t \in [a, t_0]$. Ainsi, la fonction g est croissante sur le segment $[a, t_0]$. Ceci implique que

$$\forall t \in [a, t_0], \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta} + \int_t^{t_0} u(s)\mathrm{d}s\right) \mathrm{e}^{\beta(t-t_0)} = g(t) \leq g(t_0) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

On en déduit que

$$\forall t \in [a, t_0], \qquad \alpha + \beta \int_t^{t_0} u(s)\mathrm{d}s \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(t_0-t)}.$$

Utilisant de nouveau l'hypothèse (3.27), il vient

$$\forall t \in [a, t_0], \qquad u(t) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta(t_0-t)} = \alpha \mathrm{e}^{\beta|t-t_0|}. \tag{3.30}$$

Finalement, les inégalités (3.29) et (3.30) impliquent que

$$\forall t \in [a, b], \qquad u(t) \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta|t-t_0|}.$$

Ceci valant quel que soit le segment $[a, b] \subset I$ contenant t_0, on en déduit (3.28). ■

La propriété suivante énonce un caractère localement lipschitzien du flot à $t_0 \in J$ fixé par rapport à la donnée initiale : pour tout $y_0 \in \Omega$, on peut choisir t_1 et t_2 avec $t_1 < t_0 < t_2$ dans l'intervalle de définition de la solution maximale issue de (t_0, y_0), arbitrairement éloignés de t_0, de sorte qu'il existe un voisinage de y_0 dans Ω sur lequel le flot est d'une part défini pour tout $t \in [t_1, t_2]$ et d'autre part il est lipshiztien par rapport à la donnée initiale.

Propriété 3.4.8 (le flot est lipschitzien en la donnée initiale) *Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que la fonction f est continue et localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ une donnée de Cauchy. Notons y la solution maximale de* (3.17) *issue de cette donnée de Cauchy, et I l'intervalle (ouvert contenant*

t_0) sur lequel elle est définie (et solution). Quels que soient $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_0 < t_2$, il existe $\delta > 0$ tel que le voisinage tubulaire

$$K_\delta := \Big\{(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mid d(t,[t_1,t_2]) \leq \delta \text{ et } \|u - y(t)\| \leq \delta\Big\}, \tag{3.31}$$

du graphe de la restriction de y au segment $[t_1, t_2]$ est inclus dans $J \times \Omega$, et il existe $r \in]0, \delta[$ et $\kappa > 0$ tels que pour tout $y_1, y_2 \in B(y_0, r]$, la solution maximale de (3.17) issue de (t_0, y_1) et celle issue de (t_0, y_2) sont définies (et solution) sur $[t_1, t_2]$, ont les graphes de leurs restrictions à $[t_1, t_2]$ tracés dans K_δ et vérifient

$$\forall t \in [t_1, t_2], \qquad \|\Phi(t, t_0, y_2) - \Phi(t, t_0, y_1)\| \leq \kappa \|y_2 - y_1\|. \tag{3.32}$$

Preuve. Soit $(t_1, t_2) \in I$ avec $t_1 < t_0 < t_2$. Le graphe de la restriction de y au segment $[t_1, t_2]$ est l'image du segment $[t_1, t_2]$ par la fonction $t \mapsto (t, y(t))$. Cette fonction est continue sur $[t_1, t_2]$, donc son image est compacte, incluse dans l'ouvert $J \times \Omega$. En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que K_δ tel que défini en (3.31) est inclus dans $J \times \Omega$. Observons que K_δ est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. C'est en particulier une partie compacte de $J \times \Omega$. Puisque f est localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$, on peut adapter la preuve de la propriété 3.2.16 pour montrer que f est lipschitzienne en espace sur K_δ, c'est-à-dire qu'il existe $L > 0$ tel que

$$\forall ((t,u),(t,v)) \in K_\delta^2, \qquad \|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|.$$

Posons maintenant $r = \delta \mathrm{e}^{-L(t_2 - t_1)}$, et observons que $r \in]0, \delta[$. Soit $y_1 \in B(y_0, r]$. Notons u_1 la solution maximale de (3.17) issue de (t_0, y_1), et notons $]\tilde{t}_1, \tilde{t}_2[$ son intervalle de définition. Par le théorème de Cauchy–Lipschitz local, on a $\tilde{t}_1 < t_0 < \tilde{t}_2$. On souhaite montrer que $\tilde{t}_1 < t_1$ et $t_2 < \tilde{t}_2$. Montrons tout d'abord que le graphe de la restriction de u_1 à $[t_0, \min(t_2, \tilde{t}_2)[$ est inclus dans K_δ (on montre de même[6] que le graphe de la restriction de u_1 à $]\max(t_1, \tilde{t}_1), t_0]$ est inclus dans K_δ). Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $t \in [t_0, \min(t_2, \tilde{t}_2)[$ tel que $\|u_1(t) - y(t)\| > \delta$, et notons $t^\star = \inf\{t \in [t_0, \min(t_2, \tilde{t}_2)[, \mid \|u_1(t) - y(t)\| > \delta\}$. Puisque $\|u_1(t_0) - y(t_0)\| \leq r < \delta$, on a $t^\star > t_0$ par continuité. Et par ailleurs, pour $t \in [t_0, t^\star]$, $\|u_1(t) - y(t)\| \leq \delta$. En particulier, pour tout $t \in [t_0, t^\star]$, on a $(t, u_1(t)) \in K_\delta$. Par suite, pour un tel t,

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - y(t)\| &= \left\| y_1 + \int_{t_0}^t f(s, u_1(s))\mathrm{d}s - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y(s))\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \|y_1 - y_0\| + \int_{t_0}^t \|f(\underbrace{s, u_1(s)}_{\in K_\delta}) - f(\underbrace{s, y(s)}_{\in K_\delta})\|\mathrm{d}s \\
&\leq \|y_1 - y_0\| + L \int_{t_0}^t \|u_1(s) - y(s)\|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Appliquant le lemme de Gronwall 3.4.5 à la fonction $s \mapsto \|u_1(s) - y(s)\|$, qui est continue sur le segment $[t_0, t^\star]$, il vient que

$$\forall t \in [t_0, t^\star], \qquad \|u_1(t) - y(t)\| \leq \mathrm{e}^{L(t - t_0)}\|y_1 - y_0\|. \tag{3.33}$$

En particulier,

$$\|u_1(t^\star) - y(t^\star)\| \leq \mathrm{e}^{L(t_2 - t_0)} r \leq \mathrm{e}^{L(t_2 - t_0)} \delta \mathrm{e}^{-L(t_2 - t_1)} = \mathrm{e}^{-L(t_0 - t_1)} \delta < \delta.$$

Par continuité de la fonction $s \mapsto \|u_1(s) - y(s)\|$ en $t^\star \in [t_0, \min(t_2, \tilde{t}_2)[$, on a nécessairement $\|u_1(s) - y(s)\| < \delta$ sur un voisinage à doite de $t^\star$. On contredit ainsi la définition de $t^\star$. On en

6. et en exercice.

déduit que

$$\forall t \in [t_0, \min(t_2, \tilde{t}_2)[, \qquad \|u_1(t) - y(t)\| \leq \delta.$$

Montrons maintenant que $t_2 < \tilde{t}_2$ (on montre de la même manière que $\tilde{t}_1 < t_2$). Raisonnons par l'absurde et supposons que $\tilde{t}_2 \leq t_2$. Dans ce cas, le graphe de la solution maximale $t \mapsto u_1(t)$, restreint à $[t_0, \tilde{t}_2[$ reste dans le compact K_δ. On en déduit que la solution maximale admet un bout droit dans K_δ. De plus, ce bout doit étant dans K_δ, il n'est pas dans le bord de $J \times \Omega$. On contredit ainsi le théorème de Cauchy–Lipschitz global. On en déduit que $t_2 < \tilde{t}_2$. Après avoir montré, de la même manière, que $\tilde{t}_1 < t_1$, on a trouvé $\delta > 0$ tel que $K_\delta \subset J \times \Omega$ et $r \in]0, \delta[$ tel pour tout $y_1 \in B(y_0, r]$, la solution maximale issue de (t_0, y_1) est définie sur $[t_1, t_2]$ et le graphe de sa restriction à $[t_1, t_2]$ est tracé dans K_δ.
Posant $\kappa = \mathrm{e}^{L(t_2 - t_1)}$, on a $\kappa > 0$. Pour tout $y_2 \in B(y_0, r]$, le raisonnement précédent assure que la solution maximale u_2 de (3.17) associée à la donnée de Cauchy (t_0, y_2) est définie sur $[t_1, t_2]$. Par ailleurs, on a montré ci-dessus que pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $(t, u_1(t)) \in K_\delta$ et $(t, u_2(t)) \in K_\delta$, donc, comme ci-dessus pour (3.33), pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_2(t) - u_1(t)\| &= \left\| y_2 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_2(s))\mathrm{d}s - y_1 - \int_{t_0}^{t} f(s, u_1(s))\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \|y_2 - y_1\| + \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|f(\underbrace{s, u_2(s)}_{\in K_\delta}) - f(\underbrace{s, u_1(s)}_{\in K_\delta})\|\mathrm{d}s \\
&\leq \|y_2 - y_1\| + L \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} \|u_2(s) - u_1(s)\|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, le corollaire 3.4.7 du lemme de Gronwall 3.4.5 assure que

$$\forall t \in [t_1, t_2], \qquad \|u_2(t) - u_1(t)\| \leq \|y_2 - y_1\|\mathrm{e}^{L|t_0 - t|} \leq \kappa\|y_2 - y_1\|,$$

ce qui correspond à (3.32). Ceci achève la preuve de la propriété. ■

Remarque 3.4.9 *Plaçons-nous sous les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz. Soit $t_0 \in J$. Pour tout $y_0 \in \Omega$, notons $I_{\max}(y_0)$ l'intervalle ouvert inclus dans J et contenant t_0 sur lequel est défini la solution maximale de* (3.8) *issue de* (t_0, y_0). *Le domaine de définition de la fonction* $(t, y_0) \mapsto \Phi(t, t_0, y_0)$ *est*

$$\mathcal{D}_{t_0} = \bigcup_{y_0 \in \Omega} \left(I_{\max}(y_0) \times \{y_0\} \right).$$

Corollaire 3.4.10 (À t_0 fixé, le flot est défini sur un ouvert) *Sous les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz 3.2.21 et 3.3.12, pour tout $t_0 \in J$, si $\Phi(t, t_0, y_0)$ est défini pour un certain $t \in J$ et un certain $y_0 \in \Omega$, alors il existe $r > 0$ et $\ell > 0$ tels que $\Phi(s, t_0, z_0)$ est défini pour tout $s \in [t - \ell, t + \ell]$ et tout $z_0 \in B(y_0, r]$.*

Remarque 3.4.11 *En particulier, sous les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz 3.2.21 et 3.3.12, quel que soit $t_0 \in J$, si $(t, y_0) \in \mathcal{D}_{t_0}$, alors il existe $r, \ell > 0$ tels que le voisinage*[7] *$[t - \ell, t + \ell] \times B(y_0, r]$ de (t, y_0) est inclus dans $\mathcal{D}_{t_0}$. Ce dernier ensemble est donc ouvert.*

Preuve. Soient $t, t_0 \in J$ et $y_0 \in \Omega$ de sorte que $\Phi(t, t_0, y_0)$ est défini. Alors la solution maximale de (3.17) pour la donnée de Cauchy (t_0, y_0) est définie sur un intervalle ouvert I contenant t (et

7. Voir la définition 1.1.22 si besoin.

t_0). Puisque I est ouvert, on peut choisir t_1, t_2 dans I de sorte que

$$t_1 < \min(t_0, t) \qquad \text{et} \qquad \max(t_0, t) < t_2.$$

Par la propriété précédente, il existe $r > 0$ tel que toute solution maximale issue de (t_0, z_0) pour tout $z_0 \in B(y_0, r]$ est définie sur $[t_1, t_2]$. En particulier, pour tout $s \in [t_1, t_2]$ et tout $z_0 \in B(y_0, r]$, $\Phi(s, t_0, z_0)$ est bien défini (on peut prendre $\ell = \min(t - t_1, t_2 - t) > 0$ si besoin). ■

La propriété suivante assure que, sous les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz, à t_0 fixé, le flot $(t, y) \mapsto \Phi(t, t_0, y)$ est localement lipschitzien sur son ouvert de définition $\mathcal{D}_{t_0}$.

Propriété 3.4.12 (Le flot est localement lipschitzien en espace et en temps) *Plaçons-nous sous les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz 3.2.21 et 3.3.12. Soit $t_0 \in J$. Quels que soient $t \in J$ et $y_0 \in \Omega$ tels que $\Phi(t, t_0, y_0)$ est défini (c'est-à-dire tels que $t \in I_{\max}(y_0)$ ou encore que $(t, y_0) \in \mathcal{D}_{t_0}$) . Quels que soient $t_1, t_2 \in I_{\max}(y_0)$ tels que $t_1 < t_0 < t_2$ et $t_1 < t < t_2$, il existe $r, L > 0$ tels que*

$$\forall s_1, s_2 \in [t_1, t_2], \quad \forall y_1, y_2 \in B(y_0, r], \qquad \|\Phi(s_2, t_0, y_2) - \Phi(s_1, t_0, y_1)\| \leq L\left(|s_2 - s_1| + \|y_2 - y_1\|\right).$$

Remarque 3.4.13 *En particulier, l'application $(t, y) \mapsto \Phi(t, t_0, y)$ est lipschitzienne sur $[t_1, t_2] \times B(y_0, r]$ qui est un voisinage de (t, y_0) inclus dans l'ouvert $\mathcal{D}_{t_0}$.*

Remarque 3.4.14 *En particulier, l'application $(t, y) \mapsto \Phi(t, t_0, y)$ est continue sur l'ouvert $\mathcal{D}_{t_0}$.*

Preuve. Soit $t_0, t \in J$ et $y_0 \in \Omega$ tels que $\Phi(t, t_0, y_0)$ est défini. Soit t_1 et t_2 dans $I_{\max}(y_0)$ tels que $t_1 < t_0 < t_2$ et $t_1 < t < t_2$. Utilisant la propriété 3.4.8, il existe $\delta > 0$, $r \in]0, \delta[$ et $\kappa > 0$ tels que, quels que soient $y_1, y_2 \in B(y_0, r]$, la solution maximale u_1 (respectivement u_2) de (3.17) issue de la donnée de Cauchy (t_0, y_1) (resp. (t_0, y_2)) est définie sur un intervalle contenant $[t_1, t_2]$ et l'on a

$$\forall s \in [t_1, t_2], \qquad \|u_2(s) - u_1(s)\| \leq \kappa \|y_2 - y_1\|.$$

De plus, les graphes de ces solutions maximales, restreints à $[t_1, t_2]$, restent dans un même compact $K_\delta \subset J \times \Omega$ (voir (3.31)). Notant $M \geq 0$ un majorant de la norme de f sur le compact K_δ, il vient que

$$\forall s \in [t_1, t_2], \qquad \|f(s, u_2(s))\| \leq M.$$

Par suite, pour s_1, s_2 dans le segment $[t_1, t_2]$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_2(s_2) - u_1(s_1)\| &= \|u_2(s_2) - u_2(s_1) + u_2(s_1) - u_1(s_1)\| \\
&\leq \|u_2(s_2) - u_2(s_1)\| + \|u_2(s_1) - u_1(s_1)\| \\
&\leq \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(s, u_2(s)) \mathrm{d}s \right\| + \kappa \|y_2 - y_1\| \\
&\leq \int_{\min(s_1, s_2)}^{\max(s_1, s_2)} \|f(s, u_2(s))\| \mathrm{d}s + \kappa \|y_2 - y_1\| \\
&\leq M|s_2 - s_1| + \kappa \|y_2 - y_1\|.
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé pour $L = \max(M, \kappa)$. ■

On énonce maintenant une condition suffisante pour que le flot soit différentiable par rapport à la donnée initiale, et on caractérise sa différentielle comme la solution d'un problème de Cauchy.

Théorème 3.4.15 (de différentiabilité du flot) *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et f une fonction continue de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que, pour tout $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, la fonction $y \mapsto f(t_0, y)$ est différentiable en y_0 et que l'application $(t, y) \mapsto \mathrm{d}_y f(t, y)$ est continue sur $J \times \Omega$* [8] *à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$* [9]. *Alors,*

— *quels que soient $t_0, t \in J$ et $y_0 \in \Omega$ tels que $\Phi(t, t_0, y_0)$ est défini, la fonction $y \mapsto \Phi(t, t_0, y)$ est différentiable en y_0 ;*

— *Pour tout $t_0 \in J$ et $y_0 \in \Omega$, cette différentielle $\mathrm{d}_{y_0}\Phi(t, t_0, y_0)$ est, elle-même, comme fonction de t sur l'intervalle ouvert I contenant t_0 sur lequel est définie la solution maximale y de* (3.17) *issue de (t_0, y_0), dérivable et solution du problème de Cauchy linéaire, dont l'inconnue est à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\begin{cases} Z'(t) &= \mathrm{d}_y f(t, y(t)) Z(t) \\ Z(t_0) &= \mathrm{Id} \end{cases}. \tag{3.34}$$

— *Fixons $t_0 \in J$. La fonction $(t, y_0) \mapsto \Phi(t, t_0, y_0)$ admet une dérivée partielle première par rapport à t et une différentielle par rapport à y_0 en tout point de son ouvert de définition $\mathcal{D}_{t_0}$ et ces deux applications, comme fonctions de (t, y_0), sont continues sur $\mathcal{D}_{t_0}$. En particulier, l'application $(t, y_0) \mapsto \Phi(t, t_0, y_0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{D}_{t_0}$, à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.*

Preuve. Soit $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$. Notons y la solution maximale du problème de Cauchy associé et I son intervalle (ouvert, contenant t_0) de définition. L'hypothèse sur f assure, par composition, que l'application $t \mapsto \mathrm{d}_y f(t, y(t))$ est continue sur I à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Par le théorème de Cauchy linéaire 3.6.1, le problème de Cauchy (3.34) admet une unique solution sur I, que nous notons Z. Soit $t \in I$. On sait par la propriété 3.4.8 qu'il existe $r > 0$ tel que $\Phi(t, t_0, z_0)$ est défini pour tout $z_0 \in B(y_0, r]$. Pour montrer les deux premiers points, il nous suffit donc de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boule ouverte centrée en y_0 (de rayon $\leq r$) telle que pour toute donnée initiale z_0 dans cette boule, on a

$$\|\Phi(t, t_0, z_0) - \Phi(t, t_0, y_0) - Z(t)(z_0 - y_0)\| \leq C\varepsilon \times \|z_0 - y_0\|.$$

Observons que cette inégalité est triviale [10] si $t = t_0$.

<u>Étape 1 : quelques estimations *a priori*.</u> Puisque I est un intervalle ouvert contenant t_0 et t, on peut fixer $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 < \min(t_0, t)$ et $\max(t_0, t) < t_2$. Par la propriété 3.4.8, il existe $\delta > 0$, $k \in]0, \delta[$ et $\kappa > 0$ tels que K_δ tel que défini en (3.31) est inclus dans $J \times \Omega$, et pour tout $z_0 \in B(y_0, r]$, la solution maximale z issue de (t_0, y_0) est définie sur $[t_1, t_2]$ et vérifie

$$\forall s \in [t_1, t_2], \qquad \|z(s) - y(s)\| \leq \kappa \|z_0 - y_0\|. \tag{3.35}$$

De plus, le graphe de la restriction de z au segment $[t_1, t_2]$ est inclus dans K_δ. La fonction

$$h : \begin{pmatrix} [t_1, t_2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ s & \longmapsto & z(s) - y(s) - Z(s)(z_0 - y_0) \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[t_1, t_2]$ et l'on a

$$\forall s \in [t_1, t_2], \qquad h'(s) = f(s, z(s)) - f(s, y(s)) - \mathrm{d}_y f(s, y(s)) Z(s)(z_0 - y_0).$$

8. Par la propriété 3.2.18, la fonction f est en particulier localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$. Puisqu'elle est de plus continue sur $J \times \Omega$, elle vérifie les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz 3.2.21 et 3.3.12.

9. On met sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$.

10. Et conforme au fait que pour tout $y \in \Omega$, $\Phi(t_0, t_0, y) = y$, donc $\Phi(t_0, t_0, \cdot)$ est l'application identité de l'ouvert Ω, donc sa différentielle en tout point est $Z(t_0) = \mathrm{Id}$.

En particulier, pour $s \in [t_1, t_2]$, on a

$$h'(s) - \mathrm{d}_y f(s, y(s))h(s) = \underbrace{f(s, z(s)) - f(s, y(s)) - \mathrm{d}f(s, y(s))(z(s) - y(s))}_{:=b(s)}. \tag{3.37}$$

Pour tout $s \in [t_1, t_2]$, considérons la fonction

$$g_s : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ \sigma & \longmapsto & f(s, y(s) + \sigma(z(s) - y(s))) - f(s, y(s)) - \sigma \mathrm{d}_y f(s, y(s))(z(s) - y(s)) \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse sur f assure que la fonction g_s est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$ et l'on a

$$\begin{aligned} g_s(1) - \underbrace{g_s(0)}_{=0} &= \int_0^1 g_s'(\sigma)\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^1 (\mathrm{d}_y f(s, y(s) + \sigma(z(s) - y(s)))(z(s) - y(s)) - \mathrm{d}_y f(s, y(s))(z(s) - y(s)))\mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|g_s(1)\| &= \left\| \int_0^1 (\mathrm{d}_y f(s, y(s) + \sigma(z(s) - y(s))) - \mathrm{d}_y f(s, y(s)))(z(s) - y(s))\mathrm{d}\sigma \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|(\mathrm{d}_y f(s, y(s) + \sigma(z(s) - y(s))) - \mathrm{d}_y f(s, y(s)))(z(s) - y(s))\| \, \mathrm{d}\sigma \\ &\leq \int_0^1 \|(\mathrm{d}_y f(s, y(s) + \sigma(z(s) - y(s))) - \mathrm{d}_y f(s, y(s)))\| \times \|z(s) - y(s)\| \, \mathrm{d}\sigma \\ &\leq \int_0^1 \|(\mathrm{d}_y f(s, y(s) + \sigma(z(s) - y(s))) - \mathrm{d}_y f(s, y(s)))\| \, \mathrm{d}\sigma \times \|z(s) - y(s)\| \\ &\leq \kappa \left(\sup_{(s,u) \in [t_1, t_2] \times B(0, \kappa \|z_0 - y_0\|]} \|\mathrm{d}_y f(s, y(s) + u) - \mathrm{d}_y f(s, y(s))\| \right) \times \|z_0 - y_0\|, \end{aligned} \tag{3.38}$$

en utilisant à deux reprises (3.35).

Étape 2 : preuve des deux premiers points avec les estimations précédentes. Fixons $\varepsilon > 0$. L'hypothèse sur f assure que la fonction $(s, u) \mapsto \mathrm{d}_y f(s, y(s) + u)$ est continue sur le compact K_δ. En particulier, elle est uniformément continue sur ce compact par théorème de Heine. Ainsi, il existe $\eta \in]0, \delta[$ tel que pour tout $u \in B(0, \eta]$, on a

$$\forall s \in [t_1, t_2], \qquad \|\mathrm{d}_y f(s, y(s) + u) - \mathrm{d}_y f(s, y(s))\| < \frac{\varepsilon}{\kappa}.$$

En particulier, en utilisant (3.38), si $\|z_0 - y_0\| < \eta/\kappa$, alors

$$\forall s \in [t_1, t_2], \qquad \|b(s)\| = \|g_s(1)\| \leq \varepsilon \|z_0 - y_0\|. \tag{3.39}$$

De plus, l'hypothèse sur f assure qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall s \in [t_1, t_2], \qquad \|\mathrm{d}_y f(s, y(s))\| \leq M.$$

Injectant l'estimation (3.39) dans (3.37), et toujours tous l'hypothèse que $\|z_0 - y_0\| < \eta/\kappa$, il vient pour tout $s \in [t_1, t_2]$,

$$\begin{aligned}
\|h(s) - \underbrace{h(t_0)}_{=0}\| &= \left\|\int_{t_0}^{s} (\mathrm{d}_y f(k, y(k))h(k) + b(k))\,\mathrm{d}k\right\| \\
&\leq \int_{\min(t_0,s)}^{\max(t_0,s)} \|\mathrm{d_y} f(k, y(k))h(k)\|\,\mathrm{d}k + \int_{\min(t_0,s)}^{\max(t_0,s)} \|b(k)\|\mathrm{d}k \\
&\leq \int_{\min(t_0,s)}^{\max(t_0,s)} \|\mathrm{d_y} f(k, y(k))\| \times \|h(k)\|\,\mathrm{d}k + \int_{\min(t_0,s)}^{\max(t_0,s)} \varepsilon\|z_0 - y_0\|\mathrm{d}k \\
&\leq M\int_{\min(t_0,s)}^{\max(t_0,s)} \|h(k)\|\,\mathrm{d}k + (t_2 - t_1)\varepsilon\|z_0 - y_0\|.
\end{aligned}$$

Utilisant le corollaire 3.4.7 du lemme de Gronwall pour la fonction $s \mapsto \|h(s)\|$, qui est continue sur le segment $[t_1, t_2]$, il vient que, sous réserve que $\|z_0 - y_0\| < \eta/\kappa$,

$$\forall s \in [t_1, t_2], \qquad \|h(s)\| \leq \varepsilon(t_2 - t_1)\mathrm{e}^{M|s-t_0|}\|z_0 - y_0\|.$$

Utilisant la définition (3.36) de la fonction h, l'inégalité ci-dessus en $s = t$ implique que, pour tout $z_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|z_0 - y_0\| < \eta/\kappa$,

$$\|\Phi(t, t_0, z_0) - \Phi(t, t_0, y_0) - Z(t)(z_0 - y_0)\| \leq \varepsilon(t_2 - t_1)\mathrm{e}^{M|t-t_0|}\|z_0 - y_0\|.$$

Ceci démontre que $\Phi(t, t_0, \cdot)$ est différentiable en y_0, et que sa différentielle en ce point est $Z(t)$.

Étape 3 : preuve du troisième point. Fixons $t_0 \in J$. Puisque les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz sont vérifiées, l'ensemble $\mathcal{D}_{t_0}$ de définition de la fonction $(t, y) \mapsto \Phi(t, t_0, y_0)$ est ouvert par le corollaire 3.4.10. Fixons $(t^\star, y_0)$ dans l'ouvert $\mathcal{D}_{t_0}$. Notons $I_{\max}(y_0)$ l'intervalle ouvert contenant t_0 sur lequel est défini la solution maximale y de (3.17). Celui-ci contient $t^\star$ puisque $(t^\star, y_0) \in \mathcal{D}_{t_0}$. Choisissons comme précédemment $t_1 \in I_{\max}(y_0)$ avec $t_1 < \min(t_0, t^\star)$ et $t_2 \in I_{\max}(y_0)$ avec $\max(t_0, t^\star) < t_2$. Par la propriété 3.4.8, il existe $\delta > 0$ et $r \in]0, \delta[$ tels que pour tout $z_0 \in B(z_0, r]$, la solution maximale z de (3.17) issue de (t_0, z_0) est définie sur $[t_1, t_2]$ et le graphe de sa restriction à $[t_1, t_2]$ est inclus dans K_δ (défini en (3.31)). Par ailleurs, en utilisant l'équation (3.17), la fonction $(t, z_0) \mapsto \Phi(t, t_0, z_0)$ admet une dérivée partielle par rapport à t en tout point du segment $[t_1, t_2]$ et l'on a

$$\forall t \in [t_1, t_2], \quad \forall z_0 \in B(y_0, r], \qquad \partial_t\Phi(t, t_0, z_0) = f(t, \Phi(t, t_0, z_0)). \tag{3.40}$$

Puisque les hypothèses des théorèmes de Cauchy–Lipschitz sont vérifiées, la propriété 3.4.12 assure que l'application $(t, z) \mapsto \Phi(t, t_0, z)$ est lipschitzienne sur $[t_1, t_2] \times B(y_0, \tilde{r}]$ pour un certain $\tilde{r} > 0$. En particulier, elle est continue sur $[t_1, t_0] \times B(y_0, \min(\tilde{r}, r)]$, à valeurs dans Ω. Puisque f est continue sur $J \times \Omega$, il vient, par composition, que $(t, z) \mapsto f(t, \Phi(t, t_0, z))$ est continue sur $[t_1, t_2] \times B(y_0, \min(\tilde{r}, r)]$. Utilisant (3.40), il vient que $(t, z) \mapsto \partial_t\Phi(t, t_0, z)$ est continue sur $[t_1, t_2] \times B(y_0, \min(\tilde{r}, r]$. En particulier, cette application est continue en (t, y_0). Ceci valant pour tout $(t^\star, y_0) \in \mathcal{D}_{t_0}$, il vient que $(t, z) \mapsto \partial_t\Phi(t, t_0, z)$ est continue sur l'ouvert $\mathcal{D}_{t_0}$.

Gardons $t_0 \in J$ fixé et considérons $(t^\star, y_0) \in \mathcal{D}_{t_0}$ quelconque. Utilisons les $t_1, t_2 \in I_{\max}(y_0)$ et $\delta > 0$, $r \in]0, \delta[$ et $\kappa > 0$ précédents. En particulier, on a (3.35) pour tout $z_0 \in B(y_0, r]$. Les deux points précédents de la preuve assurent que, pour tout $z_0 \in B(y_0, r]$ et tout $t \in [t_1, t_2]$, l'application $y \mapsto \Phi(t, t_0, y)$ est différentiable en z_0 et de la fonction $t \mapsto \mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, z_0)$ vérifie sur $[t_1, t_2]$,

$$\partial_t\mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, z_0) = \mathrm{d}_y f(t, \Phi(t, t_0, z_0)) \circ \mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, z_0),$$

et $\mathrm{d}_y\Phi(t_0,t_0,y_0)=\mathrm{Id}$. On en déduit que pour tout $z_0\in B(y_0,r]$ et tout $t\in[t_1,t_2]$,

$$\begin{aligned}&\partial_t\left[\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)\right]\\&\qquad=\mathrm{d}_yf(t,\Phi(t,t_0,z_0))\circ\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_yf(t,\Phi(t,t_0,y_0))\circ\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0).\end{aligned}$$

Ajoutant et retranchant $\mathrm{d}_yf(t,\Phi(t,t_0,z_0))\circ\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)$ dans le membre de droite et utilisant la linéarité, il vient que

$$\begin{aligned}&\partial_t\left[\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)\right]-\mathrm{d}_yf(t,\Phi(t,t_0,z_0))\circ(\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0))\\&\qquad=\underbrace{(\mathrm{d}_yf(t,\Phi(t,t_0,z_0))-\mathrm{d}_yf(t,\Phi(t,t_0,y_0)))\circ\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)}_{:=b(t)}.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Rappelons que, par la propriété 3.4.8, pour tout $z_0\in B(y_0,r]$ et tout $t\in[t_1,t_2]$, on a $(t,\Phi(t,t_0,z_0))\in K_\delta$. Sur le compact K_δ, la fonction $(t,y)\mapsto\mathrm{d}_yf(t,y)$ est continue par hypothèse, donc elle y est d'une part bornée par un certain $M>0$ et d'autre part uniformément continue par théorème de Heine. Fixons $\varepsilon>0$. Il existe un $\eta>0$ tel que

$$\forall((t,z_1),(t,z_2))\in K_\delta^2,\qquad\|\mathrm{d}_yf(t,z_1)-\mathrm{d}_yf(t,z_2)\|\le\varepsilon.$$

Avec (3.35), on a pour $z_0\in\mathbb{R}^d$ tel que $\|z_0-y_0\|\le\min(r,\eta/\kappa)$ et $t\in[t_1,t_2]$,

$$\|\Phi(t,t_0,z_0))-\Phi(t,t_0,y_0)\|\le\kappa\|z_0-y_0\|\le\kappa\frac{\eta}{\kappa}=\eta.$$

Ceci implique que

$$\forall t\in[t_1,t_2],\quad\forall z_0\in B(y_0,\min(r,\eta/\kappa)],\qquad\|\mathrm{d}_yf(t,\Phi(t,t_0,z_0))-\mathrm{d}_yf(t,\Phi(t,t_0,y_0))\|\le\varepsilon.$$

Puisque la fonction $t\mapsto\mathrm{d}_y\Phi(t,y_0,y_0)$ est dérivable sur le segment $[t_1,t_2]$, elle y est continue. En particulier, elle est bornée par un certain $C>0$. Avec la définition de b en (3.41), on déduit de ce qui précède que

$$\forall t\in[t_1,t_2],\quad\forall z_0\in B(y_0,\min(r,\eta/\kappa)],\qquad\|b(s)\|\le C\varepsilon.$$

Par suite, en utilisant l'équation (3.41) et l'estimation de b ci-dessus, on a pour tout $z_0\in B(y_0,\min(r,\eta/\kappa)]$ et tout $t\in[t_1,t_2]$,

$$\|\partial_t\left[\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)\right]\|\le M\left\|\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)\right\|+C\varepsilon.$$

En utilisant la formulation intégrale de l'équation différentielle (3.41), on en déduit que la fonction $v:t\mapsto\|\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)\|$ vérifie pour tout $t\in[t_1,t_2]$,

$$\begin{aligned}v(t)-v(t_0)&=\|\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)\|-\|z_0-y_0\|\\&\le\|\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(t,t_0,y_0)-(z_0-y_0)\|\\&\le\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)}\|\partial_t\left[\mathrm{d}_y\Phi(s,t_0,z_0)-\mathrm{d}_y\Phi(s,t_0,y_0)\right]\|\,\mathrm{d}s\\&\le\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)}(Mv(s)+C\varepsilon)\,\mathrm{d}s\\&\le M\int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)}v(s)\mathrm{d}s+C\varepsilon(t_2-t_1).\end{aligned}$$

Puisque $v(t_0) = \|z_0 - y_0\|$, on en déduit que

$$\forall t \in [t_1, t_2], \qquad v(t) \le C\varepsilon(t_2 - t_1) + \|z_0 - y_0\| + M \int_{\min(t_0,t)}^{\max(t_0,t)} v(s)\mathrm{d}s.$$

Finalement, le corollaire 3.4.7 du lemme de Gronwall 3.4.5 assure que, pour $z_0 \in B(y_0, \min(r, \eta/\kappa, \varepsilon)]$

$$\forall t \in [t_1, t_2], \qquad \|\mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, z_0) - \mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, y_0)\| \le \underbrace{2\max\left(C(t_2 - t_1), 1\right)}_{:=\tilde{C}} \varepsilon \mathrm{e}^{M(t_2 - t_1)}.$$

Observons que, pour $z_0 \in B(y_0, \min(r, \eta/\kappa)]$ et $t \in [t_1, t_2]$, on a de plus, en utilisant (3.34),

$$\|\mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, y_0) - \mathrm{d}_y\Phi(t^\star, t_0, y_0)\| \le \int_{\min(t,t^\star)}^{\max(t,t^\star)} \|\mathrm{d}_y f(s, \Phi(s, t_0, y_0))\|\mathrm{d}s \le M|t - t^\star|.$$

Pour $z_0 \in B(y_0, \min(r, \eta/\kappa, \varepsilon)]$ et $t \in [t_1, t_2]$, on obtient *in fine*

$$\begin{aligned} &\|\mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, z_0) - \mathrm{d}_y\Phi(t^\star, t_0, y_0)\| \\ &\quad \le \quad \|\mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, z_0) - \mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, y_0)\| + \|\mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, y_0) - \mathrm{d}_y\Phi(t^\star, t_0, y_0)\| \\ &\quad \le \quad \tilde{C}\varepsilon\mathrm{e}^{M(t_2 - t_1)} + M|t - t^\star|. \end{aligned}$$

Puisque $t^\star \in]t_1, t_2[$, ceci démontre que $(t, y) \mapsto \mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, y)$ est continue en $(t^\star, y_0)$. Ceci valant quel que soit $(t^\star, y_0) \in \mathcal{D}_{t_0}$, il vient que $(t, y) \mapsto \mathrm{d}_y\Phi(t, t_0, y)$ est continue sur l'ouvert $\mathcal{D}_{t_0}$.
En conclusion, la fonction $(t, y) \mapsto \Phi(t, t_0, y)$ est continûment dérivable sur l'ouvert $\mathcal{D}_{t_0}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert. Ceci démontre le troisième point de la propriété. ■

Remarque 3.4.16 *L'équation variationnelle* (3.34) *s'obtient facilement à partir de l'équation différentielle originelle* (3.17)*, qui conduit à la relation*

$$\partial_t\Phi(t, t_0, y_0) = f(t, \Phi(t, t_0, y_0)).$$

En effet, si $\Phi(t, t_0, y_0)$ *est défini, alors cette relation a lieu pour* y *dans un voisinage de* y_0*. En dérivant* **formellement** *cette relation par rapport à* y_0*, et en permutant* **formellement** *la dérivation par rapport au temps et celle par rapport à* y_0*, il vient par la règle de dérivation des fonctions composées,*

$$\partial_t\partial_{y_0}\Phi(t, t_0, y_0) = \mathrm{d}_y f(t, \Phi(t, t_0, y_0))\partial_{y_0}\Phi(t, t_0, y_0),$$

qui est exacement l'équation différentielle sur la première ligne de (3.34) *pour la fonction* $Z : t \mapsto \partial_{y_0}\Phi(t, t_0, y_0)$*, à valeurs dans* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$*. Le théorème 3.4.15 fournit des conditions suffisantes pour d'une part rendre légitime la dérivation formelle ci-dessus, car le flot est en effet différentiable en la donnée initiale, et d'autre part autoriser la permutation des dérivées en temps et en espace devant* Φ*.*

On peut bien sûr généraliser ce théorème aux dérivées successives de nombreuses manières. En voici une particulièrement simple.

Propriété 3.4.17 *Soit* J *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$*. Soit* $k \in \mathbb{N}$ *avec* $k \ge 1$*. Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* $J \times \Omega$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*. Notons* Φ *flot associée à l'équation différentielle* (3.17)*. Quel que soit* $t_0 \in J$*, l'application* $(t, y) \mapsto \Phi(t, t_0, y)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur l'ouvert* $\mathcal{D}_{t_0}$*.*

Preuve. On peut remarquer que le cas $k = 1$ est couvert par le théorème de différentiabilité du flot (on a même un peu “trop” de régularité en temps). Pour $k \geq 2$, on peut adapter la preuve précédente, en poussant progressivement le développement limité du flot en espace, pour montrer par récurrence que le flot est de classe $\mathcal{C}^1$, puis $\mathcal{C}^2$, puis $\mathcal{C}^k$, mais nous ne le ferons pas ici dans un souci de concision. ∎

3.4.3 Notion d'intégrale première

Définition 3.4.18 *On appelle* **intégrale première de l'équation différentielle** (3.17) *toute fonction $H : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui est constante le long des solutions de* (3.17)*, c'est-à-dire telle que, pour toute solution y de* (3.17) *sur un intervalle $I \subset J$ contenant un certain t_0, on a*

$$\forall t \in I, \qquad H(t, y(t)) = H(t_0, y(t_0)).$$

Propriété 3.4.19 *Supposons que la fonction f est continue et localement lipschitzienne en espace sur $J \times \Omega$. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ H sur $J \times \Omega$ est une intégrale première de* (3.17) *si et seulement si*

$$\forall (t, y) \in J \times \Omega, \qquad \frac{\partial H}{\partial t}(t, y) + \langle \nabla H(t, y), f(t, y) \rangle = 0,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$.

Preuve. Dans le sens direct, fixons $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$. Puisque les hypothèses des théorèmes de Cauchy-Lipschitz sont véritifées, il existe une solution de (3.8) sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et inclus dans J. Puisque H est une intégrale première de (3.17), la fonction $t \mapsto H(t, y(t))$ est constante sur I. De plus, la fonction $t \mapsto (t, y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $J \times \Omega$ et la fonction $(t, y) \mapsto H(t, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J \times \Omega$. Par dérivation des fonctions composées, il vient que

$$\forall t \in I, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(t, y(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, y(t)) + \langle \nabla H(t, y(t)), f(t, y(t)) \rangle = 0.$$

En particulier, cette relation est vraie en t_0 et l'on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(t_0, y_0) = \frac{\partial H}{\partial t}(t_0, y_0) + \langle \nabla H(t_0, y_0), f(t_0, y_0) \rangle = 0.$$

Ceci valant pour tout $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, on a le résultat.
Dans le sens réciproque, il suffit de considérer une solution $t \mapsto y(t)$ de (3.17) sur un intervalle $I \subset J$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et il en est de même de la fonction $t \mapsto H(t, y(t))$. Les calculs précédents et l'hypothèse assurent que la dérivée de cette fonction est nulle sur l'intervalle I. On en déduit que $t \mapsto H(t, y(t))$ est constante sur I. Ceci valant pour toute solution de (3.17), il vient que H est une intégrale première de (3.17). ∎

Remarque 3.4.20 *On peut tirer des informations sur les solutions de* (3.17) *à partir d'intégrales premières, en particulier dans le cas où H (et souvent, f) ne dépend pas de t. En effet, la propriété précédente assure que les solutions de* (3.17) *"vivent" sur les courbes de niveau de l'intégrale première H.*

Exemple 3.4.21 *Revenons sur l'exemple 3.1.6 de la particule de masse $m > 0$ dans le potentiel V. Supposons maintenant $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, de sorte que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 3.2.21 (ou du théorème 3.3.12) s'appliquent. On vérifie que la quantité (indépendante du temps)*

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + V(x),$$

est une intégrale première de (3.4)*. Cette quantité est appelée énergie mécanique totale de la particule dans le référentiel considéré.*

3.5 Une condition suffisante d'existence locale : le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà

Théorème 3.5.1 (de Cauchy-Peano-Arzelà) *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Soit f une fonction continue de $J \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$, il existe un $\ell > 0$ tel que $[t_0 - \ell, t_0 + \ell] \subset J$ et une fonction y de $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ dans Ω, dérivable sur $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ et solution du problème de Cauchy* (3.8) *sur $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$.*

Remarque 3.5.2 *Les hypothèses sur le champ de vecteurs dans le théorème* (3.5.1) *sont plus faibles que dans les théorèmes de Cauchy-Lipschitz 3.2.21 et 3.3.12 : on ne demande pas le caractère localement lipschitzien en la variable y. Par ailleurs, la conclusion du théorème est plus faible également : il existe une solution au problème de Cauchy* (3.8) *localement sur un certain $[t_0-\ell, t_0+\ell]$, mais il n'est plus question d'unicité, même locale (voir l'exemple 3.5.5).*

Remarque 3.5.3 *Par un argument purement ensembliste utilisant le lemme de Zorn (fondé sur l'axiome du choix), il est possible d'affirmer que l'existence locale d'une solution, fournie par le théorème 3.5.1 implique l'existence d'une solution maximale (toujours sans unicité sans hypothèse supplémentaire).*

Remarque 3.5.4 *Une preuve possible du théorème 3.5.1 consiste à régulariser, par exemple par convolution en dimension d en espace, le champ de vecteurs f, pour l'approcher par une suite de champs de vecteurs $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.21, et convergeant uniformément vers f sur tous les cylindres inclus dans $J \times \Omega$. Appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz 3.2.21 aux problèmes de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) & = & f_n(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases},$$

on obtient une suite de fonctions y_n sur des intervalles de taille $2\ell_n$, et l'on peut choisir un $\ell > 0$ indépendant de $n \in \mathbb{N}$ minorant tous ces ℓ_n en utilisant la convergence uniforme locale de f_n vers f. Restreignant ces fonctions à $[t_0 - \ell, t_0 + \ell]$ et utilisant la convergence uniforme locale de f_n vers f, on montre qu'elles forment une famille équicontinue (car équilipschitzienne) et bornée dans $\mathcal{C}^0([t_0 - \ell, t_0 + \ell])$. Le théorème d'Ascoli assure alors qu'on peut extraire une sous-suite de cette famille de fonctions de sorte que la suite extraite converge vers un certain y dans $\mathcal{C}^0([t_0 - \ell, t_0 + \ell])$ muni de la norme infinie. On peut alors finalement passer à la limite dans la formulation intégrale des problèmes de Cauchy en utilisant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [t_0 - \ell, t_0 + \ell], \qquad y_{\varphi(n)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_{\varphi(n)}(s, y_{\varphi(n)}(s))\mathrm{d}s,$$

où l'on a noté φ l'extractrice de la suite de fonctions y_n, pour conclure que, à la limite,

$$\forall t \in [t_0 - \ell, t_0 + \ell], \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

Et ainsi, y répond à la question.

Exemple 3.5.5 *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) &= \sqrt{|y(t)|} \\ y(0) &= 0 \end{cases}.$$

Après avoir constaté que le champ de vecteurs vérifie les hypothèses du théorème 3.5.1 mais pas celles des théorèmes 3.2.21 et 3.3.12, on remarquera que la fonction nulle est solution de ce problème de Cauchy, de même que l'est, pour tout $\alpha \geq 0$, la fonction

$$y_\alpha : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{4}(t-\alpha)^2 & \textit{si } t \geq \alpha \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}.$$

3.6 Équations différentielles linéaires

3.6.1 Une condition suffisante d'existence et d'unicité de solutions globales

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ pour l'ensemble des matrices carrées de taille d à coefficients dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse dans cette section 3.6 aux équations différentielles linéaires d'ordre 1, c'est-à-dire aux équations différentielles linéaires de la forme

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t), \tag{3.42}$$

où A est une fonction donnée d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, B est une fonction donnée de J dans $\mathbb{K}^d$, et l'inconnue est une fonction Y définie et dérivable sur un intervalle $I \subset J$, à valeurs dans $\mathbb{K}^d$, solution de (3.42) sur I. Ceci correspond [11], avec les notations du début de ce chapitre 3 au cas $\Omega = \mathbb{K}^d$, et

$$f : \begin{pmatrix} J \times \mathbb{K}^d & \longrightarrow & \mathbb{K}^d \\ (t, Y) & \longmapsto & A(t)Y + B(t) \end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

Notant $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq d}$ les composantes respectives données de A et B, et $(y_i)_{1\leq i\leq d}$ celles inconnues du vecteur Y, il vient que l'équation (3.42) s'écrit également

$$\begin{cases} y_1'(t) &= & a_{1,1}(t)y_1(t) & + & \cdots & + & a_{1,d}y_d(t) & + & b_1(t) \\ y_2'(t) &= & a_{2,1}(t)y_1(t) & + & \cdots & + & a_{2,d}y_d(t) & + & b_2(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ y_d'(t) &= & a_{d,1}(t)y_1(t) & + & \cdots & + & a_{d,d}y_d(t) & + & b_d(t) \end{cases}.$$

On parlera ainsi parfois de système différentiel linéaire pour parler de (3.42).

11. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut, pour coller complètement au début du chapitre 3, considérer que $\mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}$ et ainsi voir $\mathbb{C}^d$ comme un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$.

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses sur A et B, l'équation (3.42) admet des solutions globales, et l'ensemble de ses solutions sur J a une structure particulière d'espace affine, qui permet de ramener le calcul de toutes les solutions de (3.42) sur J à celles de (3.42) lorsque $B = 0$ et à une solution particulière de (3.42), dont on montrera comment il est possible de la caractériser (et, parfois, de la calculer).

Un outil pour montrer la globalité des solutions de (3.42) est le lemme de Gronwall 3.4.5.

Pour les équations différentielles linéaires de la forme (3.42), le théorème de Cauchy-Lipschitz implique le résultat suivant.

Théorème 3.6.1 (de Cauchy pour les équations différentielles linéaires) *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que A et B sont continues sur J, à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^d$ respectivement. Pour tout $t_0 \in J$ et tout $Y_0 \in \mathbb{K}^d$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Y'(t) &= A(t)Y(t) + B(t) \\ Y(t_0) &= Y_0 \end{cases}, \tag{3.44}$$

admet une unique solution sur J tout entier.

Preuve. On fait la preuve dans le cas où J est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Lorsque J n'est pas ouvert, on peut utiliser la version du théorème de Cauchy-Lipschitz global présentée dans la remarque 3.3.14, mais c'est un peu technique. On suppose donc que J est ouvert dans cette preuve. On considère toujours $\mathbb{K}^d$ muni de la norme euclidienne (ou hermitienne) usuelle et on munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ de la norme subordonnée [12], notée $|||\cdot|||$. Observons que, puisque A et B sont continues sur J, le champ de vecteurs f défini en (3.43) est localement lipschitzien en espace. Pour cela, fixons un segment $[a, b] \subset J$ et observons que la fonction $t \mapsto |||A(t)|||$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc bornée ce segment. Ainsi, il existe $M_A > 0$ tel que pour tout $t \in [a, b]$, $|||A(t)||| \leq M_A$. On en déduit que pour tout $t \in [a, b]$ et $Y_1, Y_2 \in \mathbb{K}^d$,

$$\begin{aligned} \|f(t, Y_1) - f(t, Y_2)\| &= \|A(t)Y_1 - A(t)Y_2\| \\ &= \|A(t)(Y_1 - Y_2)\| \\ &\leq |||A(t)||| \|Y_1 - Y_2\| \\ &\leq M_A \|Y_1 - Y_2\|. \end{aligned}$$

Ceci assure que f est localement lipschitzien en espace. De plus, f est continu sur $J \times \mathbb{K}^d$, car A et B sont des fonctions continues sur J et par continuité du produit matrice / vecteur et de l'addition de deux vecteurs. On en déduit que les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz global 3.3.12 sont vérifiées par f.

Utilisant le théorème 3.3.12, il existe une unique solution maximale Y au problème de Cauchy (3.44), sur un intervalle ouvert contenant t_0 que nous notons $]\alpha, \beta[$. Montrons que cette solution est globale. Pour cela, supposons par l'absurde que cette solution maximale Y n'est pas globale. Par exemple, supposons que β n'est pas l'extrémité droite de J (le cas où α n'est pas l'extrémité gauche de J se traite de la même manière en exercice). Dans ce cas, le lemme 3.3.17 assure que, quel que soit $R > 0$, la solution Y sort de la boule fermée de centre 0 et de rayon R (qui est non-vide,

12. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^d$, alors la norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^d$ est définie pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ par

$$|||A||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \inf\{c \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in \mathbb{K}^d,\ \|Ax\| \leq c\|x\|\}.$$

fermée et bornée dans $\mathbb{K}^d$, donc compacte) sur un intervalle de la forme $]\beta-\delta_R,\beta[$ pour un certain $\delta_R>0$. Montrons à l'inverse que Y reste bornée sur $[t_0,\beta[$. Puisque β n'est pas l'extrémité droite de J, on peut trouver $t_1\in J$ avec $t_1>\beta$. Remarquons maintenant que les fonctions $t\mapsto |||A(t)|||$ et $t\mapsto \|B(t)\|$ sont continues sur le segment $[t_0,t_1]$. Elles sont donc bornées par $M_A>0$ et $M_B>0$ respectivement sur ce segment. Puisque Y est une solution de (3.44), on a pour tout $t\in[t_0,\beta[$,

$$\begin{aligned}
\|Y(t)\| &= \left\|Y(t_0)+\int_{t_0}^t (A(s)Y(s)+B(s))\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\leq \|Y(t_0)\|+\int_{t_0}^t (\|A(s)Y(s)\|+\|B(s)\|)\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|Y(t_0)\|+\int_{t_0}^t (|||A(s)|||\|Y(s)\|+\|B(s)\|)\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|Y(t_0)\|+\int_{t_0}^t (M_A\|Y(s)\|+M_B)\,\mathrm{d}s \\
&\leq \|Y(t_0)\|+M_B(t-t_0)+M_A\int_{t_0}^t \|Y(s)\|\mathrm{d}s \\
&\leq \|Y(t_0)\|+M_B(\beta-t_0)+M_A\int_{t_0}^t \|Y(s)\|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le lemme de Gronwall 3.4.5 à la fonction continue $u(t)=\|Y(t)\|$ sur tout segment inclus dans $[t_0,\beta[$. Ce lemme assure que

$$\forall t\in[t_0,\beta[,\qquad \|Y(t)\|\leq(\|Y(t_0)\|+M_B(\beta-t_0))\,\mathrm{e}^{M_A(t-t_0)}.$$

On en déduit que

$$\forall t\in[t_0,\beta[,\qquad \|Y(t)\|\leq(\|Y(t_0)\|+M_B(\beta-t_0))\,\mathrm{e}^{M_A(\beta-t_0)}.$$

En particulier, la solution maximale reste bornée sur $[t_0,\beta[$. Or on a montré précédemment qu'elle sort de toute boule sur $[t_0,\beta[$. On a ainsi une contradiction. On en déduit que la solution maximale de (3.44) est globale. ∎

Remarquons que, sous les hypothèses du théorème 3.6.1, on peut définir le flot Φ de l'équation (3.42) sur $J\times J\times\mathbb{K}^d$ tout entier (voir (3.24)). Remarquons également que, sous les hypothèses du théorème 3.6.1, la solution maximale de (3.44) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

3.6.2 Équations différentielles linéaires homogènes

Définition 3.6.2 *Avec les notations précédentes, le système différentiel linéaire* (3.42) *est dit* **homogène** *lorsque B est la fonction nulle.*

On s'intéresse dans cette section au système différentiel homogène

$$Y'(t)=A(t)Y(t). \tag{3.45}$$

On supposera dans toute cette section que la fonction A est continue sur J, de sorte que le théorème de Cauchy 3.6.1 s'applique.

Propriété 3.6.3 *Lorsque l'application A est continue sur J à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de* (3.45) *sur J est un espace vectoriel de dimension d. De plus, pour tout $t_0\in J$,* *l'application*

$$\varphi_{t_0} : \begin{pmatrix} \mathcal{S}_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^d \\ y & \longmapsto & y(t_0) \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve. On vérifie aisément que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{K}^d)$. Pour tout $t_0 \in J$, le fait que φ_{t_0} est un isomorphisme est exactement la conclusion du théorème de Cauchy 3.6.1. ■

Notons $\mathbb{B}(\mathbb{K}^d)$ la base canonique de $\mathbb{K}^d$.

Définition 3.6.4 *On appelle (abusivement)* **matrice résolvante associée à** (3.45) *la famille de matrices indexée par* $(t, t_0) \in J^2$ *définie par*

$$\forall t, t_0 \in J, \qquad R(t, t_0) = \mathrm{Mat}\left(\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1}, \mathbb{B}(\mathbb{K}^d)\right).$$

Remarque 3.6.5 *Pour tout $t, t_0 \in J$, l'application $y_0 \mapsto \Phi(t, t_0, y_0)$ est linéaire de $\mathbb{K}^d$ dans lui-même, et $R(t, t_0)$ est la matrice de cette application linéaire dans la base canonique de $\mathbb{K}^d$.*

Propriété 3.6.6 *On a les propriétés suivantes pour la matrice résolvante, qui traduisent son lien avec le flot identifié dans la remarque précédente :*

1. *Quels que soient $t, t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{K}^d$, $R(t, t_0)y_0$ est la valeur à l'instant t de la solution maximale du système* (3.45) *pour la donnée de Cauchy y_0 à l'instant t_0.*
2. *Quels que soient $t, t_0 \in J$,*
$$R(t, t_0) \in \mathcal{GL}_d(\mathbb{K}) \qquad \textit{et} \qquad R(t_0, t_0) = \mathrm{Id}.$$
3. *Quels que soient $t, t_0, s \in J$*
$$R(t, t_0) = R(t, s)R(s, t_0).$$
4. *Quels que soient $s, t \in J$,*
$$R(s, t)^{-1} = R(t, s).$$

Preuve. Le point 1 est une traduction directe de l'action de $\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1}$ sur un vecteur dont on a les composantes dans la base canonique $\mathbb{B}(\mathbb{K}^d)$, à $t, t_0 \in J$ fixés. Le point 2 provient du fait que, pour tous $t, t_0 \in J$, la matrice $R(t, t_0)$ est la matrice de l'isomorphisme $\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1}$ dans une base de $\mathbb{K}^d$, et est donc inversible. Par ailleurs, cet isomorphisme est l'identité lorsque $t = t_0$. Pour montrer le point 3, on peut par exemple remarquer que pour tous $s, t, t_0 \in J$,

$$\begin{aligned} R(t,s)R(s,t_0) &= \mathrm{Mat}\left(\varphi_t \circ \varphi_s^{-1}, \mathbb{B}(\mathbb{K}^d)\right) \times \mathrm{Mat}\left(\varphi_s \circ \varphi_{t_0}^{-1}, \mathbb{B}(\mathbb{K}^d)\right) \\ &= \mathrm{Mat}\left(\left(\varphi_t \circ \varphi_s^{-1}\right) \circ \left(\varphi_s \circ \varphi_{t_0}^{-1}\right), \mathbb{B}(\mathbb{K}^d)\right) \\ &= \mathrm{Mat}\left(\varphi_t \circ \left(\varphi_s^{-1} \circ \varphi_s\right) \circ \varphi_{t_0}^{-1}, \mathbb{B}(\mathbb{K}^d)\right) \\ &= \mathrm{Mat}\left(\varphi_t \circ \varphi_{t_0}^{-1}, \mathbb{B}(\mathbb{K}^d)\right) \\ &= R(t, t_0). \end{aligned}$$

Enfin, pour le point 4, il suffit de choisir $t = t_0$ dans le point 3. ■

Définition 3.6.7 *On appelle* **système fondamental de solutions de** (3.45) *toute base de l'espace vectoriel* $\mathcal{S}_H$ *des solutions de* (3.45) *sur* J.

On peut caractériser les systèmes fondamentaux de solutions de (3.45) parmi les familles de d solutions de (3.45) comme suit.

Propriété 3.6.8 *Supposons que* $J \neq \emptyset$. *Soient* $(v_1, \ldots, v_d) \in \mathcal{S}_H^d$ *une famille de* d *solutions de* (3.45) *sur* J. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La famille* $(v_1, \ldots, v_d)$ *forme un système fondamental de solutions de* (3.45).
2. *Pour tout* $t \in J$, *le déterminant de* $(v_1(t), \ldots, v_d(t))$ *est non nul.*
3. *Il existe* $t_0 \in J$, *le déterminant de* $(v_1(t_0), \ldots, v_d(t_0))$ *est non nul.*

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}, \quad \forall t \in J, \qquad \varphi_t(v_k) = v_k(t),$$

et de se souvenir que, par la propriété 3.6.3, l'application φ_t est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{S}_H$ et $\mathbb{K}^d$ quel que soit $t \in J$. ■

Définition 3.6.9 *On appelle* **matrice fondamentale** *de l'équation homogène* (3.45) *toute fonction matricielle* $t \mapsto V(t)$ *dont les colonnes forment un système fondamental de solutions de* (3.45) *sur* J.

Propriété 3.6.10 *Si* $t \mapsto V(t)$ *est une matrice fondamentale de* (3.45) *sur* J, *alors la matrice résolvante* R *de* (3.45) *vérifie*

$$\forall t, t_0 \in J, \qquad R(t, t_0) = V(t) \left(V(t_0)\right)^{-1}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, par définition de la matrice fondamentale R, on a pour tous $t, t_0 \in J$,

$$V(t) = R(t, t_0)V(t_0),$$

en raisonnant par colonne. ■

Remarque 3.6.11 *Ainsi, connaître un système fondamental de solutions du système homogène* (3.45) *sur* J, *connaître une matrice fondamentale de* (3.45) *sur* J *ou connaître la matrice résolvante de* (3.45) *sur* J *sont 3 choses rigoureusement équivalentes. C'est un moyen d'exprimer le fait que l'on connaît toutes les solutions de* (3.45) *sur* J.

Propriété 3.6.12 *Pour tout* $t_0 \in J$, *la fonction* $t \mapsto R(t, t_0)$ *est l'unique solution sur* J *à valeurs dans* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ *du problème de Cauchy linéaire*

$$\begin{cases} Z'(t) &= A(t)Z(t) \\ Z(t_0) &= \mathrm{Id} \end{cases}. \tag{3.46}$$

Preuve. Fixons $t_0 \in J$. En choisissant pour z_0 chacun des vecteurs de $\mathbb{B}(\mathbb{K}^d)$, on vérifie que chaque colonne de l'application $t \mapsto R(t,t_0)$ est solution de (3.45) sur J pour la donnée z_0 en t_0. On en déduit que $t \mapsto R(t,t_0)$ est bien solution de (3.46) sur J. L'unicité provient bien sûr du théorème 3.6.1 (la fonction $t \mapsto A(t)$ étant continue sur J). Il faut toutefois faire attention et écrire le problème de Cauchy 3.46 de manière équivalente sous la forme d'un problème où l'inconnue Y est un vecteur de taille d^2 (en identifiant $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^{d^2}$). On assemble alors une fonction $t \mapsto \mathcal{A}(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{d^2}(\mathbb{K})$, telle qu'une fonction matricielle $t \mapsto Z(t)$ est solution de (3.46) sur J si et seulement si la fonction correspondante Y (par l'identification de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^{d^2}$) est solution de $Y'(t) = \mathcal{A}(t)Y(t)$ avec $Y(t_0)$ fixé comme étant un vecteur composé de 0 et de 1 correspondant à la matrice Id. La matrice $\mathcal{A}$ est continue sur J dès que A l'est. On en déduit que l'on peut appliquer le théorème 3.6.1 qui assure l'unicité. ∎

Remarque 3.6.13 *Il faut bien distinguer l'écriture de l'équation différentielle* (3.45)*, posée dans un espace de dimension d de celle de* (3.46) *qui est posée dans un espace de dimension d^2. En particulier, lorsque l'on met l'équation différentielle de* (3.46) *sous la forme* (3.45)*, la matrice qui intervient n'est* **pas** *la matrice A (mais elle est formée à partir de A). L'équation* (3.46) *traduit le fait que chaque colonne de la matrice Z est solution de l'équation différentielle* (3.45) *avec un vecteur de la base canonique comme condition initiale en t_0.*

Propriété 3.6.14 *Soit $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Pour h au voisinage de* 0 *dans $\mathbb{C}$, on a*

$$\det(\mathrm{Id} + hB) = 1 + h\mathrm{Tr}(B) + \mathcal{O}(h^2). \tag{3.47}$$

Preuve. On peut par exemple trigonaliser la matrice B, considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. ∎

On en déduit la propriété suivante sur le comportement du déterminant de la matrice résolvante de (3.45).

Propriété 3.6.15 (Équation de Jacobi et formule de Liouville) *Pour tout $t_0 \in J$, la fonction scalaire $t \mapsto \det(R(t,t_0))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie l'équation de Jacobi :*

$$\forall t \in J, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det R(t,t_0) = \mathrm{Tr}(A(t))\det(R(t,t_0)).$$

Puisque $\det(R(t_0,t_0)) = 1$*, on en déduit la formule de Liouville*

$$\forall t \in J, \qquad \det(R(t,t_0)) = \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}(A(s))\mathrm{d}s\right).$$

Preuve. Fixons $t_0 \in J$. Chaque colonne de $t \mapsto R(t,t_0)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, il vient que chaque coefficient de $t \mapsto R(t,t_0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Par suite la fonction $\Delta : t \mapsto \det(R(t,t_0))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J comme somme de produits de telles fonctions. Fixons maintenant $t \in J$ et considérons $h \in \mathbb{R}$ tel que $t + h \in J$. Écrivons que

$$\begin{aligned}
\Delta(t+h) &= \det(R(t+h,t_0)) \\
&= \det\Big(R(t+h,t_0)R(t,t_0)^{-1}R(t,t_0)\Big) \\
&= \det(R(t,t_0))\det\Big((R(t+h,t_0)R(t,t_0)^{-1})\Big).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Or, puisque $t \mapsto R(t,t_0)$ est dérivable en t, et solution de (3.46) par la propriété 3.6.12, on a, pour h proche de 0,

$$R(t+h,t_0) = R(t,t_0) + hA(t)R(t,t_0) + o(h).$$

Ceci implique, pour h proche de 0,

$$R(t+h,t_0)R(t,t_0)^{-1} = \mathrm{Id} + hA(t) + o(h).$$

On en déduit que pour h proche de 0,

$$\det\left(R(t+h,t_0)R(t,t_0)^{-1}\right) = \det\left(\mathrm{Id} + hA(t)\right) + o(h).$$

Utilisant le développement limité (3.47) et la propriété 3.6.14, il vient que, pour h proche de 0,

$$\det\left(R(t+h,t_0)R(t,t_0)^{-1}\right) = 1 + h\mathrm{Tr}(A(t)) + o(h).$$

Utilisant ce développement dans (3.48), on obtient pour h proche de 0,

$$\Delta(t+h) = \Delta(t)\left(1 + h\mathrm{Tr}(A(t))\right) + o(h).$$

Ceci implique que

$$\Delta'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\Delta(t).$$

Ceci démontre que $t \mapsto \det(R(t,t_0))$ est solution de l'équation de Jacobi sur J. On en déduit la formule de Liouville par intégration de cette équation différentielle scalaire, linéaire, homogène, d'ordre 1, à coefficient continu (sur J) avec la donnée initiale $\Delta(t_0) = 1$. ∎

3.6.3 Équations différentielles linéaires inhomogènes

On a vu en 3.6.2 la structure de l'espace des solutions de l'équation homogène (3.45) associée à (3.42). Dans cette section, toujours sous l'hypothèse que $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ sont continues sur l'intervalle (non vide) J, nous allons nous intéresser à la structure de l'ensemble des solutions de (3.42) sur J, et voir comment il est possible, si l'on connaît les solutions de (3.45), de caractériser une solution particulière de (3.42) sur J, pour en déduire l'ensemble des solutions de (3.42) sur J.

Structure de l'ensemble des solutions

On note toujours $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (3.45) sur J.

Théorème 3.6.16 *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de* (3.42) *sur J est un espace affine de direction $\mathcal{S}_H$. Si y_p est une solution particulière de* (3.42) *sur J, alors*

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H.$$

Preuve. Soit y_p une solution particulière de (3.42) sur J. Il en existe par le théorème 3.6.1. Observons qu'une fonction y de J dans $\mathbb{K}^d$ est solution de (3.42) sur J si et seulement si $y - y_p$ est solution de (3.45) sur J. Le résultat en découle. ∎

Méthode de variation des constantes

Connaissant un système fondamental de solutions de (3.45) sur J, donc connaissant la matrice résolvante $t \mapsto R(t, t_0)$ sur J pour un certain $t_0 \in J$, nous allons caractériser une solution particulière de (3.42) sur J, de telle manière que celle-ci sera calculable dans les exercices (elle ne l'est pas, en général, mais on se ramène à un problème simple de primitivation). Cette méthode porte le nom de méthode de Duhamel pour le calcul d'une solution particulière du système inhomogène.

Fixons $Y_0 \in \mathbb{K}^d$. Cherchons la solution y de (3.44) sous la forme

$$y(t) = R(t, t_0)x(t),$$

où x est une fonction dérivable inconnue sur J vérifiant $x(t_0) = Y_0$. Observons que pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R(t, t_0)x(t) + R(t, t_0)x'(t) \\ &= A(t)R(t, t_0)x(t) + R(t, t_0)x'(t) \\ &= A(t)y(t) + R(t, t_0)x'(t), \end{aligned}$$

en utilisant la propriété 3.6.12. Ainsi, la fonction y est solution de (3.42) sur J si et seulement si pour tout $t \in J$,

$$x'(t) = R(t_0, t)B(t).$$

Puisque la fonction B est continue sur J, ce problème de primitivation (a une solution sur J et) est équivalent à la relation

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)B(s)\mathrm{d}s.$$

Ainsi, la fonction y est la solution de (3.42) sur J pour la donnée de Cauchy (t_0, Y_0) si et seulement si

$$\forall t \in J, \qquad x(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)B(s)\mathrm{d}s.$$

Et dans ce cas, on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} y(t) &= R(t, t_0)x(t) \\ &= R(t, t_0)Y_0 + R(t, t_0) \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)B(s)\mathrm{d}s \\ &= R(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} \left(R(t, t_0)R(t_0, s)\right) B(s)\mathrm{d}s \\ &= R(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 3.6.17 (formule de Duhamel) *Si A et B sont continues sur l'intervalle J, alors pour tout $t_0 \in J$ et tout $Y_0 \in \mathbb{K}^d$, l'unique solution y de* (3.44) *sur J vérifie*

$$\forall t \in J, \qquad y(t) = R(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)\mathrm{d}s,$$

où $t \mapsto R(t, t_0)$ est la matrice résolvante du système homogène (3.45) *associé à* (3.42).

3.6.4 Équations différentielles linéaires scalaires

On se donne $d+1$ fonctions scalaires continues $b, u_0, \dots, u_{d-1}$ sur un intervalle non vide J, et l'on s'intéresse aux solutions sur J de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre d

$$y^{(d)}(t) + u_{d-1}(t)y^{(d-1)}(t) + \cdots + u_1(t)y'(t) + u_0(t)y(t) = b(t). \tag{3.49}$$

Posant pour $t \in J$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(d-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix},$$

et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_0(t) & -u_1(t) & -u_2(t) & \cdots & \cdots & -u_{d-1}(t) \end{pmatrix},$$

l'équation (3.49) s'écrit de manière équivalente (3.42).

En particulier, pour le système homogène ($B = 0$), on peut définir le wronskien d'une famille de fonctions de $\mathcal{S}_H$.

Définition 3.6.18 *On suppose que $B = 0$. On note $y_1, \dots, y_d$ une famille de solutions de* (3.49) *sur J. On appelle* **Wronskien** *de cette famille de solutions la fonction W définie pour $t \in J$ par*

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_d(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_d'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(d-1)}(t) & y_2^{(d-1)}(t) & & y_d^{(d-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

La traduction de la propriété 3.6.8 pour le Wronskien d'une famille de solutions d'une équation scalaire homogène est alors la suivante.

Propriété 3.6.19 *On suppose que $b = 0$ (de manière équivalente, $B = 0$) et que $u_0, \dots, u_{d-1}$ sont d fonctions continues sur l'intervalle non vide J. Soit $y_1, \dots, y_d$ une famille de d solutions de* (3.49) *sur J. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *La famille $y_1, \dots, y_d$ est une base de l'espace des solutions de* (3.49) *sur J.*
2. *Pour tout $t \in J$, $W(t) \neq 0$.*
3. *Il existe $t_0 \in J$, $W(t_0) \neq 0$.*

De même, la traduction de la propriété 3.6.15 est la suivante

Propriété 3.6.20 (Formule de Liouville pour le Wronskien) *On suppose que $b = 0$ (de manière équivalente, $B = 0$) et que $u_0, \dots, u_{d-1}$ sont d fonctions continues sur l'intervalle non vide J. Soit $y_1, \dots, y_d$ une famille de d solutions de* (3.49) *sur J. Le Wronskien W de cette famille de solutions vérifie*

$$\forall t, t_0 \in J, \qquad W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} u_{d-1}(s)\mathrm{d}s\right).$$

3.6.5 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

On s'intéresse dans cette section au cas où la fonction $t \mapsto A(t)$ est en fait indépendante de t. Elle est en particulier continue sur tout intervalle ou $t \mapsto B(t)$ est continue. On va principalement s'intéresser à la résolution du système homogène (3.45) dans ce cas (le cas inhomogène se traitant ensuite par la méthode de Duhamel, par exemple, voir le théorème 3.6.17), et montrer comment on peut exprimer la matrice résolvante R à l'aide de l'exponentielle de la matrice A dans ce cas. Ensuite, nous indiquerons comment on peut calculer la résolvante lorsque la matrice A est diagonalisable, ou lorsqu'elle ne lest pas mais que l'on en connaît une matrice (semblable) réduite de Jordan.

Exponentielle d'une matrice

On munit toujours $\mathbb{K}^d$ de la norme euclidienne (ou hermitienne) usuelle, notée $\|\cdot\|$, et l'on munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ de la norme subordonnée, notée $|||\cdot|||$. Les espaces $\mathbb{K}^d$ et $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, munis de leur norme respective, sont complets. En particulier, les séries qui convergent absolument dans ces espaces y convergent, et les séries de fonctions à valeurs dans ces espaces qui convergent normalement convergent uniformément.

Propriété 3.6.21 *Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, on a*

$$|||AB||| \leq |||A||| \times |||B|||.$$

Corollaire 3.6.22 *Pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left|\left|\left|A^k\right|\right|\right| \leq |||A|||^k.$$

Définition 3.6.23 *Pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, la série de terme général $\left(\frac{A^k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge absolument dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. On note* $\exp(A) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ *sa somme, appelée* **exponentielle de la matrice** *A. Ainsi,*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. En utilisant le corollaire 3.6.22, on a facilement

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \left|\left|\left|\frac{A^k}{k!}\right|\right|\right| \leq \frac{|||A|||^k}{k!}.$$

Or la série de terme général $\left(\frac{|||A|||^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On en déduit que la série de terme général $\left(\frac{A^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. En particulier, elle converge, car $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ muni de la norme $|||\cdot|||$ est complet. ∎

Fixons $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et intéressons-nous à la série de puissances de terme général $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ défini pour $k \in \mathbb{N}$ par

$$a_k : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \\ t & \longrightarrow & \dfrac{(tA)^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

En posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = A^k/k!$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad , \forall t \in \mathbb{R}, \qquad a_k(t) = t^k \alpha_k.$$

Propriété 3.6.24 *Le rayon de la série de puissances de terme général a_k est infini. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la somme de la série de terme général $(a_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ est $\exp(tA)$. En particulier, la fonction $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\exp(tA) = A^p\exp(tA) = \exp(tA)A^p.$$

Preuve. Par la formule de Hadamard [13] (1.16), on sait que le rayon $R \in [0, +\infty]$ de la série de la série de puissances de terme général $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\frac{1}{R} = \mathrm{limsup}_{k\to+\infty} |||\alpha_k|||^{1/k}. \tag{3.50}$$

Ici, l'estimation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |||\alpha_k||| \leq \frac{|||A|||^k}{k!},$$

assure que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |||\alpha_k|||^{1/k} \leq \frac{|||A|||}{(k!)^{1/k}}.$$

Puisque

$$(k!)^{1/k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

on obtient que

$$\mathrm{limsup}_{k\to+\infty} |||\alpha_k|||^{1/k} = 0.$$

Utilisant (3.50), ceci implique que $R = +\infty$. Le fait que la somme de cette série de fonctions coïncide en t avec $\exp(tA)$ est conséquence de la définition de $\exp(tA)$. De plus, la série de puissances de terme général $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur les segments de $\mathbb{R}$, sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme sous le signe somme. ∎

On peut caractériser les couples de matrices pour lesquels la propriété de morphisme de l'exponentielle est valide sur la droite qu'elles engendrent.

Propriété 3.6.25 *Soit $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. On a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB), \tag{3.51}$$

si et seulement si

$$AB = BA. \tag{3.52}$$

Preuve. Dans le sens direct, si l'on suppose la relation (3.51), alors on peut dériver chaque terme par rapport à t pour obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (A+B)\exp(t(A+B)) = A\exp(tA)\exp(tB) + \exp(tA)\exp(tB)B.$$

Dérivant à nouveau cette relation, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(A+B)^2\exp(t(A+B)) = A^2\exp(tA)\exp(tB) + 2A\exp(tA)\exp(tB)B + \exp(tA)\exp(tB)B^2.$$

13. On dit parfois "formule de Cauchy-Hadamard" pour ce résultat. En effet, la formule a été découverte, montrée et publiée par Cauchy en 1821 [3], et elle est restée relativement ignorée. Elle a été redécouverte par Hadamard en 1888 [6], et est notamment incluse dans sa thèse [7] en 1892.

Évaluant cette relation en $t=0$, on conclut que

$$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2.$$

Ceci implique (3.52).
Dans le sens réciproque, constatons que

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \exp(t(A+B))=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}(A+B)^k.$$

Puisque A et B commutent par (3.52), on a

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad (A+B)^k=\sum_{\ell=0}^{k}\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}A^\ell B^{k-\ell}.$$

Par suite, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\exp(t(A+B)) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\sum_{\ell=0}^{k}\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}A^\ell B^{k-\ell}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{k}\left(\frac{t^\ell}{\ell!}A^\ell\right)\left(\frac{t^{k-\ell}}{(k-\ell)!}B^{k-\ell}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\exp(t(A+B))$ est la somme de la série dont le terme général est le produit de Cauchy de la série de terme général $((tA)^k/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ (de comme $\exp(tA)$) par la série de terme général $((tB)^k/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ (de somme $\exp(tB)$). Puisque ces trois séries convergent absolument, on en déduit (3.51). ■

Faisons maintenant le lien avec les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

Propriété 3.6.26 *Soit $A\in\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. La matrice résolvante R de l'équation différentielle*

$$Y'(t)=AY(t),\tag{3.53}$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a

$$\forall t,t_0\in\mathbb{R},\qquad R(t,t_0)=\exp\left((t-t_0)A\right).$$

Preuve. La fonction $t\mapsto A(t)$ est constante donc continue sur $\mathbb{R}$ et l'on peut appliquer les résultats de la section 3.6.2. En particulier, R est définie sur $\mathbb{R}^2$ et, par la propriété 3.6.12, pour tout $t_0\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto R(t,t_0)$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Z'(t) &= AZ(t)\\ Z(t_0) &= \mathrm{Id}\end{cases}.$$

Or, par la propriété 3.6.24 (avec $p=1$), il vient que la fonction $t\mapsto\exp((t-t_0)A)$ est solution de ce problème de Cauchy. L'unicité assure que cette fonction coïncide avec $t\mapsto R(t,t_0)$. ■

Propriété 3.6.27 *Si $A,B\in\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et $P\in\mathcal{GL}_d(\mathbb{K})$ sont telles que*

$$A=PBP^{-1},\tag{3.54}$$

alors

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \exp(tA)=P\exp(tB)P^{-1}.\tag{3.55}$$

Preuve. La relation de similitude (3.54) entre les matrices A et B implique

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A^k = PB^kP^{-1}.$$

Par suite, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{(tA)^k}{k!} = P\frac{(tB)^k}{k!}P^{-1}.$$

On en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{p} \frac{(tA)^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{(tB)^k}{k!}\right)P^{-1}.$$

Finalement, la continuité du produit de matrices dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ permet de passer à la limite quand p tend vers $+\infty$ pour obtenir (3.55). ■

La propriété précédente assure que, pour calculer l'exponentielle de la matrice A, il est suffisant de calculer celle d'une matrice semblable à A pour laquelle on connaît la relation de similitude, car alors les matrices exponentielles vérifient la même relation de similitude. En particulier, lorsque la matrice A est diagonalisable, on a la propriété suivante.

Propriété 3.6.28 *Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathcal{GL}_d(\mathbb{K})$ tels que*

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_d \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Dans ce cas,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \exp(tA) = P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{e}^{t\lambda_d} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Lorsque la A n'est pas diagonalisable, elle est (théoriquement : il n'y a pas d'algorithme de calcul) semblable à une matrice carrée B diagonale par blocs, dont chacun des blocs diagonaux est un bloc de Jordan : c'est le théorème de réduction de Jordan (qui suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Cette forme diagonale par blocs de B a une propriété intéressante : puisque les puissances de B sont diagonales par blocs également, chaque bloc de B^k étant la puissance k du bloc correspondant dans B, il vient par linéarité et passage à la limite que l'exponentielle de tB est diagonale par blocs, chaque bloc étant l'exponentielle de t fois le bloc correspondant dans B. Ainsi, il nous reste à décrire comment on calcule l'exponentielle de t fois un bloc de Jordan pour décrire un procédé systématique (sous réserve que l'on sache calculer une réduite de Jordan B de A) de l'exponentielle de tA.

Propriété 3.6.29 *Soit $\mathcal{J}$ une matrice carrée de taille $s \geq 2$ de la forme*

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \exp(t\mathcal{J}) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{s-1}/((s-1)!) \\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{s-2}/((s-2)!) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve. Remarquons que

$$\mathcal{J} = \lambda \mathrm{I_s} + N,$$

où N est la matrice nilpotente d'ordre s qui est nulle partout sauf sur sa premième sur diagonale, sur laquelle les coefficients valent 1. Puisque $\lambda \mathrm{I}_s$ et N commutent, la propriété 3.6.25 assure que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \exp(t\mathcal{J}) = \exp(t\lambda \mathrm{I}_s) \times \exp(tN).$$

Il reste à remarquer que, d'une part,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \exp(t\lambda \mathrm{I}_s) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{I}_s,$$

et d'autre part,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{s-1}/((s-1)!) \\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{s-2}/((s-2)!) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Exercice 3.6.30 *Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel*

$$\begin{cases} x'(t) &= & & y(t) & - & z(t) \\ y'(t) &= & x(t) & + & y(t) & \\ z'(t) &= & x(t) & & + & z(t) \end{cases}.$$

Exercice 3.6.31 (Calcul d'une transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^1$) *1. Montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-i\omega t}$ est absolument intégrable sur $]0, +\infty[$. On note pour $\omega \in \mathbb{R}$,*

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

2. Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad F'(\omega) = -\frac{1}{2}\frac{i+\omega}{1+\omega^2}F(\omega).$$

3. Justifier que $F(0) = \sqrt{\pi}$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 2.3.9.

4. En déduire que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+\omega^2)^{\frac{1}{4}}}\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\mathrm{Arctan}(\omega)}.$$

Exercice 3.6.32 *On note E l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles, b un nombre réel et a un nombre réel strictement positif.*

1. *Montrer que pour tout $f \in E$, il existe une unique fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles telle que*
$$\forall t \geq 0, \qquad g'(t) + ag(t) = f(t),$$
et $g(0) = b$.

2. *Soit $f \in E$ une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la fonction g correspondante est également absolument intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que l'on a*
$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

Chapitre 4

Fonctions d'une variable complexe

Ce chapitre est fortement inspiré du chapitre correspondant de [10].

4.1 Le plan complexe : $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ et les fonctions holomorphes sur un ouvert

4.1.1 Isomorphisme canonique et implications

On munit $\mathbb{C}$ du module usuel noté $|\cdot|$ et $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique notée $\|\cdot\|$, de sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|.$$

Propriété 4.1.1 *Les deux espaces $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension 2.*

Propriété 4.1.2 *L'application*

$$I : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x + iy \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. C'est de plus une isométrie.

Corollaire 4.1.3 *Via l'application I, on peut identifier*

— *les points de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{R}^2$,*

— *les boules ouvertes de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$:*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall r > 0, \qquad I\left(B((x, y), r[\right) = B(I(x, y), r[,$$

— *les topologies de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{R}^2$ (les parties ouvertes),*

— *les suites convergentes dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}^2$,*

— *les sommes d'éléments de $\mathbb{C}$ et les sommes d'éléments de $\mathbb{R}^2$,*

— *la multiplication par un réel d'un élément de $\mathbb{C}$ et la multiplication par un réel d'un élément de $\mathbb{R}^2$.*

En revanche, pour la loi $\times$ de $\mathbb{C}$, il n'y a pas d'identification triviale. Nous allons être un peu plus précis à ce sujet dans la section 4.1.2.

Corollaire 4.1.4 *Via l'application I, on peut également identifier les fonctions d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ avec les couples de fonctions de Ω (vu comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$) à valeurs réelles, en écrivant*

$$\forall z \in \Omega, \qquad f(z) = u(\Re(z), \Im(z)) + iv(\Re(z), \Im(z)), \tag{4.1}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, et en posant

$$\forall z \in \Omega, \qquad F : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

La section 4.1.2 s'intéresse au cas où f est une application $\mathbb{R}$-linéaire, qui correspond au cas où $F : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))^t$ est $\mathbb{R}$-linéaire. En particulier, on s'intéressera au cas où f est $\mathbb{C}$-linéaire (donc $\mathbb{R}$-linéaire).

4.1.2 Applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

Remarque 4.1.5 *Les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, isomorphe à l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels de taille 2×2 (en fixant une base, par exemple la base canonique $\mathbb{B}(\mathbb{R}^2)$ de $\mathbb{R}^2$). Nous utiliserons abondamment cette identification dans la suite.*

Définition 4.1.6 *On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (que l'on confond avec $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).*

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Propriété 4.1.7 *L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, dont une base est formée par les applications*

$$\varphi_1 : z \mapsto z, \qquad \varphi_2 : z \mapsto iz, \qquad \varphi_3 : z \mapsto \overline{z}, \qquad et \qquad \varphi_4 : z \mapsto i\overline{z}.$$

De plus, l'application

$$\Phi : \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ \varphi & \longmapsto & \begin{pmatrix} \Re(\varphi(1)) & \Re(\varphi(i)) \\ \Im(\varphi(1)) & \Im(\varphi(i)) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

est un isomophisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Cet isomorphisme permet d'identifier

$$\Phi(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(\varphi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad et \qquad \Phi(\varphi_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.1.8 *La correspondance (4.2) correspond à celle évoquée en (4.1) dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^2$, et $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.*

Remarque 4.1.9 *Remarquer que*

$$\det(\Phi(\varphi_1)) = \det(\Phi(\varphi_2)) = 1 \qquad et \qquad \det(\Phi(\varphi_3)) = \det(\Phi(\varphi_4)) = -1.$$

Ceci traduit la conservation de l'orientation par φ_1 et φ_2 et son inversion par φ_3 et φ_4.

Définition 4.1.10 *On note $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.*

Remarque 4.1.11 *Les éléments de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ sont les applications de la forme $z \mapsto az$, où $a \in \mathbb{C}$.*

Propriété 4.1.12 *L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ de dimension 2. De plus,*

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Preuve. Le fait que $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ est laissé en exercice. Montrons que $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ pour conclure la preuve. D'une part, $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, et d'autre part, si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = az.$$

En posant $\alpha = \Re(a)$ et $\beta = \Im(a)$, il vient que

$$f = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2.$$

Ainsi, on a $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$. Le fait que (φ_1, φ_2) forme une famille libre sur $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est également laissé en exercice. ■

Propriété 4.1.13 *Une application $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est $\mathbb{C}$-linéaire (au sens où il existe $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ tel que $L = \Phi(f)$) si et seulement si (la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de) L est de la forme*

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Preuve. Utilisant la propriété 4.1.12, il suffit de remarquer que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \Phi\left(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\right) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

■

4.1.3 Applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ou d'un ouvert de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: notions ponctuelles de différentiabilité et de $\mathbb{C}$-dérivabilité

Commençons par rappeler la définition et la propriété suivantes.

Définition 4.1.14 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et F une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) un point de Ω. La fonction F est dite* **différentiable en** (x_0, y_0) *lorsqu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in B((x_0, y_0), r[$,*

$$\|F(x,y) - F(x_0,y_0) - L\left[(x,y)^t - (x_0,y_0)^t\right]\| \leq \varepsilon \|(x,y)^t - (x_0,y_0)^t\|. \tag{4.4}$$

Remarque 4.1.15 *Avec les notations de Landau, ceci s'écrit encore, au voisinage de (x_0, y_0),*

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + L\left[(x,y)^t - (x_0,y_0)^t\right] + o\left(\|(x,y)^t - (x_0,y_0)^t\|\right).$$

La différentiabilité en un point est donc, par définition, l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Propriété 4.1.16 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et F une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$. On note u sa première composante et v sa seconde. Soit (x_0, y_0) un point de Ω. Si F est différentiable en (x_0, y_0), alors F est continue en (x_0, y_0). De plus, chaque composante de F admet une dérivée partielle par rapport à x et par rapport à y en (x_0, y_0), et l'application L dans (4.4) est unique, donnée par*

$$L = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

L'application L est appelée **différentielle de** F **en** (x_0, y_0). *On la note $dF_{(x_0,y_0)}$.*

Introduisons maintenant la définition

Définition 4.1.17 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit z_0 un point de Ω. La fonction f est dite* $\mathbb{C}$**-dérivable en** z_0 *lorsqu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in B(z_0, r_\varepsilon[$,*

$$|f(z) - f(z_0) - a(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|. \tag{4.5}$$

Propriété 4.1.18 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit z_0 un point de Ω. Si la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, alors le nombre a vérifiant* (4.5) *pour tout $\varepsilon > 0$ (et dans toute boule $B(z_0, r_\varepsilon[$ correspondante) est unique, appelé nombre dérivé de f en z_0, noté $f'(z_0)$.*

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 4.1.19 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit z_0 un point de Ω. Si la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, alors elle est continue en z_0.*

Preuve. Exercice. ∎

Comparant les définitions (4.4) et (4.5), et utilisant les propriétés 4.1.12 et 4.1.13, il vient que

Propriété 4.1.20 (Relations de Cauchy-Riemann) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ un point de Ω, et $F = (u, v)$ la fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$ correspondant à f via* (4.1)*. La fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si la fonction F est différentiable en (x_0, y_0) et vérifie*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{4.6}$$

Preuve. Il suffit de constater que f est dérivable en z_0 de nombre dérivé $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si F est différentiable en (x_0, y_0) et $dF_{(x_0,y_0)} = \Phi\,(z \mapsto az)$. En effet, d'une part, si f est dérivable en z_0 de nombre dérivé $a \in \mathbb{C}$, alors la fonction F correspondante par le corollaire 4.1.4 vérifie pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} &\|F(x,y) - F(x_0,y_0) - \Phi(a)\left[(x,y)^t - (x_0,y_0)^t\right]\| \\ &= \ |f(x+iy) - f(x_0+iy_0) - a[(x+iy) - (x_0+iy_0)]|. \end{aligned}$$

En particulier, F est différentiable en (x_0, y_0) et sa différentielle $\Phi(a)$ vérifie (4.6) par la propriété 4.1.13. Réciproquement, si F est différentiable en (x_0, y_0) et les relations (4.6) sont vérifiées, alors $dF_{(x_0,y_0)}$ est dans l'image par Φ de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ par la propriété 4.1.13. On en déduit que pour tout $z \in \Omega$,

$$\begin{aligned} &\left|f(z) - f(z_0) - \Phi^{-1}(dF_{(x_0,y_0)})[z - z_0]\right| \\ &= \ \left\|F(I^{-1}(z)) - F(I^{-1}(z_0)) - dF_{(x_0,y_0)}\left[I^{-1}(z) - I^{-1}(z_0)\right]\right\|. \end{aligned}$$

En particulier, f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, de nombre dérivé $a = \Phi^{-1}(dF_{(x_0,y_0)})$. ∎

Remarque 4.1.21 *Avec les notations de la propriété 4.1.20, lorsque la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$, on a*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),$$

comme on le constate aisément en examinant la preuve de la propriété 4.1.20 et, par exemple, la relation (4.3)*.*

On retrouve pour les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables en un point z_0 les propriétés usuelles des fonctions dérivables d'une variable réelle suivantes.

Propriété 4.1.22 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{C}$.*

- *Si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables en z_0, alors $z \mapsto \lambda f(z) + \mu g(z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et l'on a*

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0).$$

- *Si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables en z_0, alors $z \mapsto f(z) \times g(z)$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et l'on a*

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

- *Si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables en z_0 et $g(z_0) \neq 0$, alors $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ est définie dans un voisinage de z_0, et elle est de plus $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 avec*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Propriété 4.1.23 *Soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$, f une fonction de Ω_1 dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de Ω_2 dans $\mathbb{C}$. On suppose que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et que g est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_1 = f(z_0)$. Alors la fonction $z \mapsto g \circ f(z)$ est définie au voisinage de z_0 et elle est de plus $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 avec*

$$(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \times (g' \circ f)(z_0).$$

4.1.4 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Définition 4.1.24 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit que la fonction f est* **holomorphe sur l'ouvert** Ω *lorsque f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z_0 \in \Omega$. On note $H(\Omega)$ (ou $H(\Omega, \mathbb{C})$) l'ensemble des applications holomorphes de Ω dans $\mathbb{C}$.*

Définition 4.1.25 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega)$. On appelle* **fonction dérivée** *de f (ou plus simplement* **dérivée** *de f) la fonction*

$$f' : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f'(z) \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.1.26 *Si f' est elle-même holomorphe sur Ω, on définit la dérivée seconde de f comme pour les fonctions d'une variable réelle. Il en va de même pour toutes les dérivées successives de f. On les note $f^{(k)}$ pour $k \geq 1$.*

Propriété 4.1.27 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$. On note $F = (u, v)^t$ la fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$ correspondante par le corollaire 4.1.4. La fonction f est holomorphe sur Ω si et seulement si la fonction F est différentiable sur Ω et l'on a*

$$\forall (x, y) \in \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Preuve. Il suffit de globaliser la preuve de la propriété 4.1.20. ∎

Remarque 4.1.28 *Les propriétés ponctuelles 4.1.22 et 4.1.23 se globalisent également à des ouverts tout entiers.*

Donnons maintenant quelques premiers exemples de fonctions holomorphes (ou non) sur des ouverts de $\mathbb{C}$.

Propriété 4.1.29 *La fonction*

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z \end{pmatrix},$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée constante égale à 1.

Preuve. Exercice. ∎

Corollaire 4.1.30 *Toute fonction rationnelle $f = p/q$ avec $p \in \mathbb{C}[X]$, $q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $p \wedge q = 1$*[1] *est holomorphe sur l'ouvert*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad q(z) \neq 0\}.$$

Preuve. Exercice (en utilisant éventuellement la remarque 4.1.28). ∎

Exercice 4.1.31 1. *Montrer que la fonction*

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \Re(z) \end{pmatrix},$$

n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

2. *Montrer que la fonction*

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & |z|^2 \end{pmatrix},$$

n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors que la fonction F correspondante par le corollaire 4.1.4 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

4.2 Les sommes de séries de puissances sont holomorphes

Théorème 4.2.1 *Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes telle que le rayon R de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positif (c'est-à-dire que $R \in]0, +\infty]$). Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la fonction*

$$f : \begin{pmatrix} B(z_0, R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \end{pmatrix},$$

est holomorphe sur $B(z_0, R[$. De plus, sa dérivée est la série de puissances dérivée formelle définie à la définition 1.5.23.

---

1. Ici, $p \wedge q$ dénote le PGCD de p et q dans l'anneau principal $\mathbb{C}[X]$. Le fait que $p \wedge q = 1$ signifie que p et q sont premiers entre eux. Par le théorème fondamental de l'algèbre 4.4.25, ceci est équivalent au fait que p et q n'ont pas de racine (complexe) commune. Cette condition de primalité n'est pas nécessaire pour que le corollaire soit vrai, mais elle permet de définir $f = p/q$ sur le plus grand ouvert possible.

Preuve. Par la propriété 1.5.9, la fonction f est bien définie sur $B(z_0, R[$. De plus, par la propriété 1.5.24, le rayon de la série de puissances de terme général $\left(z \mapsto nc_n(z-z_0)^{n-1}\right)_{n\geq 1}$ est également R. Considérons $\tilde{R} \in]0, R[$ (de sorte que $\tilde{R}$ est fini). Fixons $z \in B(z_0, \tilde{R}[$ et choisissons $\rho > 0$ tel que $B(z, \rho[\subset B(z_0, \tilde{R}[$. Pour tout $y \in B(z, \rho[$ tel que $y \neq z$, calculons

$$\begin{aligned}
&\frac{f(y)-f(z)}{y-z} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(\frac{(y-z_0)^n - (z-z_0)^n}{y-z} - n(z-z_0)^{n-1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(\frac{(y-z_0)^n - (z-z_0)^n}{(y-z_0)-(z-z_0)} - n(z-z_0)^{n-1} \right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Observons que, lorsque $n = 1$, le terme dans la somme de (4.7) est nul. De plus, pour tout $n \geq 2$, lorsque de plus $y \neq z_0$, on a en utilisant les propriétés des progressions géométriques

$$\begin{aligned}
\frac{(y-z_0)^n - (z-z_0)^n}{(y-z_0)-(z-z_0)} &= \left((y-z_0)^{n-1}\right) \times \frac{1-\left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)^n}{1-\left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)} \\
&= \left((y-z_0)^{n-1}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (z-z_0)^k (y-z_0)^{n-1-k}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{(y-z_0)^n - (z-z_0)^n}{(y-z_0)-(z-z_0)} = \sum_{k=0}^{n-1} (z-z_0)^k (y-z_0)^{n-1-k},$$

et cette égalité est encore vraie lorsque $y = z_0$. Par suite, on a pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&\frac{(y-z_0)^n - (z-z_0)^n}{(y-z_0)-(z-z_0)} - n(z-z_0)^{n-1} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n-1} (z-z_0)^k (y-z_0)^{n-1-k} - n(z-z_0)^{n-1} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)-k)(z-z_0)^k (y-z_0)^{n-1-k} - n(z-z_0)^{n-1} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(z-z_0)^k (y-z_0)^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} k(z-z_0)^k (y-z_0)^{n-1-k} - n(z-z_0)^{n-1} \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n-1} k(z-z_0)^{(k-1)} (y-z_0)^{n-1-(k-1)} - \sum_{k=1}^{n-1} k(z-z_0)^k (y-z_0)^{n-1-k} \\
= \quad & (y-z_0) \sum_{k=1}^{n-1} k(z-z_0)^{k-1} (y-z_0)^{n-1-k} - (z-z_0) \sum_{k=1}^{n-1} k(z-z_0)^{k-1} (y-z_0)^{n-1-k} \\
= \quad & (y-z) \sum_{k=1}^{n-1} k(z-z_0)^{k-1} (y-z_0)^{n-1-k}.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
&\left| c_n \left(\frac{(y-z_0)^n - (z-z_0)^n}{(y-z_0)-(z-z_0)} - n(z-z_0)^{n-1} \right) \right| \\
\leq \quad & |c_n||y-z| \sum_{k=1}^{n-1} k|z-z_0|^{k-1}|y-z_0|^{n-1-k} \\
\leq \quad & |c_n||y-z| \sum_{k=1}^{n-1} k \underbrace{\tilde{R}^{k-1}\rho^{n-1-k}}_{\leq \tilde{R}^{n-2}} \\
\leq \quad & |c_n||y-z| \frac{n(n-1)}{2} \tilde{R}^{n-2}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Puisque le rayon de la série de puissances $(\omega \mapsto c_n n^2 \omega^{n-2})_{n \geq 2}$ est également égal à R (par la propriété 1.5.24), et puisque $\tilde{R} < R$, la série de terme général positif $(|c_n|\tilde{R}^{n-2}n(n-1)/2)_{n \geq 2}$ converge vers un certain $C \geq 0$. En rassemblant (4.7) et (4.8), on obtient que pour tout $y \in B(z_0, \rho[\setminus\{z\}$, on a

$$\left| \frac{f(y)-f(z)}{y-z} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} \right| \leq C|y-z|.$$

En particulier, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z et l'on a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Ceci valant pour tout $z \in B(z_0, \tilde{R}[$, il vient que f est holomorphe sur $B(z_0, \tilde{R}[$ et sa dérivée est bien la somme de la série de puissance dérivée formelle en chaque point de $B(z_0, \tilde{R}[$. Ceci valant pour tout $\tilde{R} \in]0, R[$, le résultat suit. ■

Remarque 4.2.2 *Le théorème précédent assure que la somme d'une série de puissances est holomorphe* <u>*sur son disque ouvert de convergence*</u>*. Il ne dit en revanche rien de ce qui se passe sur le bord du disque. En un tel point, la notion de $\mathbb{C}$-dérivabilité est de toute façon bien limitée, car on ne peut pas "venir" vers un point du bord du disque dans n'importe quelle direction en restant dans le disque (on n'est plus dans le cas d'un point dans un ouvert sur lequel la fonction est définie).*

Corollaire 4.2.3 *Sous les hypothèses du théorème précédent 4.2.1, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable à tout ordre et chacune de ses dérivées est la somme de la dérivée formelle correspondante :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in B(z_0, R[, \qquad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!}(z-z_0)^{n-k}.$$

Preuve. Exercice, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^\star$. L'initialisation comme l'hérédité viennent directement du théorème 4.2.1. ■

Remarque 4.2.4 *Bien sûr, comme dans le cas des séries de puissances d'une variable réelle (remarque 1.5.27 et corollaire 1.5.26), il y a unicité dans les coefficients d'une série de puissances d'une variable complexe : la formule* (1.18) *est également vraie pour les sommes de séries de puissances d'une variable complexe.*

4.3 Les fonctions holomorphes sont développables en séries de puissances

Le but de cette section est d'obtenir une forme de réciproque du théorème 4.2.1. Pour cela, nous allons commencer par un lemme (lemme 4.3.1) qui donne une condition suffisante pour qu'une certaine intégrale à paramètre soit somme d'une série de puissances dans un certain ouvert. Ensuite, nous définirons l'intégrale d'une fonction (continue) le long d'un chemin, pour ensuite montrer une formule de représentation comme une intégrale à paramètre valable pour les fonctions holomorphes sur un ouvert (formule de Cauchy du théorème 4.3.62). On pourra alors appliquer le lemme initial pour en déduire qu'une fonction holomorphe est développable en série de puissances (voir le théorème 4.3.63 pour un énoncé précis).

4.3.1 Une condition suffisante pour être somme d'une série de puissances

Lemme 4.3.1 *Soit $a < b$ deux nombres réels et φ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs complexes. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ qui n'intersecte pas l'image de φ, c'est-à-dire tel que $\varphi([a,b]) \cap \Omega = \emptyset$. Soit m une autre fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs complexes. La fonction*

$$f : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \int_a^b \frac{m(s)}{\varphi(s)-z} \mathrm{d}s \end{pmatrix},$$

est développable en série de puissances en tout point de Ω. Cela veut dire que pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $B(z_0, r[\subset \Omega$, il existe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supérieur ou égal à r et l'on a

$$\forall z \in B(z_0, r[, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n. \tag{4.9}$$

Remarque 4.3.2 *Utilisant le résultat de la remarque 4.2.4, on constate que, dans ce cas, la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dépend a priori de* $z_0 \in \Omega$ *mais ne dépend pas de* $r > 0$ *tel que* $B(z_0, r[\subset \Omega$*. Ainsi, dans ce cas, la fonction* f *vérifie en fait que pour tout* $z_0 \in \Omega$*, il existe* $(c_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $r > 0$ *tel que* $B(z_0, r[\subset \Omega$*, le rayon de la série de puissances de terme général* $(z \mapsto c_n(z_0)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est supérieur ou égal à* r *et l'on a* (4.34). *Dans le cas du lemme, les coefficients* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* (4.34) *sont donnés par la formule* (4.13).

Preuve. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(z_0, r[\subset \Omega$. Par hypothèse, on a

$$\forall s \in [a, b], \qquad \varphi(s) \notin B(z_0, r[,$$

c'est-à-dire

$$\forall s \in [a, b], \qquad |\varphi(s) - z_0| \geq r.$$

En particulier, la fonction $s \mapsto \varphi(s) - z_0$ ne s'annule pas sur le segment $[a, b]$ et l'on a

$$\forall z \in B(z_0, r[, \quad \forall s \in [a, b], \qquad \left|\frac{z - z_0}{\varphi(s) - z_0}\right| \leq \frac{|z - z_0|}{r} < 1. \tag{4.10}$$

Fixons $z \in B(z_0, r[$ et observons qu'alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{s\in[a,b]} \left|\left(\frac{z - z_0}{\varphi(s) - z_0}\right)^n\right| \leq \frac{|z - z_0|^n}{r^n}.$$

Puisque $|z - z_0|/r < 1$, ceci implique la convergence normale de la série de fonctions de terme général $(s \mapsto (z - z_0)^n/(\varphi(s) - z_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le segment $[a, b]$. Puisque la fonction $s \mapsto 1/(\varphi(s) - z_0)$ est bornée (par $1/r$) sur le segment $[a, b]$, il vient que la série de fonctions de terme général $(s \mapsto (z - z_0)^n/(\varphi(s) - z_0)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est également normalement convergente sur le segment $[a, b]$. Or, la somme de cette série s'exprime simplement car ses termes sont en progression géométrique de raison de module strictement inférieur à 1 : pour $s \in [a, b]$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{(z - z_0)^n}{(\varphi(s) - z_0)^{n+1}} &= \frac{1}{\varphi(s) - z_0} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z - z_0}{\varphi(s) - z_0}\right)^n \\
&= \frac{1}{\varphi(s) - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\varphi(s)-z_0}} - \frac{\left(\frac{z-z_0}{\varphi(s)-z_0}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z-z_0}{\varphi(s)-z_0}}\right).
\end{aligned}$$

Utilisant (4.10), il vient que pour tout $s \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\varphi(s) - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{\varphi(s) - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\varphi(s)-z_0}} &= \frac{1}{\varphi(s) - z_0} \frac{\varphi(s) - z_0}{\varphi(s) - z_0 - (z - z_0)} \\
&= \frac{1}{\varphi(s) - z_0} \frac{\varphi(s) - z_0}{\varphi(s) - z} \\
&= \frac{1}{\varphi(s) - z}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Comme précédemment, puisque la fonction m est bornée sur le segment $[a, b]$ (car elle est continue par morceaux sur ce segment), ce qui précède implique que la série de fonctions de terme général

$$u_n : \begin{pmatrix} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & m(s)\frac{(z-z_0)^n}{(\varphi(s)-z_0)^{n+1}} \end{pmatrix},$$

est normalement convergente sur le segment $[a,b]$. De plus, le calcul mené en (4.11) assure que sa somme S est donnée par

$$\forall s \in [a,b], \qquad S(s) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(s) = \frac{m(s)}{\varphi(s)-z}. \tag{4.12}$$

Puisque les fonctions m et φ sont continues par morceaux sur $[a,b]$, et puisque la fonction $s \mapsto \varphi(s)-z_0$ ne s'annule pas sur ce segment, chacune des fonctions u_n est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. En particulier, chacune des fonctions u_n est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$. De plus, la série de fonctions de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[a,b]$. Le théorème 1.4.7 assure alors que la somme S est une fonction Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ (ici, c'est même une fonction continue par morceaux, comme le montre le calcul mené en (4.12)), que la série complexe de terme général $\left(\int_a^b u_n(s)\mathrm{d}s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et que la somme de cette série est le nombre complexe $\int_a^b S(s)\mathrm{d}s$. Observons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_a^b u_n(s)\mathrm{d}s = \left(\int_a^b \frac{m(s)}{(\varphi(s)-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}s\right)(z-z_0)^n.$$

Ainsi, la série dont le terme général est donné par le membre de droite dans l'égalité ci-dessus converge et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b \frac{m(s)}{(\varphi(s)-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}s\right)(z-z_0)^n = \int_a^b \frac{m(s)}{\varphi(s)-z}\mathrm{d}s. \tag{4.13}$$

Ceci valant quel que soit $z \in B(z_0, r[$, il vient en utilisant la caractérisation du rayon de convergence donnée par la propriété 1.5.9 que le rayon de la série de puissances de terme général $\left(z \mapsto \left(\int_a^b \frac{m(s)}{(\varphi(s)-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}s\right)(z-z_0)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins égal à r. On déduit le résultat. ∎

4.3.2 Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin

Définition 4.3.3 *On appelle* **chemin** *toute application γ, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un segment $[a,b]$ (avec $a<b$) à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit de plus que le chemin γ est* **fermé** *lorsque $\gamma(a)=\gamma(b)$.*

Remarque 4.3.4 *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une application. Si $a<b$, alors dire que γ est un chemin signifie que γ est continue sur $[a,b]$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $p+1$ nombres réels $s_0 < s_1 < \cdots < s_p$ tels que $s_0 = a$ et $s_p = b$ tels que pour tout $k \in \{0,\ldots,p-1\}$, la fonction γ restreinte à $]s_k, s_{k+1}[$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à $[s_k, s_{k+1}]$ (puisque γ est continue sur $[a,b]$, le prolongement $\mathcal{C}^1$ vaut donc nécessairement $\gamma(s_k)$ en s_k et $\gamma(s_{k+1})$ en s_{k+1}, de plus, $\gamma'_{\mathrm{d}}(s_k)$ et $\gamma'_{\mathrm{g}}(s_{k+1})$ existent, mais il est possible que $\gamma'_{\mathrm{g}}(s_k) \neq \gamma'_{\mathrm{d}}(s_k)$ pour un certain $k \in \{1,\ldots,p-1\}$).*

Propriété 4.3.5 *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, alors la fonction γ' est définie sur $[a,b]$ privé d'un nombre fini de points. On peut poser arbitrairement $\gamma'(s_k) = 0$ en ces points, et la fonction obtenue est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ (quelles que soient les valeurs choisies aux points s_k, d'ailleurs). En particulier, la fonction γ' (ainsi prolongée) est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$. Le choix de la valeur de γ' aux points s_k ne change pas la valeur des intégrales de γ' sur tout segment inclus dans $[a,b]$.*

Preuve. Exercice. ∎

Définition 4.3.6 *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. On appelle* **longueur de** γ *le nombre réel positif*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(s)|\mathrm{d}s.$$

Définition 4.3.7 *Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin. On appelle* **image de** γ*, ou parfois* **support de** γ*, l'ensemble*

$$\gamma^\star = \{\gamma(s) \mid s \in [a,b]\}.$$

Définition 4.3.8 *Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin et $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que le chemin γ est* **tracé dans** Ω *lorsque $\gamma^\star \subset \Omega$.*

Propriété 4.3.9 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin tracé dans Ω. L'image $\gamma^\star$ de γ est un compact de $\mathbb{C}$ inclus dans Ω.*

Définition 4.3.10 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin tracé dans Ω. Soit $f : \gamma^\star \to \mathbb{C}$ une fonction continue. La fonction $s \mapsto f(\gamma(s)) \times \gamma'(s)$ est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ (voir la propriété 4.3.5). On appelle* **intégrale de f le long de** γ *le nombre complexe*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\mathrm{d}s.$$

Propriété 4.3.11 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin tracé dans Ω. L'application*

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{C}^0(\gamma^\star, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty,\gamma^\star}) & \longrightarrow & (\mathbb{C}, |\cdot|) \\ f & \longmapsto & \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \end{pmatrix},$$

est une forme linéaire continue sur $\big(\mathcal{C}^0(\gamma^\star, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty,\gamma^\star}\big)$. Elle vérifie en particulier

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\gamma^\star, \mathbb{C}), \qquad \left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma)\|f\|_{\infty,\gamma^\star}. \tag{4.14}$$

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 4.3.12 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin tracé dans Ω. On appelle* **changement de paramétrage admissible** *toute bijection φ (strictement) croissante de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$. Notons $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. La fonction $\tilde{\gamma}$ est un chemin tracé dans Ω. Il partage avec γ les propriétés suivantes : d'une part il a même image que γ (i.e. $(\tilde{\gamma})^\star = \gamma^\star$), et donc on peut intégrer les mêmes fonctions le long de γ que le long de $\tilde{\gamma}$; d'autre part, les intégrales le long de γ et le long de $\tilde{\gamma}$ sont égales au sens où*

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\gamma^\star, \mathbb{C}), \qquad \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z.$$

Preuve. Le fait que $\tilde{\gamma}$ est un chemin tracé dans Ω et que $(\tilde{\gamma})^\star = \gamma^\star$ est laissé en exercice. Observons que la fonction $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[\alpha,\beta]$, vérifie sur $[\alpha,\beta]$ privé d'un nombre fini de points

$$(\tilde{\gamma})'(s) = (\gamma \circ \varphi)'(s) = \gamma' \circ \varphi(s) \times \varphi'(s),$$

et cette fonction dérivée (prolongée par 0 aux points où $\gamma'(\varphi(s))$ n'est pas défini) est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Ainsi, on peut écrire, à l'aide du théorème de changement de variable de CDI1,

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(s))(\tilde{\gamma})'(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(s)))\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

■

Propriété 4.3.13 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Si $\gamma : [a,b] \to \Omega$ est un chemin tracé dans Ω, alors il existe un changement de paramétrage admissible φ de $[0,1]$ dans $[a,b]$ tel que $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ est paramétré par $[0,1]$.*

Preuve. On rappelle que, puisque γ est un chemin tracé dans Ω, on a $a < b$. On peut alors considérer la fonction

$$\varphi : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ s & \longmapsto & sb + (1-s)a \end{pmatrix},$$

qui répond à la question. ■

Définition 4.3.14 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \Omega$ deux chemins tracés dans Ω tels que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. On peut toujours reparamétrer (en utilisant un changement de paramétrage admissible) le chemin γ_2 pour se ramener au cas où $a_2 = b_1$. On appelle alors* **somme de γ_1 et γ_2** *l'application*

$$\gamma_1 + \gamma_2 : \begin{pmatrix} [a_1,b_2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \begin{cases} \gamma_1(s) & \text{si } s \leq b_1 \\ \gamma_2(s) & \text{si } s \geq a_2 \end{cases} \end{pmatrix}.$$

L'application $\gamma_1 + \gamma_2$ est un chemin tracé dans Ω.

Preuve. Exercice. ■

Remarque 4.3.15 *On peut réitérer le procédé et sommer un nombre fini de chemins tracés dans un ouvert pour former un nouveau chemin tracé dans l'ouvert, pourvu que l'extrémité droite de chaque chemin corresponde à l'extrémité gauche du chemin suivant.*

Propriété 4.3.16 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin tracé dans Ω. On appelle* **chemin renversé** *associé à γ l'application*

$$\gamma^- : \begin{pmatrix} [a,b] & \longrightarrow & \Omega \\ t & \longmapsto & \gamma(a+b-t) \end{pmatrix}.$$

C'est un chemin tracé dans Ω. Il a même image que γ : $(\gamma^-)^\star = \gamma^\star$. De plus, pour toute fonction f continue sur $\gamma^\star$ à valeurs complexes, on a

$$\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

Preuve. Exercice. ■

Exemple 4.3.17 *Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On appelle* **cercle de centre a et de rayon r orienté positivement** *le chemin*

$$C^+(a,r] : \begin{pmatrix} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & a + r\mathrm{e}^{it} \end{pmatrix}.$$

C'est un chemin fermé tracé dans $\mathbb{C}$. On a alors, pour toute fonction f continue sur $C^+(a,r]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$,

$$\int_{C^+(a,r]} f(z)\mathrm{d}z = ir\int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{is})\mathrm{e}^{is}\mathrm{d}s.$$

De plus, on a

$$L\left(C^+(a,r]\right) = \int_0^{2\pi} |ir\mathrm{e}^{it}| = 2\pi r.$$

Exemple 4.3.18 *Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On appelle* **segment orienté de a à b** *le chemin*

$$\gamma : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & a + s(b-a) \end{pmatrix}.$$

On a alors, pour toute fonction f continue sur $\gamma^\star$,

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = (b-a)\int_0^1 f(a + s(b-a))\mathrm{d}s.$$

De plus,

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(s)|\mathrm{d}s = \int_0^1 |b-a|\mathrm{d}s = |b-a|.$$

Remarque 4.3.19 *On note parfois $[a \to b]$ le segment orienté de a à b.*

Exemple 4.3.20 *Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On appelle triangle de sommets a, b et c l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{a, b, c\}$. On note $\Delta(a,b,c)$ ce triangle (ou parfois Δ quand il n'y a pas d'ambiguité). On note $\partial\Delta(a,b,c)$ (ou $\partial\Delta$) son bord. Il est remarquable que le bord de ce triangle est le support d'un chemin fermé tracé dans $\mathbb{C}$ comme on le décrit maintenant. On appelle bord orienté $[a \to b \to c]$ la somme (au sens de la définition 4.3.14) du segment orienté de a à b, du segment orienté de b à c et du segment orienté de c à a. Remarquons que l'on a $\partial\Delta = [a \to b \to c]^\star$ De plus, pour toute fonction continue f sur $[a \to b \to c]^\star$,*

$$\int_{[a\to b\to c]} f(z)\mathrm{d}z = \int_{[a\to b]} f(z)\mathrm{d}z + \int_{[b\to c]} f(z)\mathrm{d}z + \int_{[c\to a]} f(z)\mathrm{d}z.$$

Remarque 4.3.21 *Lorsque l'orientation est claire, ou qu'elle importe peu, on abusera un peu des notations et l'on notera $\partial\Delta$ pour désigner le chemin $[a \to b \to c]$, alors que, stricto sensu, $\partial\Delta$ correspond à l'image $[a \to b \to c]^\star$ du chemin.*

4.3.3 Connexité et convexité dans le plan complexe

Le contenu [2] de cette section s'applique autant à $\mathbb{C}$ qu'à $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.3.22 *Une partie E de $\mathbb{C}$ est dite* **non connexe** *s'il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ tels que*

$$E \subset U \cup V, \qquad E \cap U \neq \emptyset, \qquad E \cap V \neq \emptyset, \qquad \text{et} \qquad E \cap U \cap V = \emptyset. \tag{4.15}$$

L'ensemble E est dit **connexe** *dans le cas contraire.*

Remarque 4.3.23 *La non connexité de E signifie qu'il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ tels que l'on peut "ranger" tous les points de E dans ces deux ouverts (car $E \subset U \cup V$), de manière non triviale (il y a au moins un point de E dans U car $E \cap U \neq \emptyset$ et au moins un point de E dans V car $E \cap V \neq \emptyset$), et de telle sorte qu'aucun point de E n'est à la fois dans U et dans V (car $E \cap U \cap V = \emptyset$).*

Remarque 4.3.24 *En travaillant avec $U' = E \cap U$ et $V' = E \cap V$, la non connexité de la partie E revient à dire que E est la réunion de deux ouverts (relatifs, au sens de la définition 1.1.42) non vides disjoints. En effet, les conditions* (4.15) *s'écrivent alors*

$$E = U' \cup V', \qquad U' \neq \emptyset, \qquad V' \neq \emptyset, \qquad \text{et} \qquad U' \cap V' = \emptyset. \tag{4.16}$$

Ainsi, une partie E est non-connexe lorsque l'on peut la partitionner en deux ouverts (relatifs). Elle est connexe dans le cas contraire, et intuitivement, "en un seul morceau".

Exemple 4.3.25 *Notons d une droite de $\mathbb{C}$. Considérons $E = \mathbb{C} \backslash d$. L'ensemble E est non connexe.*

Définition 4.3.26 *Une partie E de $\mathbb{C}$ est dite* **convexe** *lorsque*

$$\forall (a, b) \in E^2, \qquad [a \to b]^\star \subset E.$$

Ceci signifie que, quel que soit le couple de points de E, la partie E contient l'image du segment orienté liant ces deux points (ici, l'orientation n'importe pas).

Propriété 4.3.27 *Les parties convexes de E sont connexes.*

Preuve. Soit E une partie convexe de $\mathbb{C}$. Supposons par l'absurde qu'elle n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ vérifiant (4.15). On peut ainsi trouver $u \in E \cap U$ et $v \in E \cap V$, et considérer le chemin

$$\gamma : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & tv + (1-t)u \end{pmatrix}.$$

Puisque E est convexe et contient u et v, l'image $\gamma^\star$ de γ est incluse dans E. De plus, l'application γ est continue sur le segment $[0, 1]$. Ainsi, $\gamma^{-1}(E \cap U)$ est un ouvert (relatif) de $[0, 1]$ contenant 0 (car $\gamma(0) = u \in E \cap U$). De même, $\gamma^{-1}(E \cap V)$ est un ouvert (relatif) de $[0, 1]$ contenant 1 (car $\gamma(1) = v \in E \cap V$). Observons que, puisque $E \cap U$ et $E \cap V$ sont disjoints (par (4.15)), les ouverts

2. Pour la partie connexité, il fonctionnerait dans n'importe quel espace topologique ; pour la partie convexité (sauf peut-être ce qui concerne les boules), il fonctionnerait dans n'importe quel espace vectoriel réel topologique, mais cela nous entraînerait bien loin des besoins de ce syllabus.

$\gamma^{-1}(E \cap U)$ et $\gamma^{-1}(E \cap V)$ de $[0,1]$ le sont également. En particulier, la partie $\gamma^{-1}(E \cap U)$ de $[0,1]$ est non vide (elle contient 0), et majorée par 1. On peut donc définir

$$t_0 = \sup \gamma^{-1}(E \cap U). \tag{4.17}$$

Par construction, $t_0 \leq 1$. Et de plus, puisque $\gamma^{-1}(E \cap U)$ est un ouvert de $[0,1]$ contenant 0, on a $t_0 > 0$, de sorte que $t_0 \in]0,1]$. Si $t_0 = 1$, alors $t_0 \in \gamma^{-1}(E \cap V)$. Puisque ce dernier est ouvert, il contient un certain $]1-\delta, 1]$ (pour un certain $\delta > 0$ suffisamment petit). Ceci interdit que $t_0 = 1$ soit limite à gauche d'une suite de points de $\gamma^{-1}(E \cap U)$ puisque les deux ouverts $\gamma^{-1}(E \cap U)$ et $\gamma^{-1}(E \cap V)$ sont disjoints. On a donc une contradiction. Ceci impose que $t_0 \in]0,1[$. Montrons que l'on a également une contradiction dans ce cas. Observons que, puisque $E \cap U$ et $E \cap V$ recouvrent E par (4.15), et puisque $\gamma([0,1]) \subset E$ par convexité de E, les ouverts $\gamma^{-1}(E \cap U)$ et $\gamma^{-1}(E \cap V)$ recouvrent le segment $[0,1]$. On a donc soit $t_0 \in \gamma^{-1}(E \cap U)$, soit $t_0 \in \gamma^{-1}(E \cap V)$. Si $t_0 \in \gamma^{-1}(E \cap U)$, alors (puisque $t_0 \in]0,1[$ et puisque $\gamma^{-1}(E \cap U)$ est un ouvert de $[0,1]$), il existe un $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset \gamma^{-1}(E \cap U)$. Ceci contredit la définition (4.17) de t_0. On en déduit que $t_0 \in \gamma^{-1}(E \cap V)$. Mais dans ce cas, puisque $t_0 \in]0,1[$ et puisque $\gamma^{-1}(E \cap V)$ est un ouvert de $[0,1]$, il existe un $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset \gamma^{-1}(E \cap V)$. Ceci interdit que t_0 soit limite à gauche d'une suite de points de $\gamma^{-1}(E \cap U)$ car les ouverts $\gamma^{-1}(E \cap U)$ et $\gamma^{-1}(E \cap V)$ sont disjoints, et on a donc finalement une contradiction. On en déduit que E est nécessairement connexe. ■

Corollaire 4.3.28 *Toute boule de $\mathbb{C}$ est convexe, donc connexe.*

Preuve. Exercice. ■

Lorsque E est elle-même une partie ouverte, on a la caractérisation suivante de la non connexité.

Propriété 4.3.29 *Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ouvert. La partie E est non connexe si et seulement s'il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ tels que*

$$E = U \cup V, \qquad U \neq \emptyset, \qquad V \neq \emptyset, \qquad \textit{et} \qquad U \cap V = \emptyset. \tag{4.18}$$

Preuve. Exercice. ■

Remarque 4.3.30 *On pourra comparer les caractérisation de non connexité* (4.16) *et* (4.18)*. Dans la première, U' et V' sont des ouverts relatifs de E, c'est-à-dire la trace sur E d'ouverts de $\mathbb{C}$. Dans la seconde, U et V sont des ouverts de $\mathbb{C}$ (et la partie E est donc nécessairement ouverte elle-même).*

Propriété 4.3.31 *Soit $E \subset \mathbb{C}$ et $x \in E$. Soit $I \neq \emptyset$ et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de $\mathbb{C}$, incluses dans E, contenant x. Alors $\cup_{i \in I} F_i$ est une partie connexe de $\mathbb{C}$, incluse dans E, contenant x.*

Preuve. Il est clair que la partie $\cup_{i \in I} F_i$ est incluse dans E. Puisque $I \neq \emptyset$, il existe $i_0 \in I$. Puisque F_{i_0} contient x, il vient que $\cup_{i \in I} F_i$ contient x. Il reste à montrer que $\mathcal{F} = \cup_{i \in I} F_i$ est une partie connexe de $\mathbb{C}$. Pour cela, supposons par l'absurde qu'elle n'est pas connexe. Ainsi, il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ tels que

$$\mathcal{F} \subset U \cup V, \qquad \mathcal{F} \cap U \neq \emptyset, \qquad \mathcal{F} \cap V \neq \emptyset, \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F} \cap U \cap V = \emptyset.$$

Puisque $x \in \mathcal{F} \subset U \cup V$, on a soit $x \in U$, soit $x \in V$. On suppose dans la suite de cette preuve que $x \in U$ et on laisse le cas $x \in V$ en exercice (les arguments sont les mêmes). Puisque $\mathcal{F} \cap V \neq \emptyset$, il existe $x_1 \in \mathcal{F} \cap V$. En particulier il existe donc $i_1 \in I$ tel que $F_{i_1} \cap V \neq \emptyset$. De plus, F_{i_1} contient x par hypothèse et $x \in U$, donc $F_{i_1} \cap U \neq \emptyset$. Pour la partie F_{i_1}, on a donc

$$F_{i_1} \subset U \cup V, \qquad F_{i_1} \cap U \neq \emptyset, \qquad F_{i_1} \cap V \neq \emptyset, \qquad \text{et} \qquad F_{i_1} \cap U \cap V \subset \mathcal{F} \cap U \cap V = \emptyset.$$

Ceci implique que F_{i_1} n'est pas connexe. On a donc une contradiction. On en déduit que $\mathcal{F}$ est connexe. ■

Définition 4.3.32 *Soit $E \subset \mathbb{C}$ et $x \in E$. La réunion des parties connexes de $\mathbb{C}$ contenant x et incluses dans E est appelée* **composante connexe de x dans** *E. On la note $\mathcal{C}_E(x)$*

Remarque 4.3.33 *La composante connexe de x dans E est la plus grande partie connexe de $\mathbb{C}$ incluse dans E et contenant x au sens de l'inclusion. C'est-à-dire que, si C est une partie connexe de $\mathbb{C}$, incluse dans E et contenant x, alors (par définition de $\mathcal{C}_E(x)$) on a*

$$\{x\} \subset C \subset \mathcal{C}_E(x).$$

Propriété 4.3.34 *Soit $E \subset \mathbb{C}$ et $x \in E$. La composante connexe de x dans E est une partie connexe de $\mathbb{C}$ incluse dans E et contenant x.*

Preuve. Il suffit d'utiliser la définition 4.3.32, et d'utiliser la propriété 4.3.31. Pour cela, il suffit de remarquer que $F = \{x\}$ est une partie connexte de $\mathbb{C}$, incluse dans E et contenant x, de sorte que l'ensemble des parties connexes de $\mathbb{C}$, incluses dans E et contenant x est non vide. ■

Lemme 4.3.35 *Soit E une partie de $\mathbb{C}$, et $x \in E$. Pour tout $y \in \mathcal{C}_E(x)$, on a*

$$\mathcal{C}_E(x) = \mathcal{C}_E(y).$$

Preuve. Soit $y \in \mathcal{C}_E(x)$. L'ensemble $\mathcal{C}_E(x)$ est donc une partie connexe de E contenant y. Par suite,

$$\mathcal{C}_E(x) \subset \mathcal{C}_E(y).$$

En particulier, $x \in \mathcal{C}_E(y)$. Donc, de la même manière que ci-dessus, $\mathcal{C}_E(y)$ est une partie connexe de E qui contient x. Ceci implique

$$\mathcal{C}_E(y) \subset \mathcal{C}_E(x).$$

Ceci assure que $\mathcal{C}_E(x) = \mathcal{C}_E(y)$. ■

Corollaire 4.3.36 *La relation binaire $\mathcal{R}$ sur E définie par $x\mathcal{R}y$ lorsque $y \in \mathcal{C}_E(x)$ est une relation d'équivalence.*

Preuve. La réflexivité est évidente car pour tout $x \in E$, $x \in \mathcal{C}_E(x)$, donc $x\mathcal{R}x$. La symétrie est conséquence du lemme 4.3.35. En effet, si $x, y \in E$ sont tels que $x\mathcal{R}y$, alors $y \in \mathcal{C}_E(x)$. Le lemme 4.3.35 assure que $\mathcal{C}_E(y) = \mathcal{C}_E(x)$. Par suite, puisque $x \in \mathcal{C}_E(x)$, on a $x \in \mathcal{C}_E(y)$, et donc $y\mathcal{R}x$. Enfin, pour la transitivité, si $x, y, z \in E$ sont tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $y \in \mathcal{C}_E(x)$ et $z \in \mathcal{C}_E(y)$. Par le lemme 4.3.35, on a successivement $\mathcal{C}_E(x) = \mathcal{C}_E(y)$ et $\mathcal{C}_E(y) = \mathcal{C}_E(z)$. On en déduit que $\mathcal{C}_E(x) = \mathcal{C}_E(z)$. En particulier, $z \in \mathcal{C}_E(x)$, et donc $x\mathcal{R}z$. ■

Remarque 4.3.37 *Par le lemme 4.3.35, on a directement*

$$\forall x, y \in E, \qquad \Big(x\mathcal{R}y \iff \mathcal{C}_E(x) = \mathcal{C}_E(y)\Big).$$

Propriété 4.3.38 *Soit $E \subset \mathbb{C}$ une partie non vide. Les composantes connexes des points de E dans E forment une partition de E. C'est-à-dire que*

$$E = \cup_{x\in E}\mathcal{C}_E(x),$$

avec pour tout $x \in E$, $\mathcal{C}_E(x) \neq \emptyset$ et

$$\forall x, y \in E, \qquad \Big(\mathcal{C}_E(x) \cap \mathcal{C}_E(y) \neq \emptyset \implies \mathcal{C}_E(x) = \mathcal{C}_E(y)\Big).$$

Preuve. C'est une conséquence du fait que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. ∎

Propriété 4.3.39 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Ses composantes connexes sont des ouverts de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}_\Omega(x)$ une des composantes connexes de Ω. Soit $y \in \mathcal{C}_\Omega(x)$. On a donc $\mathcal{C}_\Omega(y) = \mathcal{C}_\Omega(x)$ par le lemme 4.3.35. Puisque Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(y, r[\subset \Omega$. En particulier, $B(y, r[$ est une partie connexe (par le corrolaire 4.3.28) de $\mathbb{C}$, incluse dans Ω et contenant y. Par la remarque 4.3.33, $B(y, r[\subset \mathcal{C}_\Omega(y)$. On en déduit que $B(y, r[\subset \mathcal{C}_\Omega(x)$. Ainsi, $\mathcal{C}_\Omega(x)$ est ouvert. ∎

Propriété 4.3.40 *Soit $E \subset \mathbb{C}$ une partie connexe, et φ une fonction continue de E dans $\mathbb{C}$. La partie $\varphi(E)$ est un connexe de $\mathbb{C}$.*

Remarque 4.3.41 *Cette propritété assure que l'image continue d'un connexe est connexe.*

Preuve. Supposons par l'absurde que $\varphi(E)$ est non connexe. Alors, il existe U, V ouverts de $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\varphi(E) \subset U \cup V, \qquad \varphi(E) \cap U \neq \emptyset, \qquad \varphi(E) \cap V \neq \emptyset, \qquad \text{et} \qquad \varphi(E) \cap U \cap V = \emptyset.$$

Considérons les ensembles

$$\tilde{U} = \varphi^{-1}(U) \qquad \text{et} \qquad \tilde{V} = \varphi^{-1}(V).$$

Puisque φ est une application continue de E dans $\mathbb{C}$, les ensembles $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont des ouverts (relatifs) de E, c'est-à-dire qu'il existe deux ouverts $\hat{U}$ et $\hat{V}$ de $\mathbb{C}$ tels que

$$\tilde{U} = \hat{U} \cap E \qquad \text{et} \qquad \tilde{V} = \hat{V} \cap E.$$

Puisque $\varphi(E) \subset U \cup V$, on a $E \subset \tilde{U} \cup \tilde{V}$. Puisque $\tilde{U} \subset \hat{U}$ et $\tilde{V} \subset \hat{V}$, il vient que $E \subset \hat{U} \cup \hat{V}$. Puisque $\varphi(E) \cap U \neq \emptyset$, on a $\tilde{U} \neq \emptyset$, et donc $\hat{U} \neq \emptyset$. On montre de même que $\hat{V} \neq \emptyset$. Enfin, on a $E \cap \hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$. En effet, si $x \in E \cap \hat{U} \cap \hat{V}$, alors $x \in E \cap \tilde{U} \cap \tilde{V}$, et donc $\varphi(x) \in \varphi(E) \cap U \cap V$. Or ce dernier ensemble est vide par hypothèse. En conclusion, on a

$$E \subset \hat{U} \cup \hat{V}, \qquad E \cap \hat{U} \neq \emptyset, \qquad E \cap \hat{V} \neq \emptyset, \qquad \text{et} \qquad E \cap \hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset.$$

Ainsi E est non connexe. On a donc une contradiction. ∎

Définition 4.3.42 *On appelle parfois* **région** *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$*.*

Remarque 4.3.43 (lien entre la connexité et la connexité par arcs) *Une partie E de $\mathbb{C}$ est dite* **connexe par arcs** *lorsque pour tout couple de points $(a,b) \in E$, il existe une application γ continue du segment $[0,1]$ dans E telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Observer que l'on ne demande pas, dans cette définition, que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$. Il est facile de vérifier*[3] *qu'une partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$ est nécessairement connexe. En revanche, une partie connexe de $\mathbb{C}$ n'est pas nécessairement connexe par arcs. Pour s'en convaincre, on peut considérer par exemple l'ensemble*

$$E_0 = \left\{x + i\sin\left(\frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\} \cup (\{0 + iy \mid y \in [-1,1]\}),$$

inspiré par l'exercice 3.3.2. On vérifie[4] *qu'elle est connexe mais n'est pas connexe par arcs. Enfin, mentionnons le fait que, si la partie $E \subset \mathbb{C}$ est ouverte, alors elle est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs*[5]*.*

Remarque 4.3.44 (lien entre la connexité et la connexité par lignes brisées) *Une partie E de $\mathbb{C}$ est dite* **connexe par lignes brisées** *lorsque pour tout couple de points $(a,b) \in E$, il existe une fonction γ du segment $[0,1]$ dans E, continue et affine par morceaux sur $[0,1]$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Lorsque la partie E est ouverte, elle est connexe si et seulement si elle est connexe par lignes brisées*[6]*. En particulier, si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors quels que soient les points $(a,b) \in \Omega^2$, il existe un chemin (au sens de la définition 4.3.3) γ tracé dans Ω, paramétré par $[0,1]$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

Corollaire 4.3.45 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide. Si $f \in H(\Omega)$ a une dérivée nulle dans Ω, alors elle est constante dans Ω.*

Preuve. Puisque $\Omega \neq \emptyset$, on peut fixer $a \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$. Puisque Ω est un ouvert connexe, il existe, par la remarque 4.3.44, un chemin (une ligne brisée) paramétré par $[0,1]$ tracé dans Ω tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = z$. De plus, la fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$ est continue sur le segment $[0,1]$ et dérivable sur ce segment sauf peut-être en un nombre fini de points que l'on regroupe dans un ensemble que l'on note $\mathcal{S}$. Enfin, en tout point t de $[0,1] \setminus \mathcal{S}$, on a, puisque f' est nulle sur Ω,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \gamma(t) = \underbrace{f'(\underbrace{\gamma(t)}_{\in\Omega})}_{=0} \times \gamma'(t) = 0.$$

On en déduit que la fonction continue $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ est constante sur le segment $[0,1]$. En particulier, on a $f(z) = f(\gamma(1)) = f(\gamma(0)) = f(a)$. Ceci valant pour tout z, on conclut que f est constante dans Ω. ■

3. en exercice
4. encore en exercice
5. comme on le vérifie en exercice et en faisant un dessin : si $E = \emptyset$, alors c'est évident ; sinon, supposant la partie connexe E ouverte et fixant $a \in E$, on montre par exemple que l'ensemble

$$\mathcal{A}(a) = \{b \in E \mid \exists \gamma \in \mathcal{C}^0([0,1], E) \text{ tel que } \gamma(0) = a \text{ et } \gamma(1) = b\},$$

est à la fois ouvert et fermé dans E. Le fait que $a \in \mathcal{A}(a)$ implique que $\mathcal{A}(a) \neq \emptyset$. La connexité de E implique que $\mathcal{A}(a) = E$. Ceci valant pour tout $a \in E$, on obtient que E est connexe par arcs.

6. comme on le vérifie en exercice, en adaptant la preuve faite pour la connexité par arcs

4.3.4 Indice d'un point par rapport à un chemin fermé

Définition 4.3.46 *Soit γ un chemin fermé tracé dans $\mathbb{C}$. On note Ω l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$. On définit l'***indice d'un point $z \in \Omega$ par rapport au chemin fermé γ** *en posant*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\omega - z} \mathrm{d}\omega. \tag{4.19}$$

Remarque 4.3.47 *Puisque γ est un chemin tracé dans $\mathbb{C}$, son image $\gamma^\star$ est un compact de $\mathbb{C}$. En particulier, $\gamma^\star$ est un fermé de $\mathbb{C}$. Par suite, la partie $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^\star$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Notons $[a, b]$ le segment de définition de γ. Pour $z \in \Omega$, la fonction $s \mapsto \gamma(s) - z$ est continue et ne s'annule pas sur $[a, b]$. On en déduit que la fonction $s \mapsto 1/(\gamma(s) - z)$ est définie et continue sur $[a, b]$. Ainsi, la fonction Ind_γ est bien définie sur Ω, via la formule*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\omega - z} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \mathrm{d}s, \tag{4.20}$$

avec la convention de la propriété 4.3.5 pour la fonction γ'. Alternativement, on aurait pu dire que la fonction $\omega \mapsto \omega - z$ est continue sur $\gamma^\star$ pour justifier cela.

Propriété 4.3.48 *Soit γ un chemin fermé tracé dans $\mathbb{C}$. On note Ω l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$. Cet ouvert a exactement une composante connexe non bornée.*

Preuve. Puisque $\gamma^\star$ est compact, il est borné et donc il existe $R > 0$ tel que

$$\gamma^\star \subset B(0, R[.$$

Par suite,

$$\mathbb{C} \setminus B(0, R[\subset \Omega.$$

Choisissons un point z dans $\mathbb{C}$ tel que $|z| \geq R$ (par exemple $z = R$). Observons que $\mathbb{C} \setminus B(0, R[$ est connexe, incluse dans Ω et contient z. Par suite, en utilisant la remarque 4.3.33,

$$\mathbb{C} \setminus B(0, R[\subset \mathcal{C}_\Omega(z).$$

Ainsi, Ω admet une composante connexe non bornée. Par ailleurs, s'il y en a une autre, alors elle intersecte de manière non triviale $\mathbb{C} \setminus B(0, R[$, donc elle intersecte de manière non triviale $\mathcal{C}_\Omega(z)$. Utilisant la propriété 4.3.38, elle est confondue avec $\mathcal{C}_\Omega(z)$. ■

Théorème 4.3.49 (de l'indice) *Soit γ un chemin fermé tracé dans $\mathbb{C}$. On note Ω l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$. La fonction indice par rapport au chemin fermé γ définie en* (4.19) *vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La fonction Ind_γ est holomorphe sur Ω.*
2. *La fonction Ind_γ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.*
3. *La fonction Ind_γ est constante sur les composantes connexes de Ω.*
4. *La fonction Ind_γ vaut 0 sur la composante connexe non bornée de Ω.*

Preuve. Notons $[a, b]$ l'intervalle de définition du chemin fermé γ. En posant pour $s \in [a, b]$, $m(s) = \gamma'(s)/(2i\pi)$ (où la fonction γ' a éventuellement été prolongée à l'ensemble fini $\mathcal{S}$ des points où elle n'est pas définie, voir la propriété 4.3.5) et $\varphi(s) = \gamma(s)$, on définit deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que $\varphi([a, b]) \cap \Omega = \emptyset$. Par suite, le lemme 4.3.1, la

fonction Ind_γ est développable en série de puissances dans Ω. Par conséquent, le théorème 4.2.1 assure que Ind_γ est holomorphe dans Ω. Ceci prouve le point 1.
Pour prouver le point 2, commençons par remarquer que

$$\forall \omega \in \mathbb{C}, \qquad \left(\frac{\omega}{2i\pi} \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\omega} = 1\right).$$

Fixons $z \in \Omega$. La fonction $s \mapsto \gamma'(s)/(\gamma(s)-z)$ est continue par morceaux donc Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Définissons la fonction

$$\psi : \begin{pmatrix} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\mathrm{d}s\right) \end{pmatrix}.$$

Pour montrer le point 2, il suffit de montrer que $\psi(b) = 1$. La fonction ψ est continue sur $[a,b]$. De plus,

$$\forall t \in [a,b] \setminus \mathcal{S}, \qquad \psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\psi(t). \tag{4.21}$$

En particulier, la fonction ψ' se prolonge également aux points de $\mathcal{S}$ en une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Observons que la fonction $t \mapsto \psi(t)/(\gamma(t)-z)$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$, et que l'on a

$$\forall t \in [a,b] \setminus \mathcal{S}, \qquad \left(\frac{\psi}{\gamma - z}\right)'(t) = \frac{\psi'(t)\,(\gamma(t)-z) - \gamma'(t)\psi(t)}{(\gamma(t)-z)^2}.$$

La relation (4.21) implique alors que

$$\forall t \in [a,b] \setminus \mathcal{S}, \qquad \left(\frac{\psi}{\gamma - z}\right)'(t) = 0.$$

Par suite, la fonction $t \mapsto \psi(t)/(\gamma(t)-z)$ est constante sur le segment $[a,b]$. Puisque $\psi(a) = \mathrm{e}^0 = 1$, il vient que

$$\forall t \in [a,b], \qquad \psi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z}.$$

Enfin, puisque le chemin γ est fermé, on a $\gamma(a) = \gamma(b)$, ce qui fournit $\psi(b) = 1$ et montre finalement que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Ceci achève la preuve du point 2.
Pour montrer le point 3, notons $\mathcal{C}$ une composante connexe de Ω. Puisque Ind_γ est holomorphe sur Ω par le point 1, elle est continue sur Ω. En particulier, $\mathcal{A} = \mathrm{Ind}_\gamma(\mathcal{C})$ est l'image d'une partie connexe par une application continue. Par la propriété 4.3.40, $\mathcal{A}$ est une partie connexe de $\mathbb{C}$. Or $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$ par le point 2. On en déduit que $\mathcal{A}$ est un singleton. Ceci implique que Ind_γ est constante sur $\mathcal{C}$. On a ainsi montré le point 3.
Pour montrer le point 4, rappelons que Ω possède exactement une composante connexe $\mathcal{C}_\infty$ non bornée par la propriété 4.3.48. Rappelons que la distance de $z \in \mathbb{C}$ à $\gamma^\star$ est définie par

$$d(z,\gamma^\star) = \inf_{\omega \in \gamma^\star} |\omega - z| = \inf_{t \in [a,b]} |\gamma(t) - z|.$$

Puisque $\gamma^\star$ est compact et $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^\star$, on a $d(z,\gamma^\star) > 0$. Soit $R > 0$ tel que $\gamma^\star \subset B(0,R]$. Observons que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \Big(|z| \geq R \quad \Longrightarrow \quad d(z, B(0,R]) \leq d(z,\gamma^\star)\Big).$$

Par ailleurs, $d(z,B(0,R]) = |z| - R$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ (elle est nulle sinon). Ceci implique

que

$$d(z,\gamma^\star) \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \tag{4.22}$$

Pour $z\in\mathcal{C}_\infty$, on a donc

$$\begin{aligned}|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(s)|}{|\gamma(s)-z|}\mathrm{d}s\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(s)|}{d(z,\gamma^\star)}\mathrm{d}s\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{L(\gamma)}{d(z,\gamma^\star)}.\end{aligned}$$

Puisque la valeur de $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ ne dépend pas de $z\in\mathcal{C}_\infty$ par le point 3, l'inégalité ci-dessus et 4.22 assurent que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=0$. On en déduit que $\mathrm{Ind}_\gamma\equiv 0$ sur $\mathcal{C}_\infty$. Ceci démontre le point 4. ∎

Remarque 4.3.50 *Fixons $z\in\Omega$. Notant pour tout $t\in[a,b]$, $\lambda(t)=\int_a^t\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\mathrm{d}s$, on a*

$$\psi(t)=\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z}=\mathrm{e}^{\lambda(t)}=\mathrm{e}^{\Re(\lambda(t))}\mathrm{e}^{i\Im(\lambda(t))}.$$

Ainsi, $\frac{1}{2\pi}(\Im(\lambda(t))-\Im(\lambda(a)))$ compte (dans $\mathbb{R}$) le nombre de tours que $s\mapsto\gamma(s)$ a fait autour de z entre a et t. Ici, $\lambda(a)=0$. De plus, en $t=b$, on a $\Re(\lambda(b))=0$, et ainsi

$$\frac{1}{2\pi}\Im(\lambda(b))=\frac{1}{2i\pi}\lambda(b)=\mathrm{Ind}_\gamma(z).$$

On comprend ainsi que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ *est un nombre entier lorsque γ est un chemin fermé, et que ce nombre compte, algébriquement (c'est-à-dire positivement comme négativement, avec un signe), le nombre de tours que le chemin fermé γ fait autour du point z. On comprend également (en faisant un dessin) pourquoi ce nombre est constant dans chaque composante connexe, et pourquoi il est nul dans $\mathcal{C}_\infty$. Enfin, on comprend pourquoi* Ind_γ *est une fonction holomorphe sur Ω.*

Exemple 4.3.51 *Soit γ le cercle orienté positivement de centre $a\in\mathbb{C}$ et de rayon $r>0$. On a*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\begin{cases}1 & si\ |z-a|<r,\\ 0 & si\ |z-a|>r.\end{cases}$$

En effet, $\mathcal{C}_\infty=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|>r\}$ et donc $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=0$ *dans cet ensemble. Pour $|z-a|<r$, on a* $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ *et*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{ir\mathrm{e}^{it}}{a+r\mathrm{e}^{it}-a}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\mathrm{d}t=1.$$

4.3.5 Le théorème de Cauchy local

En analyse complexe, un théorème de Cauchy est un théorème affirmant que, sous certaines conditions topologiques sur un chemin fermé γ et un ouvert Ω contenant $\gamma^\star$, l'intégrale de toute fonction holomorphe sur Ω le long de γ vaut 0. Nous commençons par une version "locale", faisant intervenir des chemins dans un ouvert convexe, qui sera suffisante pour traiter bien des cas. Nous verrons en section 4.5 une version "globale", faisant intervenir des cycles dans un ouvert quelconque.

Lemme 4.3.52 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $F \in H(\Omega, \mathbb{C})$. On suppose de plus que la fonction F' est continue sur Ω. Pour tout chemin fermé γ tracé dans Ω, on a*

$$\int_\gamma F'(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

Remarque 4.3.53 *Autrement dit, ce lemme assure que, si une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{C}$ admet une primitive holomorphe sur cet ouvert, alors elle est d'intégrale nulle le long de tout chemin fermé tracé dans l'ouvert.*

Preuve. Notons $[a, b]$ l'intervalle de définition du chemin fermée γ. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble fini des points de $[a, b]$ auxquels γ n'est pas dérivable. L'application $\mapsto F(\gamma(s))$ est continue sur $[a, b]$, et dérivable par morceaux sur $[a, b]$. De plus, on a

$$\forall s \in [a, b] \setminus \mathcal{S}, \qquad (F \circ \gamma)'(s) = F'(\gamma(s))\gamma'(s).$$

Puisque F' est continue sur Ω, il vient que la fonction $F \circ \gamma$ est (continue et) de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$. Par le théorème fondamental de l'analyse, il vient

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F'(\omega)\mathrm{d}\omega &= \int_a^b F'(\gamma(s))\gamma'(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_a^b (F \circ \gamma)'(s)\mathrm{d}s \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $\gamma(a) = \gamma(b)$. ∎

Ce lemme permet d'intégrer sans calcul les fonctions puissances (d'exposants positifs) le long de tout chemin fermé, comme l'explique le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.54 *Pour $n \in \mathbb{N}$, posons*

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}.$$

La fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}$, sa dérivée est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad F'(z) = z^n,$$

et l'on a, pour tout chemin fermé γ tracé dans $\mathbb{C}$,

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = 0.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que la fonction F' est continue sur $\mathbb{C}$ et, le long d'un chemin fermé γ tracé dans $\mathbb{C}$,

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = \int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z.$$

On conclut en appliquant le lemme 4.3.52. ∎

Le lemme 4.3.52 permet également d'intégrer les fonctions puissances (d'exposants inférieurs à -2) sans calcul le long de tout chemin fermé tracé dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, comme l'explique le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.55 *Pour $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq -2$, posons*

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}.$$

La fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sa dérivée est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad F'(z) = z^n,$$

et l'on a, pour tout chemin fermé γ tracé dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = 0.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que la fonction F' est continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et, le long d'un chemin fermé γ tracé dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = \int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z.$$

On conclut en appliquant le lemme 4.3.52. ■

Remarque 4.3.56 *Le cas $n = -1$, qui n'est pas traité dans les corollaires ci-dessus, a déjà été traité (c'est lui qui a motivé la définition de l'indice 4.3.46). En effet, la fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. De plus, si γ est un chemin fermé tracé dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,*

$$\int_\gamma \frac{1}{\omega}\mathrm{d}\omega = \int_\gamma \frac{1}{\omega - 0}\mathrm{d}\omega = 2i\pi \times \mathrm{Ind}_\gamma(0).$$

Par le théorème 4.3.49 et la remarque 4.3.50, on comprend alors que cette intégrale vaut $2i\pi$ fois le nombre (algébrique, c'est-à-dire signé) de fois que γ tourne autour de 0.

Remarque 4.3.57 *Le calcul mené à l'exemple 4.3.51 montre en particulier que la fonction $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En effet, si elle admettait une telle primitive, cette fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ serait d'intégrale nulle le long de tout chemin fermé tracé dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ par le lemme 4.3.52 (et l'indice de 0 par rapport à $\mathcal{C}^+(0,1]$ serait nul).*

Théorème 4.3.58 (de Cauchy le long du bord d'un triangle) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$. Soit $p \in \Omega$. On suppose que f est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$* [7]*. On note Δ un triangle tout entier inclus*[8] *dans Ω. Notons $\partial\Delta$ le bord*[9] *de Δ comme défini à l'exemple 4.3.20. On a*[10]

$$\int_{\partial\Delta} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

7. C'est -à-dire que l'on ne suppose pas *a priori* que f est $\mathbb{C}$-dérivable en p.
8. C'est-à-dire que Δ est l'enveloppe convexe de trois points a, b, c de Ω et qu'il est inclus dans Ω.
9. On ne précise pas l'orientation du bord, c'est-à-dire si l'on prend $\partial\Delta = [a \to b \to c]^\star$ ou $\partial\Delta = [a \to c \to b]^\star$. Comme l'intégrale est nulle, *in fine*, le résultat vaut pour les deux orientations.
10. En abusant un peu des notations, comme indiqué à la remarque 4.3.21.

Preuve. Notons

$$J = \int_{\partial\Delta} f(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Notons a, b et c les points de Ω qui sont les sommets de Δ. Supposons dans un premier temps que $p \notin \Delta$. Dans ce cas, notons $a' = (b+c)/2$ le milieu du segment $[b,c]^\star$, $b' = (a+c)/2$ le milieu du segment $[a,c]^\star$ et $c' = (a+b)/2$ le milieu du segment $[a,b]^\star$. Orientons le bord $\partial\Delta$ de Δ, de sorte qu'il corresponde au chemin fermé $[a \to b \to c]$ tel que défini à l'exemple 4.3.20. On peut alors considérer quatre "sous-triangles" de Δ dont les bords sont les supports des chemins suivants :

$$\begin{array}{rcl} \partial\Delta_1 & = & [a \to c' \to b'] \\ \partial\Delta_2 & = & [b \to a' \to c'] \\ \partial\Delta_3 & = & [c \to b' \to a'] \\ \partial\Delta_4 & = & [a' \to b' \to c']. \end{array}$$

Observons que [11]

$$J = \int_{\partial\Delta} f(\omega)\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Par suite, l'un des quatre termes dans la somme ci-dessus a un module au moins égal à $|J|/4$, sinon on aurait une contradiction avec l'inégalité triangulaire. Notons Δ^1 ce triangle. On a $p \notin \Delta^1$, et l'on peut recommencer séquentiellement ce processus pour construire une suite de triangles $(\Delta^n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta^{n+1} \subset \Delta^n \subset \cdots \subset \Delta^1 \subset \Delta$ et de plus

$$L(\partial\Delta^n) = 2^{-n} L(\partial\Delta) \qquad \text{et} \qquad |J| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^n} f(\omega)\mathrm{d}\omega \right|. \tag{4.23}$$

On vérifie aisément [12] que l'intersection de cette suite de triangles est réduite à un point : il existe $z_0 \in \cap_{n\geq 1}\Delta^n$ tel que

$$\{z_0\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\Delta^n.$$

En particulier, $z_0 \in \Delta \subset \Omega \setminus \{p\}$, et f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un $r > 0$ tel que $B(z_0, r[\subset \Omega$ et l'on a

$$\forall z \in B(z_0, r[, \qquad |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|. \tag{4.24}$$

De plus, il existe $N \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad \Delta^n \subset B(z_0, r[. \tag{4.25}$$

Observons que, pour $n \geq N$, on a également

$$\forall z \in \Delta^n, \qquad |z - z_0| \leq 2^{-n} L(\partial\Delta), \tag{4.26}$$

car $|z - z_0| \leq L(\partial\Delta^n)$ pour $z \in \Delta^n$, et l'on peut utiliser (4.23). Utilisant le corollaire 4.3.54, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\partial\Delta^n} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right) \mathrm{d}z = 0.$$

11. Il suffit de faire un dessin pour se rendre compte des compensations.
12. et en exercice. On peut par exemple montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ obtenue en choisissant l'un des sommets de chaque triangle est de Cauchy, donc elle converge, vers un certain z_0. Ce point est alors nécessairement dans tous les triangles, et c'est le seul.

Par suite, on a, pour $n \geq 1$,

$$\int_{\partial \Delta^n} f(z) \mathrm{d}z = \int_{\partial \Delta^n} \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \right) \mathrm{d}z.$$

Utilisant cette égalité, la majoration (4.14) de la propriété 4.3.11, puis (4.24), (4.25), (4.26) et enfin (4.23), il vient que pour $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial \Delta^n} f(z) \mathrm{d}z \right| &= \left| \int_{\partial \Delta^n} \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \right) \mathrm{d}z \right| \\
&\leq L(\partial \Delta^n) \times \| z \mapsto \left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \right) \|_{\infty, \partial \Delta^n} \\
&\leq L(\partial \Delta^n) \times \varepsilon \times 2^{-n} L(\partial \Delta) \\
&\leq 2^{-n} L(\partial \Delta) \times \varepsilon \times 2^{-n} L(\partial \Delta) \\
&\leq \varepsilon \left(2^{-n} L(\partial \Delta) \right)^2.
\end{aligned}$$

Utilisant à nouveau (4.23), il vient que, pour $n \geq N$,

$$|J| \leq 4^n \left| \int_{\partial \Delta^n} f(z) \mathrm{d}z \right| \leq \varepsilon (L(\partial \Delta))^2.$$

Ce dernier majorant étant indépendant de n, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |J| \leq \varepsilon (L(\partial \Delta))^2.$$

Ceci implique que $J = 0$.

Supposons maintenant que $p \in \Delta$. Distingons deux cas. Supposons que p est l'un des trois sommets a, b ou c. Si les points a, b et c sont alignés (voire confondus), alors il est évident que $J = 0$. Supposons donc qu'ils ne sont pas alignés. Supposons que $p = a$ (les cas $p = b$ et $p = c$ se traitent de manière similaire). Choisissons x sur le segment $[a, b]^\star$ proche mais différent de $p = a$ et y sur $[a, c]^\star$ proche mais différent de $p = a$. On vérifie aisément [13] que

$$J = \int_{[a \to x \to y]} f(z) \mathrm{d}z + \int_{[b \to y \to x]} f(z) \mathrm{d}z + \int_{[b \to c \to y]} f(z) \mathrm{d}z.$$

Les deux dernières intégrales dans la somme ci-dessus sont nulles en utilisant la première partie de la preuve, car p n'est pas dans les triangles concernés. D'autre part, puisque f est continue sur Ω, elle est continue sur le compact Δ inclus dans Ω, donc elle est bornée sur ce compact. Ainsi, le module de la première intégrale se majore en utilisant la propriété 4.3.11 comme suit :

$$\left| \int_{[a \to x \to y]} f(z) \mathrm{d}z \right| \leq (|a - x| + |x - y| + |y - a|) \, \|f\|_{\infty, \Delta}.$$

Faisant tendre x et y vers $p = a$, on conclut que $J = 0$ dans ce cas également. Supposons finalement que $p \in \Delta$ n'est pas l'un des sommets de Δ. On vérifie aisément [14] que

$$J = \int_{[a \to b \to p]} f(z) \mathrm{d}z + \int_{[b \to c \to p]} f(z) \mathrm{d}z + \int_{[c \to a \to p]} f(z) \mathrm{d}z.$$

Le point p étant l'un des sommets de chacun des trois triangles dont le bord intervient dans le domaine d'intégration des trois intégrales dans la somme ci-dessus, on conclut par ce qui précède que chacune de ces intégrales est nulle. Par suite $J = 0$ dans ce cas également. ■

13. Par exemple en faisant un dessin.
14. Par exemple en faisant encore un dessin.

Remarque 4.3.59 *On a vu en CDI1 la formule de Green-Riemann qui assure que, si $U \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné régulier*[15] *et si f et g sont des fonctions régulières*[16] *sur un ouvert qui contient l'adhérence de U, alors*

$$\int_{\partial U} (f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y) = \int\int_U \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4.27}$$

en orientant convenablement le bord ∂U de U. En remarquant que l'intégrale le long d'un chemin définie en 4.3.10 correspond à l'intégrale le long du bord définie en CDI1 (en remplaçant $\mathrm{d}z$ par $\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$), et en supposant $f = u + iv$ suffisamment régulière, on obtient par la formule de Grienn-Riemann (4.27) *dans le triangle Δ que*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\partial\Delta} (u(x,y) + iv(x,y))(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\partial\Delta} (u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y) + i\int_{\partial\Delta} (v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y) \\
&= \int\int_\Delta \left(-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\int\int_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Or, si $f = (u,v)$ est holomorphe sur un ouvert qui contient Δ, les relations de Cauchy-Riemann 4.6 sont vérifiées dans cet ouvert par la propriété 4.1.20. Ceci implique que les intégrandes dans les deux intégrales doubles ci-dessus sont nulles, et l'on retrouve que l'intégrale de f le long du bord du triangle est nulle. Le théorème de Cauchy 4.3.58 ci-dessus est donc cohérent avec ce fait ci-dessus, qui repose sur la formule de Green-Riemann vue en CDI1, même si ses hypothèses du théorème de Cauchy sont plus faibles (notamment, il y a un point $p \in \Omega$ en lequel la fonction n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable a priori).

Le théorème de Cauchy suivant, dans un ouvert convexe, apparaît comme un corollaire du théorème précédent.

Théorème 4.3.60 (de Cauchy dans un ouvert convexe) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert* **convexe**, *et $p \in \Omega$. On se donne une fonction f de Ω dans $\mathbb{C}$, continue sur Ω, et holomorphe sur l'ouvert $\Omega\backslash\{p\}$. La fonction f admet une primitive holomorphe dans Ω : il existe $F \in H(\Omega)$ telle que*

$$\forall z \in \Omega, \qquad F'(z) = f(z).$$

En particulier, quel que soit le chemin fermé γ tracé dans Ω, on a

$$\int_\gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0. \tag{4.28}$$

Preuve. Fixons $a \in \Omega$. Par convexité de Ω, pour tous $z, z_0 \in \Omega$, le triangle de sommets a, z et z_0 est tout entier inclus dans Ω. En particulier, les chemins $[a \to z]$, $[z \to z_0]$ et $[z_0 \to a]$ sont tracés dans Ω. Par le théorème précédent, on a

$$\int_{[a\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{[z\to z_0]} f(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{[z_0\to a]} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

15. Je ne donne volontairement pas trop de précision quant à l'énoncé pour ne pas encombrer de détails techniques un résultat que nous n'utiliserons pas.

16. Même remarque.

On en déduit que l'on a

$$\int_{[a\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{[a\to z_0]} f(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{[z_0\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{4.29}$$

De plus, on peut définir la fonction

$$F : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \int_{[a\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega \end{pmatrix}.$$

À l'aide de (4.29), la fonction F vérifie pour $z, z_0 \in \Omega$,

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{[a\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega - \int_{[a\to z_0]} f(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{[a\to z_0]} f(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{[z_0\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega - \int_{[a\to z_0]} f(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{[z_0\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour $z, z_0 \in \Omega$ avec $z \neq z_0$,

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Par suite, quels que soient z_0 et z dans Ω avec $z \neq z_0$,

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0\to z]} \left(f(\omega) - f(z_0)\right)\mathrm{d}\omega. \tag{4.30}$$

Fixons $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en z_0, il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r[\subset \Omega$ et

$$\forall \omega \in B(z_0, r[, \qquad |f(\omega) - f(z_0)| \leq \varepsilon. \tag{4.31}$$

En particulier, lorsque $z \in B(z_0, r[$,

$$\|\omega \mapsto (f(\omega) - f(z_0))\|_{\infty,[z\to z_0]^\star} \leq \varepsilon.$$

Utilisant (4.31) et appliquant la majoration (4.14) de la propriété 4.14, on obtient pour $z \in B(z_0, r[\setminus\{z_0\}$,

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| \leq \frac{1}{|z - z_0|} \times \underbrace{L([z \to z_0])}_{=|z-z_0|} \times \|\omega \mapsto (f(\omega) - f(z_0))\|_{\infty,[z\to z_0]^\star} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que F est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et l'on a $F'(z_0) = f(z_0)$. Ceci valant quel que soit $z_0 \in \Omega$, on en déduit que $F \in H(\Omega)$ et $F' = f$. On obtient (4.28) en appliquant le lemme 4.3.52. ■

Remarque 4.3.61 *Puisque $\mathbb{C}$ est localement convexe (i.e. tout voisinage de tout point contient un autre voisinage convexe du même point ; par exemple une boule ouverte assez petite centrée en ce point), le théorème de Cauchy dans un ouvert convexe 4.3.60 est parfois appelé théorème de Cauchy "local". Cette terminologie vaut par opposition au théorème de Cauchy "global" 4.5.14 dans lequel on ne suppose pas que l'ouvert Ω est convexe.*

4.3.6 La formule de Cauchy dans un ouvert convexe

Théorème 4.3.62 (formule de Cauchy dans un ouvert convexe) *Soit* Ω *un ouvert* **convexe** *de* $\mathbb{C}$ *et* $f \in H(\Omega)$. *On se donne un chemin fermé* γ *tracé dans* Ω. *Pour tout* $z \in \Omega \setminus \gamma^\star$,

$$f(z) \times \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} \mathrm{d}\omega. \tag{4.32}$$

Preuve. Fixons $z \in \Omega \setminus \gamma^\star$. Puisque f est $\mathbb{C}$-dérivable en z, la fonction

$$g : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(\omega)-f(z)}{\omega - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z \end{cases} \end{pmatrix},$$

est continue en z. En utilisant la propriété 4.1.22, la fonction g est de plus holomorphe sur l'ouvert $\Omega \setminus \{z\}$, puisque f l'est. En particulier, g continue sur $\Omega \setminus \{z\}$. On en déduit que la fonction g est continue sur l'ouvert Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$. Puisque l'ouvert Ω est convexe, on peut lui appliquer le théorème de Cauchy 4.3.60. Ainsi g admet une primitive holomorphe dans Ω et l'on a

$$\int_\gamma g(\omega) \mathrm{d}\omega = 0, \tag{4.33}$$

puisque γ est un chemin fermé tracé dans l'ouvert Ω. Puisque $z \in \Omega \setminus \gamma^\star$, on a

$$\forall \omega \in \gamma^\star, \qquad g(\omega) = \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z}.$$

En outre, les fonctions $\omega \mapsto f(\omega)/(\omega - z)$ et $\omega \mapsto f(z)/(\omega - z)$ sont continues sur $\gamma^\star$. Par suite, on déduit de (4.33) que

$$\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} \mathrm{d}\omega = f(z) \int_\gamma \frac{1}{\omega - z} \mathrm{d}\omega.$$

Divisant cette dernière égalité par $2i\pi$, on obtient 4.32. ■

4.3.7 Les fonctions holomorphes sont développables en séries de puissances

On déduit du théorème de Cauchy dans un convexe le théorème ci-dessous, annoncé en dédut de section 4.3, qui affirme que les fonctions holomorphes sont développables en séries de puissances au sens du lemme 4.3.1.

Théorème 4.3.63 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f \in H(\Omega)$. *La fonction* f *est développable en série de puissances dans* Ω. *C'est-à-dire que, quel que soit* $z_0 \in \Omega$, *il existe* $(c_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ *telle que le rayon de convergence de la série de puissances de terme général* $(z \mapsto c_n(z_0)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est au moins égal à la distance* $d(z_0, \Omega^C)$ *de* z_0 *au complémentaire* Ω^C *de* Ω *dans* $\mathbb{C}$ *et, pour tout* $z \in \Omega$ *tel que* $|z - z_0| < d(z_0, \Omega^C)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n. \tag{4.34}$$

Remarque 4.3.64 *En particulier, sous ces hypothèses, pour tout* $z_0 \in \Omega$, f *est la somme d'une série de puissances centrée en* z_0 *et de rayon suffisamment grand pour s'approcher arbitrairement près du bord de* Ω.

Preuve. Soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $B(z_0, R[\subset \Omega$ (il existe un tel R car Ω) est ouvert. Soit $r \in]0, R[$. La fonction f est holomorphe sur l'ouvert convexe $B(z_0, R[$, et le cercle $\gamma = C^+(z_0, r]$ de centre z_0 et de rayon r (voir l'exemple 4.3.17) est un chemin fermé tracé dans l'ouvert convexe $B(z_0, R[$. Par suite, la formule de Cauchy dans un ouvert convexe (4.32) du théorème 4.3.62 assure que

$$\forall z \in B(z_0, r[, \qquad f(z) \times \mathrm{Ind}_{C^+(z_0,r]}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_0,r]} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \mathrm{d}\omega.$$

Or, pour $z \in B(z_0, r[$, on a, par l'exemple 4.3.51, que $\mathrm{Ind}_{C^+(z_0,r]}(z) = 1$. Ainsi,

$$\forall z \in B(z_0, r[, \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} ir\mathrm{e}^{it} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} \mathrm{d}t.$$

Posant $[a, b] = [0, 2\pi]$, $m : t \mapsto f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})r\mathrm{e}^{it}/(2\pi)$ et $\varphi : t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{it}$, les fonctions m et φ sont continues donc continues par morceaux sur le segment $[a, b]$. De plus, l'image de φ n'intersecte par l'ouvert $B(z_0, r[$. Par conséquent, le lemme 4.3.1 assure qu'il existe une suite complexe $(c_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n(z_0)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins égal à r et telle que

$$\forall z \in B(z_0, r[, \qquad f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{m(t)}{\varphi(t) - z} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n.$$

Comme on l'a déjà remarqué en 4.3.2, les coefficients $(c_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ dépendent de z_0 *a priori*, mais ne dépendent pas de r. Ceci valant pour tout $r \in]0, R[$, il vient que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n(z_0)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins égal à R. Par la même remarque qu'en 4.3.2, les coefficients $(c_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépendent pas de R. Ceci valant pour tout $R > 0$ tel que $B(z_0, R[\subset \Omega$, il vient que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n(z_0)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins égal à $d(z_0, \Omega^C)$. ■

On en déduit que les fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ au sens complexe sur cet ouvert.

Corollaire 4.3.65 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Si $f \in H(\Omega)$, alors $f' \in H(\Omega)$.*

Preuve. Puisque f est holomorphe sur Ω, elle est développable en séries de puissances dans Ω par le théorème 4.3.63 précédent. Par suite, sa dérivée f' est somme d'une série de puissances au voisinage de tout point de Ω, par le théorème 4.2.1. En particulier, par le même théorème, f' est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. D'où l'on tire que $f' \in H(\Omega)$. ■

Corollaire 4.3.66 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in H(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$. Les coefficients $(c_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'existence est donnée par le théorème 4.3.63 vérifient*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Preuve. Il suffit, une fois établie l'existence des $(c_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (4.34) dans une boule ouverte contenant z_0, d'utiliser le résultat du corollaire 4.2.3. ■

Remarque 4.3.67 *Remarquer l'analogie avec la formule de Taylor pour les polynômes (qui sont des fonctions holomorphes sur $\Omega = \mathbb{C}$) qui affirme que, pour tout polynôme P de degré $d \in \mathbb{N}$, et tout $\alpha \in \mathbb{C}$,*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k.$$

4.4 Quelques conséquences du théorème de développement en série de puissances

Nous listons dans cette section quelques conséquences du théorème de développement en séries de puissances 4.3.63.

4.4.1 Le théorème de Morera

Le théorème 4.3.63 permet de montrer le théorème suivant, qui est une forme de réciproque au théorème de Cauchy dans un triangle 4.3.58.

Théorème 4.4.1 (de Morera) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{C})$. Si quel que soit le triangle $\Delta \subset \Omega$,*

$$\int_{\partial\Delta} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0,$$

alors $f \in H(\Omega)$.

Preuve. Fixons $a \in \Omega$. Puisque Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r[\subset \Omega$. Puisque $B(a,r[$ est convexe, on peut, comme dans la preuve du théorème 4.3.60 de Cauchy dans un ouvert convexe, définir la fonction

$$F : \begin{pmatrix} B(a,r[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \int_{[a\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega \end{pmatrix}.$$

Fixons $z_0, z \in B(a,r[$. Puisque le triangle de sommets a ,z et z_0 est inclus dans $B(a,r[\subset \Omega$, on a

$$\int_{[a\to z]} f(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{[z\to z_0]} f(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{[z_0\to a]} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

On en déduit que la relation (4.29) et l'on peut mener les calculs comme dans la preuve du théorème 4.3.60 pour montrer que, si $z \neq z_0$, alors (4.30). La continuité de f en z_0 assure alors comme dans la preuve du théorème 4.3.60 que F est dérivable en z_0 avec $F'(z_0) = f(z_0)$. Ceci valant pour tout $z_0 \in B(a,r[$, on en déduit que F est holomorphe dans $B(a,r[$ et l'on a $F' = f$ dans $B(a,r[$. Le corollaire 4.3.65 du théorème de représentation en séries de puissances 4.3.63 assure alors que $F' = f$ est holomorphe sur $B(a,r[$. Ceci valant pour tout $a \in \Omega$, il vient que $f \in H(\Omega)$. ■

4.4.2 Le principe des zéros isolés

On rappelle que la définition de point d'accumulation a été donnée en 3.3.3. On en propose ici une caractérisation équivalente.

Propriété 4.4.2 *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie de X. Un point $a \in X$ est un point d'accumulation de A si et seulement si, pour tout $r > 0$, l'ensemble $B(a, r[\cap A$ est infini. De manière équivalente, $a \in X$ est un point d'accumulation de A si et seulement s'il est limite d'une suite injective de points de A.*

Preuve. Exercice, avec la définition 3.3.3. ■

Théorème 4.4.3 (principe des zéros isolés) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in H(\Omega)$. On note*

$$Z(f) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\},$$

l'ensemble des zéros de f dans Ω. Si $Z(f) \neq \Omega$, alors $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω et, quel que soit $z_0 \in Z(f)$, il existe un unique $m \in \mathbb{N}^\star$ et une unique fonction $g \in H(\Omega)$ avec $g(z_0) \neq 0$ tels que

$$\forall z \in \Omega, \qquad f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

L'entier $m \geq 1$ est appelé ordre de z_0 en tant que zéro de f. En particulier, les zéros de f sont des points isolés[17] *dans ce cas.*

Remarque 4.4.4 *On peut évidemment choisir toute autre valeur $\alpha \in \mathbb{C}$ que 0 et appliquer ce qui précède à la fonction (tout aussi holomorphe) $z \mapsto f(z) - \alpha$.*

Remarque 4.4.5 *On généralise ainsi la situation bien connue pour les polynômes, qui sont des fonctions holomorphes sur $\Omega = \mathbb{C}$ tout entier : un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est soit nul, soit il a un nombre fini de racines (et donc $Z(P)$ n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{C}$) et en tout $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$ on peut le factoriser de manière unique sous la forme*

$$P(z) = (z - z_0)^m Q(z),$$

avec $m \in \mathbb{N}^\star$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(z_0) \neq 0$.

Remarque 4.4.6 *Attention : le principe des zéros isolés ne dit pas que $Z(f) \neq \Omega$ n'a pas de points d'accumulation dans $\mathbb{C}$: il peut très bien en avoir. En revanche, il n'a pas de points d'accumulation dans Ω. Considérons par exemple la fonction*

$$f : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{i/z} - e^{-i/z}}{2i} \end{pmatrix},$$

où Ω est l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cette fonction est holomorphe sur Ω. On vérifie (en exercice) que

$$Z(f) = \left\{ \frac{1}{\pi k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Cet ensemble $Z(f)$ admet 0 comme point d'accumulation dans $\mathbb{C}$, mais il n'a pas de point d'accumulation dans Ω.

17. Ceci signifie que tous les points de $Z(f)$ sont isolés au sens de la définition 3.3.3.

Preuve. Notons A l'ensemble des points d'accumulation de $Z(f)$ dans Ω. Puisque la fonction f est holomorphe sur Ω, elle est continue sur Ω. Puisque $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ et puisque $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{C}$, il vient que $Z(f)$ est fermé dans Ω. Par continuité de f sur Ω, on a également

$$A \subset Z(f). \tag{4.35}$$

Montrons que A est fermé dans Ω. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A qui converge vers $a^\star \in \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, l'ensemble $B(a_n, r[\cap Z(f)$ est infini. Posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 1/(n+1)$, on peut choisir $z_0 \in B(a_0, r_0[\cap Z(f)$, puis $z_1 \in (B(a_1, r_1[\cap Z(f)) \setminus \{z_0\}$ [18] et ainsi de suite : on peut choisir pour tout $n \geq 1$, $z_n \in (B(a_n, r_n[\cap Z(f)) \setminus \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$. On construit ainsi une suite injective $(z_n)_{n\geq 0}$ de zéros de f dans Ω. De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a^\star - z_n| \leq |a^\star - a_n| + |a_n - z_n|.$$

Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a^\star$ et $|a_n - z_n| < r_n$, il vient que la suite injective $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de f converge vers $a^\star$, et donc $a^\star \in A$. Ainsi, la partie A est bien fermée dans Ω. En particulier, $B = \Omega \setminus A$ est ouvert.

Analyse des points de $Z(f)$. Soit $a \in Z(f) \subset \Omega$. Puisque Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r[\subset \Omega$. Par le théorème 4.3.63, il existe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n z^n)$ est au moins égal à r et l'on a

$$\forall z \in B(a, r[, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{4.36}$$

Puisque $a \in Z(f)$, on a $f(a) = c_0 = 0$. Considérons la partie C de $\mathbb{N}^\star$ définie par

$$C = \{n \in \mathbb{N}^\star \mid c_n \neq 0\}.$$

Distinguons deux cas :

- Soit la partie C est vide, auquel cas tous les $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont nuls et, par (4.36), la fonction f est identiquement nulle dans $B(a, r[$.
- Soit la partie C est non vide. Puisque c'est une partie de $\mathbb{N}^\star$ non vide, elle admet un plus petit élément $n_0 \in \mathbb{N}^\star$. Par (4.36), on obtient

  $$\forall z \in B(a, r[, \qquad f(z) = (z-a)^{n_0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+n_0}(z-a)^n.$$

  Posant

  $$g : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n_0}} & \text{si } z \neq a \\ c_{n_0} & \text{si } z = a \end{cases} \end{pmatrix},$$

  on constate que

  $$\forall z \in \Omega, \qquad f(z) = (z-a)^{n_0} g(z), \tag{4.37}$$

  et de plus $g(a) = c_{n_0} \neq 0$. La fonction g est clairement holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. De plus,

18. Ici, rien n'assure que $z_0 \in (B(a_1, r_1[\cap Z(f))$, et il faut comprendre la notation comme

$$(B(a_1, r_1[\cap Z(f)) \setminus \{z_0\} = (B(a_1, r_1[\cap Z(f)) \cap (\mathbb{C} \setminus \{z_0\}).$$

On conserve cette convention dans la suite de la preuve.

pour $z \in B(a, r[\setminus\{a\}$, on a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+n_0}(z-a)^n,$$

et cette relation est encore vraie en $z = a$. On en déduit que g est holomorphe sur $B(a, r[$. L'unicité de l'écriture de f sous la forme (4.37) est laissée en exercice. Observons enfin que, puisque g est continue en a et $g(a) \neq 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta[\subset \Omega$ et g ne s'annule pas sur $B(a, \delta[$. En particulier, avec (4.37), il vient que le point a est un point isolé de $Z(f)$ dans ce second cas.

Montrons que A est ouvert dans Ω. Soit $a \in A$. Utilisant (4.35), on a $a \in Z(f)$. On est donc dans l'un des deux cas ci-dessus. Cependant, si l'on est dans le second cas, alors a est un zéro isolé de f, et ne peut donc pas être un point d'accumulation de $Z(f)$, et on a une contradiction. Par suite, on est nécessairement dans le premier cas. Cependant, dans ce cas, f est identiquement nulle sur une boule $B(a, r[$ pour un certain $r > 0$, par le théorème 4.3.63, comme on l'a vu plus haut. En particulier, cette boule est constituée de points d'accumulation de zéros de f, et donc $B(a, r[\subset A$. Ainsi, A est ouvert dans Ω.

Concluons cette preuve. Avec ce qui précède, nous avons montré que

$$\Omega = A \cup B,$$

avec $B = \Omega \setminus A$, et A et B ouverts. Puisque Ω est connexe, on a nécessairement $A = \emptyset$ ou $A = \Omega$. Dans le cas $A = \Omega$, on a avec (4.35),

$$\Omega = A \subset Z(f) \subset \Omega,$$

et donc ces inclusions sont des égalités. Ceci correspond au cas où f est la fonction nulle sur Ω. Dans l'autre cas, $A = \emptyset$, les zéros de f sont isolés dans Ω, et pour tout point $a \in Z(f)$, on a une décomposition (unique) de f sous la forme (4.37) avec $n_0 \in \mathbb{N}^\star$, g holomorphe sur Ω et non nulle en a.

■

Remarque 4.4.7 *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et qu'elle n'est pas la fonction nulle, alors quel que soit le compact K inclus dans Ω, $Z(f) \cap K$ est fini. En effet, supposons par l'absurde que cet ensemble est infini. Alors, il existe une suite injective $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans cet ensemble. Par compacité de K, il existe φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $z \in K$ telle que*

$$z_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z.$$

En particulier, z est un point d'accumulation de $Z(f)$ dans Ω. Et ceci implique, par le théorème précédent et par connexité de Ω, que f est nulle sur Ω. On aboutit donc à une contradiction. On en déduit que $K \cap Z(f)$ est nécessairement fini.

Puisqu'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts[19] de Ω telle que

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega,$$

19. On peut par exemple considérer la suite (K_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$K_n = B(0, n] \cap \left\{ z \in \Omega \;\middle|\; d\left(z, \Omega^C\right) \geq \frac{1}{n+1} \right\}.$$

il vient que $Z(f) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(Z(f)\cap K_n)$, et $Z(f)$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, et il est donc au plus dénombrable.

En conséquence, si f est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et qu'elle n'est pas la fonction nulle, alors l'ensemble de ses zéros dans Ω est au plus dénombrable.

Corollaire 4.4.8 *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f, g \in H(\Omega)$. Si les fonctions f et g coïncident sur un ensemble qui admet un point d'accumulation dans Ω, alors elles coïncident sur Ω.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le principe des zéros isolés à la fonction

$$h = f - g.$$

Cette fonction est holomorphe sur l'ouvert connexe Ω car f et g le sont, et l'ensemble de ses zéros admet un point d'accumulation dans Ω. En particulier, l'ensemble A des points d'accumulation des zéros de cette fonction dans Ω n'est pas vide. Donc $A = \Omega$, et donc $Z(h) = \Omega$. en particulier, $f = g$ dans Ω. ∎

Remarque 4.4.9 *Une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω est donc entièrement déterminée par ses valeurs sur n'importe quel sous-ensemble de Ω admettant un point d'accumulation dans Ω.*

Remarque 4.4.10 *L'hypothèse de connexité de Ω est importante. Sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \neq 0\}$, on peut définir les fonctions*

$$f : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 0 \end{pmatrix} \qquad et \qquad g : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} 1 & si\ \Im(z) < 0 \\ 0 & si\ \Im(z) > 0 \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Ces deux fonctions sont holomorphes sur l'ouvert Ω, et elles coïncident sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$. Elles ne coïncident cependant sur l'ouvert Ω tout entier. Remarquons que l'ouvert Ω n'est pas connexe.

4.4.3 La classification des singularités isolées

On note dans cette section pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$,

$$B(a, r[' = B(a, r[\setminus\{a\},$$

la boule ouverte de centre a et de rayon r privée de son centre. L'ensemble $B(a, r['$ est ouvert.

Définition 4.4.11 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de $\Omega \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que a* **est une singularité isolée de** *f (ou que f* **présente une singularité isolée en** *a) lorsque f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$.*

Définition 4.4.12 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de $\Omega\setminus\{a\}$ dans $\mathbb{C}$ présentant une singularité isolée en a. On dit que la singularité isolée a est* **effaçable** *lorsque f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.*

Théorème 4.4.13 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de $\Omega \backslash \{a\}$ dans $\mathbb{C}$ présentant une singularité isolée en a. Si f est bornée au voisinage de a, alors la singularité de f en a est effaçable. C'est-à-dire que, s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r[\subset \Omega$ et $f(B(a, r['))$ est borné, alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.*

Preuve. Considérons la fonction

$$h : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Observons que la fonction h est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$, car f l'est. Par ailleurs, pour $z \in \Omega \setminus \{a\}$, on a

$$h(z) = 0 + 0 \times (z-a) + (z-a)^2 f(z). \tag{4.38}$$

Soit $M, r > 0$ tels que $B(a, r[\subset \Omega$ et

$$\forall z \in B(a, r[', \qquad |f(z)| \leq M.$$

Pour $z \in B(a, r[', ceci implique

$$\left| \frac{h(z) - h(a)}{z - a} - 0 \right| \leq M|z - a|.$$

On en déduit que h est $\mathbb{C}$-dérivable en a et $h'(a) = 0$. Par suite, la fonction h est holomorphe sur Ω. Par le théorème 4.3.63, il vient qu'il existe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins égal à r et

$$\forall z \in B(a, r[, \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

Puisque $c_0 = h(a) = 0$ et $c_1 = h'(a) = 0$, il vient que

$$\forall z \in B(a, r[, \qquad h(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+2} (z-a)^n. \tag{4.39}$$

Utilisant (4.38) et (4.39), il vient que

$$\forall z \in B(a, r[', \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+2} (z-a)^n.$$

Prolongeant f en a en posant $f(a) = c_2$, il vient en utilisant l'égalité ci-dessus

$$\forall z \in B(a, r[, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+2} (z-a)^n.$$

Ceci implique, par le théorème 4.2.1, que la fonction f prolongée est $\mathbb{C}$-dérivable en a. Ceci implique qu'elle est holomorphe sur Ω. Donc f a une singularité effaçable en a. ∎

Théorème 4.4.14 (de classification des singularités isolées) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $a \in \Omega$. Soit f une fonction de $\Omega \backslash \{a\}$ dans $\mathbb{C}$ présentant une singularité isolée en a. On est dans exactement l'un des trois cas suivants*

1. *La fonction f a une singularité effaçable en a.*

2. Il existe $m \in \mathbb{N}^\star$, et $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ avec $c_m \neq 0$ tels que la fonction

$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k},$$

admet une singularité effaçable en a.

3. Pour tout $r > 0$ tel que $B(a, r[\subset \Omega$, $f(B(a, r[')$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Définition 4.4.15 *Dans le cas 2, on dit que f a une* **singularité polaire** *en a. L'entier $m \in \mathbb{N}^\star$ et les coefficients $c_1, \ldots, c_m$ avec $c_m \neq 0$ sont uniques (exercice). Le nombre complexe c_1 s'appelle le* **résidu** *de f en a. On le note $\operatorname{Res}(f, a)$. La fonction $z \mapsto \sum_{n=1}^{m} c_n/(z-a)^n$ s'appelle la* **partie polaire** *ou encore la* **partie principale** *de f en a.*

Définition 4.4.16 *Dans le cas 3, on dit que f a une* **singularité essentielle** *en a. Il est équivalent de dire que, quel que soit $\omega \in \mathbb{C}$, il existe une suite z_n de points de $\Omega \setminus \{a\}$ qui tend vers a telle que $f(z_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \omega$.*

Remarque 4.4.17 *On peut tester la nature d'une singularité isolée en considérant le module de f : la singularité isolée de f en a est*

1. *effaçable lorsque $|f|$ admet une limite finie en a ;*
2. *polaire lorsque $|f|$ tend vers $+\infty$ en a ;*
3. *essentielle lorsque $|f|$ n'a pas de limite (finie ou infinie) en a.*

Preuve. Supposons que l'on n'est pas dans le cas 3. Dans ce cas, il existe $\omega \in \mathbb{C}$ et $r, \delta > 0$ tels que

$$\forall z \in B(a, r[', \qquad |f(z) - \omega| \geq \delta. \tag{4.40}$$

Ceci permet de définir la fonction

$$g : \begin{pmatrix} B(a, r[' & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{f(z)-\omega} \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est holomorphe sur $B(a, r['$, et elle a donc une singularité isolée en a. De plus, elle ne s'annule pas sur $B(a, r['$. L'inégalité (4.40) implique que

$$\forall z \in B(a, r[', \qquad |g(z)| = \frac{1}{|f(z) - \omega|} \leq \frac{1}{\delta}.$$

En particulier, la fonction g est bornée au voisinage de a. Par le théorème 4.4.13, la singularité isolée de g en a est donc effaçable. Notons encore g le prolongement holomorphe de g à $B(a, r[$ tout entier. Observons que

$$\forall z \in B(a, r[', \qquad f(z) = \omega + \frac{1}{g(z)}. \tag{4.41}$$

Distinguons deux cas :

— Soit $g(a) \neq 0$. On déduit de (4.41) que f est bornée au voisinage de a. Par le théorème 4.4.13, la fonction f a une singularité effaçable en a et on est dans le cas 1.

— Soit $g(a) = 0$. Dans ce cas, puisque g ne s'annule pas sur $B(a, r[')$, le principe des zéros isolés (théorème 4.4.3) assure qu'il existe $m \in \mathbb{N}^\star$ et $h \in H(B(a, r[)$ avec $h(a) \neq 0$ tels que

$$\forall z \in B(a, r[', \qquad g(z) = (z-a)^m h(z). \tag{4.42}$$

Puisque g ne s'annule pas dans $B(a, r['$, l'égalité ci-dessus implique que h non plus. On en déduit que h ne s'annule pas dans $B(a, r[$. Par suite, $h_1 : z \mapsto 1/h(z)$ est une fonction holomorphe sur $B(a, r[$. Par le théorème 4.3.63 de développement en série de puissances, il existe une suite complexe $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto d_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est au moins égal à r et l'on a

$$\forall z \in B(a, r[, \qquad h_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z-a)^n.$$

Des égalités (4.41) et (4.42), on tire que pour tout $z \in B(a, r['$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \omega + (z-a)^{-m} h_1(z) \\ &= \omega + (z-a)^{-m} \left(\sum_{n=0}^{m-1} d_n (z-a)^n + \sum_{n=m}^{+\infty} d_n (z-a)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{(z-a)^{m-n}} + \omega + \sum_{n=m}^{+\infty} d_n (z-a)^{n-m} \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{d_{m-n}}{(z-a)^n} + \left(\omega + \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z-a)^n \right). \end{aligned}$$

Posant pour tout $n \in \{1, \dots, m\}$, $c_n = d_{n-m}$, on a $c_m = d_0 = h_1(0) = 1/h(a) \neq 0$, et la fonction $z \mapsto f(z) - \sum_{n=1}^{m} c_n/(z-a)^n$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $B(a, r[$ tout entier, car elle est égale sur $B(a, r['$ à la fonction $z \mapsto \omega + \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m}(z-a)^n$. On est donc dans le cas 2.

■

4.4.4 Le théorème de Liouville

Le théorème 4.4.20 de Liouville repose sur le lemme suivant, dont le résultat est intéressant en lui-même.

Lemme 4.4.18 *Soit $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Soit $f \in H(B(a, R[, \mathbb{C})$. Par le théorème 4.3.63, il existe une suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $z \in B(a, R[$, la série de terme général $c_n(z-a)^n$ converge absolument et l'on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

Dans ce cas, pour tout $r \in]0, R[$, la série de terme général positif $|c_n|^2 r^{2n}$ converge (absolument) et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta. \tag{4.43}$$

Preuve. La première partie du lemme est une conséquence directe du théorème 4.3.63 et de la propriété 1.5.9. Montrons la seconde partie du lemme. Soit $r \in]0, R[$. Puisque la fonction f

est holomorphe sur $B(a,R[$, elle est continue sur cet ouvert. Puisque la fonction $\theta \mapsto a + r\mathrm{e}^{i\theta}$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $B(a,R[$, il vient par composition que la fonction $g : \theta \mapsto f(a+r\mathrm{e}^{i\theta})$ est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Dans le but d'appliquer la formule de Parseval-Plancherel du théorème 1.6.43 à la fonction g, calculons ses coefficients de Fourier. Observons que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a + r\mathrm{e}^{i\theta} - a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Puisque la série de terme général $(c_n(z-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument pour tout $z \in B(a,R[$, il vient que la série de terme général $(c_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument. En particulier, la série de terme général $(|c_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (absolument). Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |c_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}| = |c_n|r^n,$$

on déduit que la série de fonctions dans le membre de droite de (4.44) converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, puisque la fonction $\theta \mapsto \mathrm{e}^{-ip\theta}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, la série de fonctions de terme général $(\theta \mapsto c_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{-ip\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\theta \mapsto g(\theta)\mathrm{e}^{-ip\theta}$. Fixons $p \in \mathbb{Z}$. En utilisant le théorème 1.3.1, il vient que la série complexe de terme général $\left(\int_0^{2\pi} c_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\mathrm{e}^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}\right)\mathrm{e}^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_n r^n \mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\mathrm{d}\theta\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la propriété 1.6.11, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\mathrm{d}\theta = 0,$$

si $p \neq n$ et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-p)\theta}\mathrm{d}\theta = 1,$$

si $p = n$. Ceci implique que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier $c_p(g)$ d'ordre p de la fonction g s'écrit

$$c_p(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\mathrm{e}^{-ip\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \\ c_p r^p & \text{si } p \geq 0 \end{cases}. \tag{4.45}$$

Par la formule de Parseval-Plancherel du théorème 1.6.43, puisque $g \in \mathcal{C}^0_{2\pi} \subset \mathcal{R}_{2\pi}$, il vient que la série de terme général $(|c_{-p}(g)|^2 + |c_p(g)|^2)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et l'on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta)|^2\mathrm{d}\theta = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(g)|^2.$$

Utilisant la définition de g et le calcul (4.45), on obtient la convergence de la série de terme général positif $(|c_p|^2 r^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et (4.43). ■

Définition 4.4.19 *On appelle* **fonctions entières** *les éléments de $H(\mathbb{C})$, c'est-à-dire les fonctions holomorphes sur $\Omega = \mathbb{C}$ tout entier.*

Le théorème de Liouville apparaît comme une conséquence immédiate du lemme 4.4.18.

Théorème 4.4.20 (de Liouville pour les fonctions entières) *Si une fonction entière est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante sur $\mathbb{C}$.*

Remarque 4.4.21 *La réciproque de ce théorème est triviale : toute fonction constante sur $\mathbb{C}$ est entière et bornée sur $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit $f \in H(\mathbb{C})$. Notons $M > 0$ un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{C}$. Par le théorème 4.3.63, il existe une suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infini, et l'on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n. \tag{4.46}$$

Par le lemme 4.4.18 en $a = 0$ et $r > 0$, on a que la série de terme général positif $(|c_n|^2 r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(0 + r\mathrm{e}^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

En particulier, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r > 0, \qquad |c_n|^2 r^{2n} \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(0 + r\mathrm{e}^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^2 \mathrm{d}\theta = M^2.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $r \mapsto |c_n|^2 r^{2n}$ est bornée sur $]0, +\infty[$. Ceci implique que, pour $n \geq 1$, $|c_n|^2 = 0$, donc $c_n = 0$. Utilisant (4.46), on en déduit que f est constante sur $\mathbb{C}$. ■

4.4.5 Le principe du maximum

Théorème 4.4.22 (principe du maximum) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $a \in \Omega$, et $r > 0$ tel que $B(a, r] \subset \Omega$. Pour toute fonction $f \in H(\Omega)$, on a*

$$|f(a)| \leq \max_{\theta\in\mathbb{R}} |f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})|. \tag{4.47}$$

De plus, il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si f est constante dans Ω.

Remarque 4.4.23 *En particulier, si f est une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe, alors son module n'admet de maximum local en aucun point.*

Preuve. Observons que, sous les hypothèses du théorème, la fonction f est holomorphe sur Ω, donc continue sur Ω. Par composition, la fonction $g : \theta \mapsto f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})$ est continue sur $\mathbb{R}$, et elle est 2π-périodique. En particulier, son module est borné sur $\mathbb{R}$ et y atteint ses bornes. Ainsi, le second membre de l'inégalité (4.47) est bien défini.

Montrons tout d'abord que (4.47) a lieu. Pour cela, choisissons $r_1 > r$ de sorte que $B(a, r_1[\subset \Omega$ [20]. La fonction f est holomorphe dans Ω donc elle l'est dans l'ouvert $B(a, r_1[$ par restriction. Puisque le chemin fermé $\mathcal{C}^+(a, r]$ est tracé dans cet ouvert, la formule de Cauchy (théorème 4.3.62) dans cet ouvert convexe assure que

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}^+(a,r]} \frac{f(\omega)}{\omega - a}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + r\mathrm{e}^{it})}{a + r\mathrm{e}^{it} - a} ir\mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t. \qquad (4.48)$$

On en déduit l'inégalité (4.47).
Montrons maintenant la seconde partie du théorème. Si la fonction f est constante sur Ω, (4.47) est une égalité. Réciproquement, supposons (4.47) est une égalité. Dans ce cas,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad |f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})| \leq |f(a)|.$$

Élevant au carré et intégrant cette inégalité sur une période, on obtient en divisant le résultat par 2π,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \leq |f(a)|^2. \qquad (4.49)$$

Par le théorème (4.3.63), il existe une suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que le rayon de convergence R de la série de puissances de terme général $(c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement plus grand que r [21], et

$$\forall z \in B(a, R[, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n. \qquad (4.50)$$

Utilisant le lemme 4.4.18 et le fait que $c_0 = f(a)$, l'inégalité (4.49) fournit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 r^{2n} = |f(a)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq |f(a)|^2. \qquad (4.51)$$

D'où l'on tire que pour tout $n \geq 1$, $c_n = 0$. Ainsi, f est constante dans $B(a, R[$ en utilisant (4.50). Par connexité de Ω, le principe des zéros isolés assure que f est constante dans Ω. ■

Corollaire 4.4.24 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $a \in \Omega$, et $r > 0$ tel que $B(a, r] \subset \Omega$. Pour toute fonction $f \in H(\Omega)$, on a*

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}} |f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})| \leq |f(a)|. \qquad (4.52)$$

Supposons de plus que f ne s'annule pas sur $B(a, r]$. Dans ce cas, il y a égalité dans (4.52) *si et seulement si f est constante sur l'ouvert connexe Ω.*

Preuve. On procède comme dans le théorème précédent pour montrer (4.52) en établissant que l'égalité (4.48) est encore valide. Supposons que f ne s'annule pas sur $B(a, r]$ et traitons du cas d'égalité dans (4.52). Si f est constante sur Ω, l'inégalité (4.52) est une égalité. Réciproquement, supposons que (4.52) est une égalité. Par continuité de f sur Ω, il existe $R > 0$ tel que $B(a, r] \subset B(a, R[\subset \Omega$ tel que f ne s'annule pas dans $B(a, R[$. On en déduit que la fonction $h = 1/f$ est holomorphe dans l'ouvert connexe $B(a, R[$. On peut appliquer le théorème 4.4.22 à cette fonction pour obtenir

$$|h(a)| \leq \max_{\theta\in\mathbb{R}} |h(a + r\mathrm{e}^{i\theta})|. \qquad (4.53)$$

20. Ceci est possible, même lorsque Ω n'est pas $\mathbb{C}$ tout entier, car la distance du compact $B(a, r]$ au fermé $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est strictement positive.
21. car $B(a, r] \subset \Omega$, donc, lorsque Ω n'est pas $\mathbb{C}$ tout entier, $d(a, \Omega^C) > r$.

Puisque
$$h(a)=\frac{1}{f(a)} \qquad \text{et} \qquad \max_{\theta\in\mathbb{R}}|h(a+re^{i\theta})|=\max_{\theta\in\mathbb{R}}\frac{1}{|f(a+re^{i\theta})|}=\frac{1}{\min_{\theta\in\mathbb{R}}|f(a+re^{i\theta})|},$$
il vient que l'inégalité (4.53) est équivalente à l'inégalité (4.52). Observons que l'on a égalité dans (4.53) si et seulement s'il y a égalité dans (4.52). Or, il y a égalité dans (4.52) par hypothèse. Donc il y a égalité dans (4.53). Par le théorème 4.4.22, la fonction h est constante dans l'ouvert connexe $B(a,R[$. Par suite, la fonction $f=1/h$ est également constante dans l'ouvert $B(a,R[$. On en déduit que cette dernière fonction est constante dans l'ouvert connexe Ω par le principe des zéros isolés (théorème 4.4.3). ■

4.4.6 Le théorème fondamental de l'algèbre

Comme son nom ne l'indique pas, le théorème fondamental de l'algèbre est, intrinsèquement, un résultat d'analyse. Il porte parfois le nom de théorème de D'Alembert, ou de théorème de D'Alembert-Gauss.

Théorème 4.4.25 (fondamental de l'algèbre) *Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 1. Alors,*
$$\exists z\in\mathbb{C}, \qquad P(z)=0.$$

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que le coefficient de plus haut degré de P est égal à 1. Notant $d\in\mathbb{N}^\star$ le degré de P, on note pour $z\in\mathbb{C}$,
$$P(z)=z^d+a_{d-1}z^{d-1}+\cdots+a_1z+a_0,$$
pour certains $a_{d-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire inverse, on obtient
$$\begin{aligned}|P(z)| &\geq |z^d|-\left|\sum_{k=0}^{d-1}a_kz^k\right|\\ &\geq |z|^d-\sum_{k=0}^{d-1}|a_k||z|^k\\ &\geq |z|^d\left(1-\sum_{k=0}^{d-1}|a_k|\frac{1}{|z|^{d-k}}\right).\end{aligned} \tag{4.54}$$
Observons que pour tout $k\in\{0,\ldots,d-1\}$, on a $d-k\geq 1$ et donc
$$\frac{1}{|z|^{d-k}}\underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
Par suite,
$$1-\sum_{k=0}^{d-1}|a_k|\frac{1}{|z|^{d-k}}\underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$
Utilisant (4.54), on en déduit que
$$|P(z)|\underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$
En particulier, il existe $R>0$ tel que
$$\forall z\in\mathbb{C}, \qquad \Big(|z|\geq R \quad\Longrightarrow\quad |P(z)|\geq|P(0)|+1\Big).$$

Supposons par l'absurde que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Alors la fonction $f : z \mapsto 1/P(z)$ est également entière et vérifie, avec l'inégalité précédente, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq R$,

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{1}{|P(0)| + 1}.$$

En particulier,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad |f(0 + Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{|P(0)| + 1},$$

et donc

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(0 + Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{|P(0)| + 1} < \frac{1}{|P(0)|} = |f(0)|.$$

Ainsi, f contredit le principe du maximum (théorème 4.4.22). On en déduit que P s'annule sur $\mathbb{C}$. ■

Corollaire 4.4.26 *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k).$$

Preuve. On utilise le théorème précédent, et le fait que, si $P \in \mathbb{C}$ est un polynôme de degré au moins 1 à coefficients complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $P(\lambda) = 0$ si et seulement s'il existe un polynôme non nul Q tel que $P = (X - \lambda)Q$ (ce qui permet de recommencer avec Q tant que le degré de Q est au moins égal à 1). ■

4.4.7 Estimations de Cauchy

On a vu que les fonctions holomorphes possèdent des propriétés plus "rigides" que les fonctions dérivables d'une variable réelle (elles sont infiniment dérivables dès qu'elles sont dérivables une fois ; elles sont caractérisées sur un ouvert connexe par leurs valeurs sur un ensemble ayant un point d'accumulation dans l'ouvert, *etc*). Une autre particularité remarquable des fonctions holomorphes est que l'on peut estimer leurs dérivées à partir des fonctions elles-mêmes. C'est l'esprit des estimations de Cauchy que nous allons préciser maintenant.

Théorème 4.4.27 (Estimations de Cauchy dans un disque) *Soit $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Soit $f \in H(B(a, R[)$, dont le module est borné par $M \geq 0$ sur $B(a, R[$. On a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!}{R^n} M. \tag{4.55}$$

Preuve. Par le théorème 4.3.63, il existe une suite complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que le rayon de la série de puissances de terme général $(z \mapsto c_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est au moins égal à R et

$$\forall z \in B(a, R[, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n.$$

Utilisant le corollaire 4.3.66, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = f^{(n)}(a)/(n!)$. Fixons $r \in]0, R[$ et appliquons le lemme 4.4.18 qui assure que la série de terme général positif $(|f^{(n)}(a)|^2 r^{2n}/(n!)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \mathrm{d}\theta. \tag{4.56}$$

L'hypothèse de majoration sur le module de f dans $B(a, R[$ implique que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \leq M^2.$$

On en déduit, en minorant la somme de la série dans (4.56) par son $n^{\text{ème}}$ terme, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in]0, R[, \qquad \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|^2 r^{2n} \leq M^2.$$

Fixant $n \in \mathbb{N}$ et faisant tendre r vers R, on obtient (4.55) en prenant la racine carrée de l'inégalité obtenue. ∎

Une conséquence des estimations de Cauchy ci-dessus est que la convergence uniforme sur les compacts d'un ouvert d'une suite de fonctions holomorphes implique la convergence uniforme sur les compacts de la suite des dérivées. Et le théorème de Cauchy 4.3.58 et le théorème de Morera 4.4.1 assurent que la limite est nécessairement holomorphe ; la limite de la suite des dérivées étant alors la dérivée de la limite de la suite.

Théorème 4.4.28 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f uniformément sur les compacts de Ω. Alors, la fonction f est holomorphe sur Ω et la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f' uniformément sur les compacts de Ω.*

Preuve. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est holomorphe sur Ω, elle est continue sur Ω par la propriété 4.1.19. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de Ω, la fonction f est continue sur Ω par la propriété 1.2.22. Justifions que la fonction limite f est elle-même holomorphe sur Ω. Soit Δ un triangle inclus dans Ω. Observons que $\partial\Delta \subset \Delta \subset \Omega$. De plus, $\partial\Delta$ est fermée et bornée, donc compacte dans $\mathbb{C}$. Ainsi, $\partial\Delta$ est une partie compacte incluse dans Ω. On en déduit que la suite $(\|f_n - f\|_{\infty,\partial\Delta})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Utilisant l'inégalité (4.14) de la propritété 4.3.11, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_{\partial\Delta} f_n(\omega)\mathrm{d}\omega - \int_{\partial\Delta} f(\omega)\mathrm{d}\omega \right| = \left| \int_{\partial\Delta} (f_n(\omega) - f)\, \mathrm{d}\omega \right| \leq L(\partial\Delta)\|f_n - f\|_{\infty,\partial\Delta}.$$

Ceci implique que

$$\int_{\partial\Delta} f_n(\omega)\mathrm{d}\omega \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\partial\Delta} f(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Or, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est holomorphe dans Ω, le théorème de Cauchy dans un triangle 4.3.58 assure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\partial\Delta} f_n(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

On en déduit que

$$\int_{\partial\Delta} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

Ceci valant quel que soit le triangle inclus dans l'ouvert Ω, le théorème de Morera 4.4.1 assure que $f \in H(\Omega)$. Montrons maintenant que la suite f_n' converge uniformément sur les compacts de Ω vers f'. Pour cela, considérons un compact K inclus dans Ω. Il existe alors [22] $\delta > 0$ suffisamment petit pour que

$$K_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, K) \leq \delta\} \subset \Omega.$$

Cette partie est fermée comme image réciproque de $[0, \delta]$ par une application continue sur $\mathbb{C}$ (on renvoie à la propriété 1.1.8 pour justfier que l'application $z \mapsto d(z, K)$ est continue sur $\mathbb{C}$). Elle est de plus bornée car K l'est. Donc K_δ est une partie compacte incluse dans Ω. De plus, elle vérifie, par construction, que

$$\forall z \in K, \qquad B(z, \delta] \subset K_\delta \subset \Omega.$$

Puisque les fonctions f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont holomorphes sur Ω d'après ce qui précède, on obtient, pour tout $z \in K$, en appliquant les estimations de Cauchy du théorème 4.4.27 sur la boule fermée de centre z et de rayon δ, à la fonction $f_n - f$ qui est holomorphe sur l'ouvert Ω contenant cette boule fermée,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |(f_n - f)'(z)| \leq \frac{1}{\delta} \times (1!) \times \|f_n - f\|_{\infty, B(z,\delta]}.$$

En particulier, puisque $B(z, \delta] \subset K_\delta$ quel que soit $z \in K$, on a

$$\forall z \in K, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n' - f'(z)| \leq \frac{1}{\delta} \times (1!) \times \|f_n - f\|_{\infty, K_\delta}.$$

Le majorant ci-dessus étant indépendant de $z \in K$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n' - f'\|_{\infty,K} \leq \frac{1}{\delta} \times (1!) \times \|f_n - f\|_{\infty, K_\delta}.$$

Puisque la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur les compacts de Ω, elle converge uniformément vers f sur K_δ. On en déduit que

$$f_n' \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CVU sur } K}{\longrightarrow}} f'.$$

Ceci valant pour tout compact $K \subset \Omega$, il vient que la suite de fonctions de terme général $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f' sur les compacts de Ω. ■

Remarque 4.4.29 *On en déduit évidemment du théorème 4.4.28 que, sous les mêmes hypothèses, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément sur les compacts de Ω.*

4.5 Le théorème de Cauchy global

Le but de cette section est de généraliser le théorème de Cauchy "local" 4.3.60, valable pour un chemin fermé tracé dans un ouvert convexe, à des objets plus généraux (ce seront des cycles) tracés dans des ouverts généraux. On donnera un énoncé précis en 4.5.14. En section 4.5.1, nous

22. Dans le cas $\Omega = \mathbb{C}$, c'est évident. Sinon, dans le cas Ω strictement inclus dans $\mathbb{C}$, la partie Ω^C est un fermé non vide, dont l'interection avec K est vide (car $K \subset \Omega$). On peut alors par exemple utiliser le résultat de l'exercice 1.1.44 qui assure que

$$\inf\{|z - k| \mid z \in \Omega^C, \ k \in K\}$$

est strictement positif.

généralisons la notion de chemin fermé et d'indice. En section 4.5.2, nous donnons deux lemmes techniques qui seront utiles pour la preuve du théorème de Cauchy "global" 4.5.14. La section 4.5.3 est consacrée à l'énoncé et à la preuve du théorème de Cauchy global 4.5.14. Enfin, la section 4.5.4 introduit la notion d'homotopie entre chemins fermés tracés dans un ouvert de $\mathbb{C}$ et la notion d'ouvert simplement connexe.

4.5.1 Chaînes et cycles

Remarque 4.5.1 *Soit γ un chemin tracé dans $\mathbb{C}$. La fonction*

$$I_\gamma : \begin{pmatrix} \mathcal{C}^0(\gamma^\star, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \int_\gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega \end{pmatrix},$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(\gamma^\star, \mathbb{C})$. Elle est de plus continue lorsqu'on munit $\mathcal{C}^0(\gamma^\star, \mathbb{C})$ de la norme infinie (voir la propriété 4.3.11).

Définition 4.5.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ des chemins tracés dans $\mathbb{C}$. On définit une chaîne Γ comme suit. On définit une forme linéaire I_Γ sur l'espace $\mathcal{C}^0(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} \gamma_k^\star, \mathbb{C})$ en posant*

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} \gamma_k^\star, \mathbb{C}), \qquad I_\Gamma(f) := I_{\gamma_1}(f) + \dots + I_{\gamma_n}(f).$$

De manière équivalente, on note

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} \gamma_k^\star, \mathbb{C}), \qquad \int_\Gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

que l'on résume parfois en

$$\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n.$$

On appelle **chaîne** *toute somme finie de chemins tracés dans $\mathbb{C}$ au sens ci-dessus.*

Définition 4.5.3 *Avec les notations de la définition précédente, lorsque tous les chemins γ_k pour $k \in \{1, \dots, n\}$ sont fermés, la chaîne Γ est appelée* **cycle**.

Remarque 4.5.4 *Un cycle est donc une chaîne ; l'inverse n'est pas vrai en général. Un chemin est donc une chaîne ; l'inverse n'est pas vrai en général. Un chemin fermé est donc un cycle ; l'inverse n'est pas vrai en général.*

Remarque 4.5.5 *Il n'y a évidemment pas d'unicité dans l'écriture d'une chaîne comme somme de chemins, ni dans l'écriture d'un cycle comme somme de chemins fermés.*

Définition 4.5.6 *Avec les notations précédentes, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, la chaîne (ou le cycle) Γ est dite (ou dit)* **tracé dans** Ω *lorsque pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, γ_k est tracé dans Ω.*

Définition 4.5.7 *Soit $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ une chaîne. On appelle* **support de** Γ*, ou parfois* **image de** Γ*, l'ensemble*

$$\Gamma^\star := \overset{n}{\underset{k=0}{\cup}} \gamma_k^\star.$$

Remarque 4.5.8 *On définit ainsi de manière consistante la définition 4.3.7. C'est-à-dire que, lorsque* $\Gamma = \gamma_1$ *est un chemin, les deux définitions coïncident.*

On définit comme suit une généralisation de l'indice d'un point par rapport à un chemin fermé pour les cycles.

Définition 4.5.9 *Soit* $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ *un cycle tracé dans* $\mathbb{C}$*. Pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$*, on définit* **l'indice de** z **par rapport à** Γ *en posant*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{1}{\omega - z} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{1}{\omega - z} \mathrm{d}\omega = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\gamma_k}(z).$$

Remarque 4.5.10 *Il s'agit bien sûr d'une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$*, à valeurs entières, constante sur les composantes connexes de* $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$*, nulle sur la composante connexe non bornée de* $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$*, comme on le vérifie à l'aide du théorème 4.3.49.*

4.5.2 Deux lemmes techniques

Lemme 4.5.11 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un ouvert et* $f \in H(\Omega)$*. La fonction*

$$g : \begin{pmatrix} \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\omega, z) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} & si\ z \neq \omega \\ f'(\omega) & si\ z = \omega \end{cases} \end{pmatrix}, \tag{4.57}$$

est continue sur $\Omega \times \Omega$*.*

Remarque 4.5.12 *Nous avons déjà vu, lors de la preuve de la formule de Cauchy dans un ouvert convexe (théorème 4.3.62) que, pour tout* $z \in \Omega$*, la fonction* $\omega \mapsto g(\omega, z)$ *est continue sur* Ω*. Il s'agit ici de montrer un résultat plus fort : la fonction* g *est continue par rapport au couple de variables* (z, ω) *sur* Ω^2*.*

Preuve. Notons

$$D = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{C}\}.$$

La partie D est fermée dans $\mathbb{C}^2$, donc $O = \mathbb{C}^2 \setminus D$ est ouverte dans $\mathbb{C}^2$. Par suite, l'ensemble $\Omega^2 \cap O$ est ouvert dans $\mathbb{C}^2$. Observons que la fonction g est continue sur $\Omega^2 \cap O$ comme quotient de fonctions continues sur $\Omega^2 \cap O$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\Omega^2 \cap O$. Justifions que la fonction g est continue sur $\Omega^2 \cap D$. On en conclura que g est continue sur Ω^2 tout entier. Soit $(a, a) \in \Omega^2 \cap D$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $f \in H(\Omega)$, le corollaire 4.3.65 du théorème 4.3.63 implique que $f' \in H(\Omega)$. En particulier, la fonction f' est continue sur Ω par la propriété 4.1.19. Ainsi, elle est continue en a. Ainsi, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r[\subset \Omega$ et

$$\forall z \in B(a, r[, \qquad |f'(z) - f'(a)| < \varepsilon. \tag{4.58}$$

Fixons $(b, c) \in B(a, r[^2$. Notons γ le segment $[b \to c]$ de sorte que

$$\gamma : \begin{pmatrix} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & tc + (1 - t)b \end{pmatrix}.$$

Par convexité de $B(a,r[$, on a $\gamma^\star \subset B(a,r[\subset \Omega$. Puisque $f \in H(\Omega)$ et puisque γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, la fonction $F : t \mapsto f(\gamma(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\forall t \in [0,1], \qquad F'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = (c-b)f'(\gamma(t)).$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, il vient que

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci s'écrit encore

$$f(c) - f(b) = (c-b)\int_0^1 f'(\gamma(t))\mathrm{d}t.$$

Supposons que $b \neq c$, ceci implique

$$g(c,b) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = \int_0^1 f'(\gamma(t))\mathrm{d}t.$$

Observant que $g(a,a) = f'(a) = \int_0^1 f'(a)\mathrm{d}t$, il vient que

$$g(c,b) - g(a,a) = \int_0^1 \left(f'(\gamma(t)) - f'(a)\right)\mathrm{d}t. \tag{4.59}$$

Cette dernière égalité est encore vraie lorsque $b = c$ (on a alors $\gamma(t) \equiv b$, et $g(b,b) - g(a,a) = \int_0^1 (f'(b) - f'(a))\mathrm{d}t$). Utilisant l'inégalité (4.58) et le fait que γ est tracé dans $B(a,r[$, l'inégalité (4.59) fournit

$$\forall (b,c) \in B(a,r[^2, \qquad |g(b,c) - g(a,a)| \leq \int_0^1 |f'(\gamma(t) - f'(a))|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \varepsilon \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Puisque ceci vaut quel que soit $\varepsilon > 0$, il vient que g est continue en (a,a). Ceci valant quel que soit $(a,a) \in \Omega^2 \cap D$, il vient que g est continue sur $\Omega^2 \cap D$. Ainsi, la fonction g est continue sur $\Omega^2 \cap D$ et sur $\Omega^2 \cap O$. On en déduit que g est continue sur Ω^2 tout entier. ■

Lemme 4.5.13 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit g une fonction continue sur Ω^2 à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $z \in \Omega$. Quels que soient le compact $K \subset \Omega$ et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Ω convergeant vers z, la suite de fonctions $(g(z_n,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(z,\cdot)$ uniformément sur K.*

Preuve. Soit $K \subset \Omega$ un compact, $z \in \Omega$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de Ω convergeant vers z. Posons

$$\tilde{K} = \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}\{z_n\}\right) \cup \{z\}.$$

La partie $\tilde{K}$ est compacte par le résultat de l'exercice 1.1.33. Remarquons qu'elle est incluse dans Ω. Puisque g est continue sur $\Omega \times \Omega$, elle est par restriction continue sur $\tilde{K} \times K$. Puisque $\tilde{K}$ et K sont compactes, le produit $\tilde{K} \times K$ est compact par la propriété 1.1.34. Par le théorème de Heine [23], la fonction g est uniformément continue sur $\tilde{K} \times K$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un $r > 0$ tel que quels que soient $(y_1,x_1),(y_2,x_2) \in \tilde{K} \times K$,

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < r \quad \Longrightarrow \quad |g(y_1,x_1) - g(y_2,x_2)| < \varepsilon. \tag{4.60}$$

Puisque la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|z_n - z| < r$. Utilisant (4.60), on en déduit que

$$\forall n \geq N, \quad \forall y \in K, \qquad |g(z_n,y) - g(z,y)| < \varepsilon.$$

23. Ou plutôt par une généralisation du théorème de Heine. Voir par exemple le théorème 7-5.22 de [12].

Ceci implique que

$$\forall n \geq N, \qquad \sup_{y\in K} |g(z_n, y) - g(z, y)| \leq \varepsilon.$$

On a ainsi montré que la suite de fonctions de terme général $(g(z_n, \cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(z, \cdot)$ uniformément sur le compact K. Ceci valant quel que soit le compact K, on en déduit le résultat.
■

4.5.3 Le théorème de Cauchy global

Théorème 4.5.14 (de Cauchy global) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Quel que soit le cycle Γ tracé dans Ω tel que*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \qquad \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0, \tag{4.61}$$

la fonction f vérifie

$$\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^\star, \qquad f(z) \times \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} \mathrm{d}\omega, \tag{4.62}$$

et

$$\int_\Gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0. \tag{4.63}$$

Preuve. Soit Ω et Γ vérifiant (4.61). Soit $f \in H(\Omega)$. Après avoir défini une fonction auxiliaire h sur Ω dont la nullité implique (4.62), nous montrerons successivement

1. que cette fonction h est holomorphe sur Ω,
2. que l'on peut prolonger h en une fonction entière φ grâce à (4.61),
3. que cette fonction φ est nulle sur $\mathbb{C}$, car elle est bornée sur $\mathbb{C}$ et tend vers 0 à l'infini (on utilisera le théorème de Liouville 4.4.20).

Ceci montrera la formule de Cauchy (4.62). On indiquera en toute fin de preuve comment en déduire (4.63).
Considérons la fonction g définie à partir de $f \in H(\Omega)$ par (4.57). Par le lemme 4.5.11, la fonction g est continue sur Ω^2. Puisque Γ est un cycle tracé dans Ω, on peut en particulier définir pour tout $z \in \Omega$,

$$h(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma g(z, \omega)\mathrm{d}\omega. \tag{4.64}$$

Observons que, si l'on montre que h est nulle sur $\Omega \setminus \Gamma^\star$, alors, par un calcul similaire à celui utilisé dans la preuve de la formule de Cauchy dans un ouvert convexe (théorème 4.3.62), on a (4.62). En effet, pour $z \in \Omega \setminus \Gamma^\star$ et $\omega \in \Gamma^\star$, on a

$$g(z, \omega) = \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z},$$

et l'on a donc

$$\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^\star, \qquad \Big(h(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(z) \times \Big(\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{1}{\omega - z}\mathrm{d}z\Big) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega\Big). \tag{4.65}$$

Étape 1 Montrons que la fonction h définie sur Ω en (4.64) est holomorphe sur Ω. Commençons par justifier que h est continue sur Ω. Pour cela, fixons $z \in \Omega$ et considérons une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Ω qui tend vers z. Par le lemme 4.5.13, la suite de fonctions $g(z_n,\cdot)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g(z,\cdot)$ sur les compacts de Ω. En particulier, la convergence est uniforme sur $\Gamma^\star$ (qui est un compact de Ω). Écrivons comme une somme de chemins fermés tracés dans Ω : $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$. Il vient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|h(z_n) - h(z)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma g(z_n,\omega)\mathrm{d}\omega - \int_\Gamma g(z,\omega)\mathrm{d}\omega\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \left(g(z_n,\omega) - g(z,\omega)\right)\mathrm{d}\omega\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \left(g(z_n,\omega) - g(z,\omega)\right)\mathrm{d}\omega\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^m \left|\int_{\gamma_k} \left(g(z_n,\omega) - g(z,\omega)\right)\mathrm{d}\omega\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^m L(\gamma_k)\|g(z_n,\cdot) - g(z,\cdot)\|_{\infty,\gamma_k^\star} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^m L(\gamma_k)\|g(z_n,\cdot) - g(z,\cdot)\|_{\infty,\Gamma^\star} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^m L(\gamma_k)\right)\|g(z_n,\cdot) - g(z,\cdot)\|_{\infty,\Gamma^\star}.
\end{aligned}$$

Ceci implique que la suite complexe $(h(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(z)$. Ceci valant quelle que soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers z, il vient que la fonction h est continue en z. Ceci valant pour tout $z \in \Omega$, il vient que la fonction h est continue sur Ω. Soit maintenant Δ un triangle tout entier inclus dans Ω. Par le théorème de Fubini [24] 2.3.24, puisque la fonction g est continue sur Ω^2 donc sur $\partial\Delta \times \Gamma^\star$,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} h(z)\mathrm{d}z &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta}\int_\Gamma g(z,\omega)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\int_{\partial\Delta} g(z,\omega)\mathrm{d}z\mathrm{d}\omega. \qquad (4.66)
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $z \mapsto g(z,\omega)$ est holomorphe sur $\Omega \setminus \{\omega\}$, et continue en ω. Par le théorème 4.4.13, elle a donc une singularité effaçable en ω et elle est donc holomorphe sur Ω. Par le théorème de Cauchy dans un triangle 4.3.58, il vient que

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \int_{\partial\Delta} g(z,\omega)\mathrm{d}z = 0.$$

24. Pour coller *stricto sensu* au théorème de Fubini 2.3.24, on peut écrire le bord de Δ (une fois choisie l'orientation) comme la somme de trois chemins de classe $\mathcal{C}^1$ paramétrés par le segment $[0,1]$; on peut également écrire chaque chemin γ_k comme une somme finie de $J_k \geq 1$ chemins de classe $\mathcal{C}^1$, paramétrés par des segments notés $([a_j^k, b_j^k])_{1\leq\leq j J_k}$. Découpant l'intégrale le long de Γ en la somme des intégrales sur les γ_k, puis la somme (sur $k \in \{1,\ldots,m\}$) de la somme (sur $j \in \{1,\ldots,J_k\}$) et l'intégrale le long du bord de Δ comme la somme de trois intégrales sur le segment $[0,1]$, on s'aperçoit, puisque, dans chaque "petite" intégrale, l'intégrande est une fonction continue sur $[0,1] \times [a_j^k, b_j^k]$ (on utilise que la fonction dérivée d'une chemin de classe $\mathcal{C}^1$ est continue), que l'on peut appliquer le théorème de Fubini 2.3.24 sur chacun des produits de segments $[0,1] \times [a_j^k, b_j^k]$. Il n'y a plus ensuite qu'à reformer les sommes et l'on obtient le résultat.

Utilisant (4.66), ceci implique que

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Ceci valant quel que soit le triangle Δ tout entier inclus dans Ω, le théorème de Morera 4.4.1 implique que $h \in H(\Omega)$.

Étape 2 Montrons que l'on peut prolonger h en une fonction définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Pour cela, notons

$$\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^\star \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}.$$

Rappelons que la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ est une fonction holomorphe donc continue sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$ (voir la remarque 4.5.10). Ainsi,

$$\Omega_1 = \mathrm{Ind}_\Gamma^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right),$$

est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, donc c'est un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$, donc c'est un ouvert de $\mathbb{C}$ (puisque $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$ est lui-même ouvert dans $\mathbb{C}$). Observons que l'hypothèse (4.61) implique que $\Omega^C = \mathbb{C} \setminus \Omega \subset \Omega_1$. On en déduit que

$$\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}. \tag{4.67}$$

Pour $z \in \Omega_1$, on a $z \notin \Gamma^\star$, et l'on peut donc définir

$$h_1(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega. \tag{4.68}$$

Utilisant la condition suffisante de développement en série de puissances [25] (lemme 4.3.1), la fonction h_1 est développable en série de puissances dans Ω_1. En particulier, elle est holomorphe sur l'ouvert Ω_1 par le théorème 4.2.1. Remarquons que, pour $z \in \Omega \cap \Omega_1$, on a $z \notin \Gamma^\star$ et donc

$$\begin{aligned}
h(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma g(z, \omega)\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega - f(z) \int_\Gamma \frac{1}{\omega - z}\mathrm{d}\omega\right) \\
&= h_1(z) - f(z) \underbrace{\mathrm{Ind}_\Gamma(z)}_{=0 \text{ car } z \in \Omega_1} \\
&= h_1(z).
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction h_1 coïncide avec h sur l'ouvert $\Omega \cap \Omega_1$. Ceci, avec (4.67), permet de définir la fonction

$$\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Omega \\ h_1(z) & \text{si } z \in \Omega_1 \end{cases} \end{pmatrix}.$$

25. Il suffit d'écrire que h_1 est la restriction à Ω_1 de la fonction h_2 définie sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$ par

$$h_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\mathrm{d}\omega,$$

et d'appliquer m fois le lemme 4.3.1 pour conclure que h_2 est la somme de m fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$.

La fonction φ est holomorphe sur Ω car h l'est (voir l'étape 1 de la preuve) et elle est holomorphe sur Ω_1 car h_1 l'est (voir ci-dessus). Avec (4.67), on en déduit que φ est entière. De plus, φ prolonge naturellement h.
Étape 3 Montrons que φ est nulle sur $\mathbb{C}$. Tout d'abord, l'ensemble $\Gamma^\star$ est borné, donc inclus dans une certaine boule $B(0,R]$ pour un certain $R>0$. Son complémentaire admet donc une unique composante connexe non bornée, laquelle contient le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $B(0,R]$. Dans cette composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\Gamma^\star$, on a nécessairement que Ind_Γ est identiquement nul, car chacun des Ind_{γ_k} est nul. Pas conséquent, cette composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\Gamma^\star$ est incluse dans Ω_1. Ainsi, pour $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|>R$, on a

$$\varphi(z)=h_1(z).$$

Or, pour $|z|>R$, on a également

$$\begin{aligned}
|h_1(z)| &= \left|\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega-z}\mathrm{d}\omega\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^m \left|\int_{\gamma_k}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\mathrm{d}\omega\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^m L(\gamma_k)\left\|\omega\mapsto\frac{f(\omega)}{\omega-z}\right\|_{\infty,\gamma_k^\star} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^m L(\gamma_k)\frac{\|f\|_{\infty,\gamma_k^\star}}{d(z,\gamma_k^\star)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^m L(\gamma_k)\right)\frac{\|f\|_{\infty,\Gamma^\star}}{d(z,\Gamma^\star)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|>R$, on a

$$|\varphi(z)|\leq\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^m L(\gamma_k)\right)\frac{\|f\|_{\infty,\Gamma^\star}}{d(z,\Gamma^\star)}\leq\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^m L(\gamma_k)\right)\frac{\|f\|_{\infty,\Gamma^\star}}{|z|-R}.$$

On en déduit que

$$\varphi(z)\underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow}0. \tag{4.69}$$

Or φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc elle est continue sur $\mathbb{C}$. Ainsi, la fonction φ est continue sur $\mathbb{C}$ et vérifie (4.69), donc elle est bornée sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville 4.4.20, elle est constante sur $\mathbb{C}$. Avec (4.69), cette constante est nulle. On en déduit que la restriction h de φ à Ω est nulle sur Ω, donc nulle sur $\Omega\setminus\Gamma^\star$. Ceci implique (4.62) comme on l'a indiqué en (4.65).
Montrons finalement que (4.63) a lieu. Pour cela, choisissons [26] $a\in\Omega\setminus\Gamma^\star$, et posons $F(z)=(z-a)f(z)$ pour $z\in\Omega$. La fonction F est holomorphe sur Ω car f l'est par hypothèse. En lui appliquant la première partie de ce théorème, on a

$$F(a)\times\mathrm{Ind}_\Gamma(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{F(\omega)}{\omega-a}\mathrm{d}\omega.$$

Puisque $F(a)=0$ et puisque l'intégrande ci-dessus s'écrit aussi $f(\omega)$, on en déduit (4.63). ■

Remarque 4.5.15 *Dans ce théorème de Cauchy global 4.5.14, on trouve dans* (4.63) *une généralisation de la formule de Cauchy dans un ouvert convexe (théorème 4.3.62) et dans* (4.62)*une*

26. On pourra réfléchir à la raison pour laquelle $\Omega\setminus\Gamma^\star\neq\emptyset$.

généralisation du théorème de Cauchy dans un ouvert convexe 4.3.60.

En effet, si Ω est un ouvert convexe et si γ est un chemin fermé tracé dans Ω, alors pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, la fonction $f : \omega \mapsto 1/(\omega - z)$ est holomorphe sur Ω. Par le théorème de Cauchy local 4.3.60, elle admet une primitive holomorphe sur Ω et son intégrale le long du chemin fermé γ est nulle. Pour le cycle $\Gamma := \gamma$, on en déduit que

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

Ainsi, la condition (4.61) *est systématiquement vérifiée lorsque Ω est convexe (écrire éventuellement $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ et répéter m fois le raisonnement ci-dessus puis sommer les indices (qui sont tous nuls)), et le théorème de Cauchy global s'applique en particulier dans ce cas.*

Corollaire 4.5.16 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit Γ_1 et Γ_2 deux cycles tracés dans Ω ayant même indice par rapport à tout point du complémentaire de Ω, c'est-à-dire tels que*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \qquad \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(z). \tag{4.70}$$

Pour toute fonction f holomorphe sur Ω, on a

$$\int_{\Gamma_1} f(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{\Gamma_2} f(\omega)\mathrm{d}\omega. \tag{4.71}$$

Preuve. Écrivons

$$\Gamma_1 = \gamma_{1,1} + \cdots + \gamma_{1,m_1},$$

pour un certain $m_1 \geq 1$, où $\gamma_{1,1}, \ldots, \gamma_{1,m_1}$ sont m_1 chemins fermés tracés dans l'ouvert Ω, et

$$\Gamma_2 = \gamma_{2,1} + \cdots + \gamma_{2,m_2},$$

pour un certain $m_2 \geq 1$, où $\gamma_{2,1}, \ldots, \gamma_{2,m_2}$ sont m_2 chemins fermés tracés dans l'ouvert Ω. Formons le cycle

$$\Gamma = \gamma_{1,1} + \cdots + \gamma_{1,m_1} + \gamma_{2,1}^- + \cdots + \gamma_{2,m_2}^-,$$

avec la convention définie à la propriété 4.3.16 pour les chemins renversés. L'hypothèse (4.70) implique pour le chemin Γ tracé dans Ω la relation (4.61). Pour une fonction $f \in H(\Omega)$, on a donc, par le théorème de Cauchy global 4.5.14

$$\int_\Gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

Ceci implique

$$\int_{\Gamma_1} f(\omega)\mathrm{d}\omega - \int_{\Gamma_2} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

On en déduit (4.71). ∎

Remarque 4.5.17 *Ce corollaire 4.5.16 permet, sous certaines hypothèses relatives à l'indice des points du complémentaire de l'ouvert Ω, de modifier des cycles sur lesquels on intègre sans changer la valeur de l'intégrale d'une fonction holomorphe sur l'ouvert Ω. Nous l'utiliserons dans la section suivante 4.5.4 consacrée aux chemins fermés homotopes.*

4.5.4 Homotopie entre chemins fermés

Comme on l'a vu à la propriété 4.3.13, lorsque γ est un chemin fermé tracé dans un ouvert Ω, on peut, quitte à effectuer un changement de paramétrage admissible, supposer qu'il est paramétré par le segment $[0,1]$. Nous le faisons systématiquement dans cette section.

Définition 4.5.18 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit γ_0 et γ_1 deux chemins fermés tracés dans Ω. On dit que* γ_0 **et** γ_2 **sont homotopes (en tant que chemins fermés) dans** Ω *s'il existe une application continue H de $[0,1]^2$ dans Ω telle que pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$,*

1. $H(s,0) = \gamma_0(s)$,
2. $H(s,1) = \gamma_1(s)$,
3. $H(0,t) = H(1,t)$.

Remarque 4.5.19 *Lorsque γ_0 et γ_1 sont deux chemins fermés homotopes dans l'ouvert Ω, en posant pour tout $(s,t) \in [0,1]$, $\gamma_t(s) = H(s,t)$, on obtient une famille "continue" (au sens où H est continue sur $[0,1]^2$) de "quasi-chemins" fermés (car H vérifie le point 3) tracés dans Ω (car H est à valeurs dans Ω) reliant le chemin γ_0 (car H vérifie le point 1) au chemin γ_1 (car H vérifie le point 2). Cette définition traduit donc l'intuition selon laquelle deux chemins fermés tracés dans un ouvert sont homotopes lorsque l'on peut déformer continûment l'un en l'autre en ne considérant que des "quasi-chemins" fermés tracés dans l'ouvert. Attention toutefois, dans cette définition, les "quasi-chemins" fermés intermédiaires γ_t pour $t \in]0,1[$ ne sont que continus : ils ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ a priori ; ce ne sont pas des chemins fermés au sens du cours stricto sensu.*

Définition 4.5.20 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et γ un chemin fermé tracé dans Ω. On dit que le chemin fermé γ est* **homotope à un point** *(ou encore* **d'homotopie nulle***) dans Ω lorsque γ est homotope dans Ω à un chemin fermé constant.*

Définition 4.5.21 *Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit* **simplement connexe** *lorsqu'il est connexe et de plus tout chemin fermé tracé dans Ω est homotope à un point dans Ω.*

Exemple 4.5.22 *Considérons les ouverts suivants :*
- $\mathbb{C}$ *est connexe et simplement connexe.*
- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *est connexe mais n'est pas simplement connexe.*
- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *n'est pas connexe, donc n'est pas simplement connexe. Remarquer que, pourtant, tout chemin fermé tracé dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est homotope à un point dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*
- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ *est simplement connexe.*

Propriété 4.5.23 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Si Ω est convexe, alors il est simplement connexe.*

Preuve. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$. La propriété 4.3.27 assure que Ω est connexe. Pour montrer que tout chemin fermé est homotope à un point dans Ω, distinguons deux cas. Si $\Omega = \emptyset$, alors il n'y a rien à vérifier. Sinon $\Omega \neq \emptyset$. Soit $a \in \Omega$ et γ un chemin fermé tracé dans Ω. L'application

$$H : \begin{pmatrix} [0,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (s,t) & \longmapsto & (1-t)\gamma(s) + ta \end{pmatrix},$$

est bien à valeurs dans Ω car Ω est convexe. De plus, c'est une application continue sur $[0,1]^2$. Enfin, elle vérifie pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$,

$$H(s,0) = \gamma(s), \qquad H(s,1) = a,$$

et

$$H(0,t) = (1-t)\gamma(0) + ta = (1-t)\gamma(1) + ta = H(1,t).$$

Ainsi, γ est homotope dans Ω au chemin constant égal à a. Ceci valant quel que soit le chemin fermé γ tracé dans Ω, il vient que l'ouvert Ω est simplement connexe. ■

Nous allons montrer que l'homotopie entre 2 chemins fermés tracés dans un ouvert laisse invariant l'indice des chemins par rapport aux points du complémentaire de l'ouvert (théorème 4.5.26). Pour cela, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 4.5.24 (d'invariance de l'indice) *Soit γ_0 et γ_1 deux chemins fermés tracés dans $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On suppose que*

$$\forall s \in [0,1], \qquad |\gamma_0(s) - \gamma_1(s)| < |z - \gamma_0(s)|. \tag{4.72}$$

Dans ce cas, $z \notin \gamma_0^\star \cup \gamma_1^\star$ et

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z). \tag{4.73}$$

Remarque 4.5.25 *Autrement dit, si, au fil du "temps" (noté s ci-dessus), deux chemins fermés γ_0 et γ_1 sont toujours strictement plus proches que l'un (fixé) des deux ne l'est d'un point z, alors le point z n'est sur aucun des supports des deux chemins fermés et il a même indice par rapport aux deux chemins fermés.*

Preuve. L'hypothèse (4.72) assure trivialement que $z \notin \gamma_0^\star$ et $z \notin \gamma_1^\star$. Ceci permet en particulier de définir l'application

$$\gamma : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \dfrac{\gamma_1(s) - z}{\gamma_0(s) - z} \end{pmatrix}.$$

La fonction γ est continue sur $[0,1]$ puisque γ_0 et γ_1 le sont, et son dénominateur ne s'annule pas. Puisque γ_0 et γ_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$, il en est de même de la fonction γ et, sur $[0,1]$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, on a

$$\gamma'(s) = \frac{\gamma_1'(s)}{(\gamma_0(s) - z)} - \gamma_0'(s)\frac{\gamma_1(s) - z}{(\gamma_0(s) - z)^2}.$$

Ceci implique que, sur le même ensemble, on a

$$\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} = \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - z} - \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - z}. \tag{4.74}$$

Par suite, la fonction γ' se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$, quitte à poser $\gamma'(s) = 0$ en un nombre fini de points où $\gamma_0'(s)$ ou $\gamma_1'(s)$ ne sont pas définis. Ainsi, γ est une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$. Puisque γ_0 et γ_1 sont des chemins fermés tracés dans $\mathbb{C}$, on a

$$\gamma(0) = \frac{\gamma_1(0) - z}{\gamma_0(0) - z} = \frac{\gamma_1(1) - z}{\gamma_0(1) - z} = \gamma(1).$$

On en déduit que γ est un chemin fermé tracé dans $\mathbb{C}$. Observons que pour tout $s \in [0,1]$, on a

$$\gamma(s) - 1 = \frac{(\gamma_1(s) - z) - (\gamma_0(s) - z)}{\gamma_0(s) - z} = \frac{\gamma_1(s) - \gamma_0(s)}{\gamma_0(s) - z}.$$

Par suite, l'hypothèse (4.72) implique

$$\forall s \in [0,1], \qquad |\gamma(s) - 1| < 1,$$

de sorte que γ est un chemin fermé tracé dans l'ouvert $B(1,1[$. En particulier, 0 est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^\star$. Par le théorème 4.3.49, il vient que

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0. \tag{4.75}$$

Ceci s'écrit encore

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\omega - 0} \mathrm{d}\omega = 0. \tag{4.76}$$

Or, en utilisant (4.74), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\omega - 0} \mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - 0} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \left(\frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - z} - \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - z} \right) \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Puisque $z \notin \gamma_0^\star$, la fonction $s \mapsto \gamma_0'(s)/(\gamma_0(s) - z)$ est[27] une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$. De même, puisque $z \notin \gamma_1^\star$, la fonction $s \mapsto \gamma_1'(s)/(\gamma_1(s) - z)$ est une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\omega - 0} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - z} \mathrm{d}\omega - \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - z} \mathrm{d}\omega = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z).$$

Utilisant (4.76), on en déduit (4.73). ■

On peut maintenant énoncer le théorème qui affirme que deux chemins fermés homotopes dans un ouvert ont même indice par rapport à tout point du complémentaire de l'ouvert.

Théorème 4.5.26 (d'invariance de l'indice) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit γ_0 et γ_1 deux chemins fermés tracés dans l'ouvert Ω. Si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω, alors*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \qquad \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z). \tag{4.77}$$

Preuve. Si $\Omega = \mathbb{C}$, alors il n'y a rien à démontrer. Sinon, $\Omega^C = \mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$. On se place dans ce cas pour le reste de la preuve. Nous allons fixer $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ et construire une famille finie de chemins fermés affines par morceaux, chacun étant proche du précédent et du suivant dans la famille, et telle que les premiers seront "proches" de γ_0 au sens de l'hypothèse 4.72 du lemme 4.5.24 et les derniers seront "proches" de γ_1. On appliquera ensuite un nombre fini de fois le lemme 4.5.24 pour conclure que l'indice de z ne change pas quand passe d'un chemin fermé à un autre.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Puisque γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω, il existe une fonction continue H de $[0,1]^2$ dans Ω vérifiant les points 1, 2 et 3 de la définition 4.5.18. Puisque $[0,1]^2$ est compact[28], l'ensemble $K = H([0,1]^2)$ est compact comme image continue d'un compact. Puisque H est à valeurs dans Ω, la partie K est une partie compacte incluse dans Ω. Puisque $K \subset \Omega$ est compact, puisque Ω^C est

27. On devrait dire "se prolonge en une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$".

28. On pourra revoir la propriété 1.1.34.

un fermé non vide, et puisque $K \cap \Omega^C = \emptyset$ [29], on a $d(K, \Omega^C) > 0$. En particulier, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad \forall (s,t) \in [0,1]^2, \qquad |H(s,t) - \alpha| > 2\varepsilon, \tag{4.78}$$

et ceci vaut par exemple pour $\alpha = z$. Par une généralisation du théorème de Heine [30], puisque la fonction H est continue sur le compact $[0,1]^2$, elle y est uniformément continue. En particulier, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\forall (x,y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in [0,1]^2, \qquad \Big(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| \leq \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad |H(x,y) - H(\tilde{x}, \tilde{y})| < \varepsilon \Big). \tag{4.79}$$

On peut alors définit $n+1$ chemins fermés polygonaux $(\tilde{\gamma}_k)_{0 \leq k \leq n}$ en posant pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $s \in [(i-1)/n, i/n]$,

$$\tilde{\gamma}_k(s) = H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \times (ns + 1 - i) + H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \times (i - ns), \tag{4.80}$$

de sorte que $\tilde{\gamma}_k$ relie de manière affine $H((i-1)/n, k/n)$ à $H(i/n, k/n)$ sur le segment $[(i-1)/n, i/n]$. Ainsi, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $s \in [(i-1)/n, i/n]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{\gamma}_k(s) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right| \\
&= \left| \left(H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right)(ns + 1 - i) + \left(H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right)(i - ns) \right| \\
&\leq \left| \left(H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right)(ns + 1 - i)\right| + \left| \left(H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right)(i - ns) \right| \\
&\leq \left| \left(H\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right)\right|(ns + 1 - i) + \left| \left(H\left(\frac{i-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right)\right|(i - ns) \\
&\leq \varepsilon(ns + 1 - i) + \varepsilon(i - ns) \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned} \tag{4.81}$$

en observant que $ns + 1 - i$ et $i - ns$ sont dans le segment $[0,1]$, que leur somme vaut 1, que

$$\left| s - \frac{i}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \left| s - \frac{i-1}{n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

et en utilisant conséquemment (4.79). Compte tenu de (4.78), cette inégalité (4.81) montre en particulier que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, le chemin fermé $\tilde{\gamma}_k$ est tracé dans Ω. Par ailleurs, en examinant ce que fournit (4.81) pour $k = 0$ et $k = n$, on obtient

$$\forall s \in [0,1], \qquad |\tilde{\gamma}_0(s) - \gamma_0(s)| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |\tilde{\gamma}_n(s) - \gamma_1(s)| \leq \varepsilon. \tag{4.82}$$

Observons que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, et $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|z - \tilde{\gamma}_k(s)| &\geq \left| z - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right| - \left| H\left(s, \frac{k}{n}\right) - \tilde{\gamma}_k(s)\right| \\
&> 2\varepsilon - \varepsilon \\
&> \varepsilon,
\end{aligned} \tag{4.83}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire inverse et les estimations (4.78) et (4.81). Enfin, utilisant une

29. Voir si besoin l'exercice 1.1.44. On pourrait par ailleurs ne justifier que le fait que $d(z, K) > 0$.
30. Voir par exemple le théorème 7-5.22 dans [12].

nouvelle fois (4.79) et la définition (4.80) de $\tilde{\gamma}_k$, on obtient

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \forall s \in [0,1], \qquad |\tilde{\gamma}_{k-1}(s) - \tilde{\gamma}_k(s)| \leq \varepsilon. \tag{4.84}$$

Il reste à utiliser $n+2$ fois le lemme 4.5.24 :

— Utilisant (4.82) et (4.78), on a

$$\forall s \in [0,1], \qquad |\gamma_0(s) - \tilde{\gamma}_0(s)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon < |z - \gamma_0(s)|.$$

Ceci permet d'appliquer le lemme 4.5.24 qui implique que

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_0}(z). \tag{4.85}$$

— Pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a en utilisant (4.84) et (4.83),

$$\forall s \in [0,1], \qquad |\tilde{\gamma}_k(s) - \tilde{\gamma}_{k-1}(s)| \leq \varepsilon < |z - \tilde{\gamma}_k(s)|.$$

Par le lemme 4.5.24, on obtient

$$\mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_{k-1}}(z) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_k}(z). \tag{4.86}$$

— Enfin, utilisant (4.82) et (4.78), on a

$$\forall s \in [0,1], \qquad |\gamma_1(s) - \tilde{\gamma}_n(s)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon < |z - \gamma_1(s)|.$$

Utilisant une dernière fois le lemme 4.5.24, on en déduit

$$\mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_n}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z). \tag{4.87}$$

Observant successivement (4.85), (4.86) et (4.87), on a

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_1}(z) = \cdots = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_n}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z).$$

Ceci montre (4.77). ■

Corollaire 4.5.27 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, γ_0 et γ_1 deux chemins fermés tracés dans Ω. Si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω, alors*

$$\forall f \in H(\Omega), \qquad \int_{\gamma_0} f(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{\gamma_1} f(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Preuve. Si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω, alors, par le théorème 4.5.26, ils ont même indice par rapport à tout point du complémentaire de Ω. En particulier, ils vérifient les hypothèses du corollaire 4.5.16 du théorème de Cauchy global 4.5.14. Appliquant ce corollaire, on obtient le résultat par (4.71). ■

Corollaire 4.5.28 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Pour toute fonction f holomorphe sur Ω et tout chemin fermé tracé dans Ω, on a*

$$\int_{\gamma} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0. \tag{4.88}$$

Preuve. Soit $f \in H(\Omega)$ et γ un chemin fermé tracé dans l'ouvert simplement connexe Ω. Puisque Ω est simplement connexe, le chemin fermé γ est homotope à un point $a \in \Omega$. Notons γ_a le chemin constant égal à a. Par le corollaire 4.5.27, on a

$$\int_{\gamma} f(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{\gamma_a} f(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Par ailleurs, un calcul direct assure que

$$\int_{\gamma_a} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

■

Corollaire 4.5.29 (existence d'une primitive dans un ouvert simplement connexe) *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe non vide. Pour toute fonction $f \in H(\Omega)$, il existe $F \in H(\Omega)$ telle que*

$$\forall z \in \Omega, \qquad F'(z) = f(z). \tag{4.89}$$

Preuve. Puisque $\Omega \neq \emptyset$, on peut fixer $a \in \Omega$. Puisque Ω est simplement connexe, Ω est en particulier connexe. Puisque Ω est un ouvert connexe, il est connexe par lignes brisées. Pour tout $z \in \Omega$, il existe donc un chemin γ paramétré par le segment $[0,1]$ tracé dans Ω tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = z$. Par ailleurs, si γ_1 est un autre chemin tracé dans Ω paramétré par le segment $[0,1]$ tel que $\gamma_1(0) = a$ et $\gamma_1(1) = z$, alors le chemin

$$\tilde{\gamma} = \gamma + \gamma_1^-,$$

est un chemin fermé tracé dans Ω. Puisque Ω est simplement connexe, et puisque $f \in H(\Omega)$, le corollaire 4.5.28 assure que $\int_{\tilde{\gamma}} f(\omega)\mathrm{d}\omega = 0$. On en déduit que

$$\int_{\gamma} f(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{\gamma_1} f(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

On peut ainsi définir la fonction

$$F : \begin{pmatrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \int_{\gamma_{a\to z}} f(\omega)\mathrm{d}\omega \end{pmatrix},$$

où $\gamma_{a\to z}$ est un chemin quelconque, tracé dans Ω, et reliant a à z. On peut vérifier, comme dans la preuve du théorème de Cauchy dans un ouvert convexe 4.3.60, que, puisque la fonction f est continue sur Ω, la fonction F ainsi définie est holomorphe sur Ω et vérifie en tout point de Ω la relation 4.89. ■

Remarque 4.5.30 *Le corollaire 4.5.29 précédent admet une réciproque : il est vrai que, si Ω est un ouvert connexe, alors toute fonction holomorphe sur Ω admet une primitive holomorphe dans Ω si <u>et seulement si</u> Ω est simplement connexe. Ce résultat dépasse le contenu de ce syllabus. On pourra trouver une preuve dans [10].*

Corollaire 4.5.31 *La fonction holomorphe $z \mapsto 1/z$ admet une primitive holomorphe dans l'ouvert simplement connexe $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Quitte à retirer une constante à cette primitive, on peut supposer qu'elle vaut 0 en $z = 1$. La primitive Ln de $z \mapsto 1/z$ ainsi obtenue dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ est appelée détermination principale du logarithme complexe. Elle vérifie*

$$\forall r > 0, \quad \forall \theta \in]-\pi, \pi[, \qquad \mathrm{Ln}\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \ln(r) + i\theta, \tag{4.90}$$

où $\ln$ est la fonction "usuelle" logarithme népérien, définie comme la primitive sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1.

Preuve. L'existence d'une primitive holomorphe pour la fonction holomorphe $z \mapsto 1/z$ dans l'ouvert simplement connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ est une conséquence immédiate du corollaire 4.5.29. Le fait qu'on peut imposer que cette primitive est nulle en 1 est évident. Le fait qu'une primitive de $z \mapsto 1/z$ dans l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ est entièrement déterminée par sa valeur en 1 est une conséquence du corollaire 4.3.45. Notons F la fonction de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ dans $\mathbb{R}^2$ correspondant à la fonction dans le membre de droite de (4.90), que nous notons désormais f. Cette fonction vérifie [31]

$$\forall x > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{pmatrix},$$

et également

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{pmatrix} & \text{si } y > 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \\ -\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{pmatrix} & \text{si } y < 0 \end{cases}.$$

La première expression permet de vérifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, et vérifie [32] les relations de Cauchy-Riemann en tout point de cet ouvert. De même, la seconde expression permet de vérifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ et sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^\star$ et qu'elle vérifie les relations de Cauchy-Riemann en tout point de ces deux ouverts [33]. En conclusion, par la proposition 4.1.20, la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. En outre, notant u et v les composantes de f, on a en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$, en posant $z = x + iy$,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

Ainsi, la fonction f est une primitive holomorphe de $z \mapsto 1/z$ dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Puisqu'elle coïncide avec la fonction Ln en $z = 1$, et puisque $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ est connexe, on conclut, si besoin à nouveau avec le corollaire 4.3.45, que Ln et f coïncident sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Ceci prouve (4.90). ∎

4.6 Le théorème des résidus

4.6.1 Fonctions méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Lemme 4.6.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $A \subset \Omega$. Si A n'a pas de point d'accumulation dans Ω, alors $\Omega \setminus A$ est ouvert.*

Preuve. Si $A = \emptyset$, c'est évident. Sinon, $A \neq \emptyset$. $z \in \Omega\setminus A$, alors z n'est pas un point d'accumulation de A. En particulier, il existe $r > 0$ tel que $(B(z,r[\setminus\{z\}) \cap A = \emptyset$. On peut éventuellement réduire ce r pour assurer que $B(z,r[\subset \Omega$ car Ω est ouvert. On en déduit que $B(z,r[\setminus\{z\} \subset \Omega \setminus A$. Puisque $z \in \Omega\setminus A$, il vient que $B(z,r[\subset \Omega\setminus A$. Ceci valant pour tout $z \in \Omega\setminus A$, il vient que $\Omega\setminus A$ est ouvert. ∎

31. en exercice
32. en exercice également
33. en exercice toujours

Définition 4.6.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction f est dite* **méromorphe sur** Ω *lorsqu'il existe une partie A de Ω telle que les trois propriétés suivantes sont vérifiées*

— *la partie A n'a pas de point d'accumulation dans Ω,*
— *la fonction f est holomorphe sour l'ouvert $\Omega \setminus A$,*
— *en tout $a \in A$, la fonction f a une singularité (isolée) polaire en a.*

Remarque 4.6.3 *Le fait que f soit définie ou non en les points de A importe peu : nous n'utiliserons pas ces valeurs, même si elles existent. Ainsi, la fonction f peut être définie sur Ω tout entier ou pas, l'essentiel est qu'elle soit définie sur l'ouvert $\Omega \setminus A$.*

Propriété 4.6.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Si f est holomorphe sur Ω, alors f est méromorphe sur Ω.*

Preuve. Il suffit de prendre $A = \emptyset$ dans la définition 4.6.2. ■

Propriété 4.6.5 (Division suivant les puissances croissantes) *Soit $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^\star$ et $A, B \in \mathbb{C}[X]$ avec $B(a) \neq 0$. Il existe un unique couple $Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tel que*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad A(z) = B(z)Q(z) + (z-a)^m R(z),$$

et le degré de Q est au plus $m-1$.

Preuve. Exercice, par exemple en écrivant *a priori* les quatre polynômes dans la base de $\mathbb{C}[X]$ constituée des polynômes $((X-a)^k)k \in \mathbb{N}$ et en résolvant les équations fournies sur les coefficients de Q et R dans cette base, en commençant par ceux de plus bas degré. On peut aussi raisonner par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^\star$. ■

Propriété 4.6.6 (Les fractions rationnelles sont méromorphes sur $\mathbb{C}$) *Soit f une fraction rationnelle, que l'on écrit $f = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux (i.e. $p \wedge q = 1$) et q non nul. La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ (et l'ensemble A de ses pôles est l'ensemble $\mathcal{R}$ des racines complexes du polynôme q).*

Preuve. Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des racines de q. Puisque $\mathcal{R}$ est un ensemble fini, il n'admet pas de point d'accumulation dans $\mathbb{C}$. De plus, la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$ (voir le corollaire 4.1.30). Soit $a \in \mathcal{R}$ une racine de q. Alors $q(a) = 0$. Par suite, il existe $m \in \mathbb{N}^\star$ et $q_1 \in \mathbb{C}[X]$ non nul tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad q(z) = (z-a)^m q_1(z),$$

et $q_1(a) \neq 0$. En particulier, on peut utiliser la division suivant les puissances croissantes de $(z-a)$ (propriété 4.6.5 avec $A = p$ et $B = q_1$) qui assure qu'il existe $Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad p(z) = q_1(z)Q(z) + (z-a)^m R(z),$$

et le degré d de Q est inférieur ou égal a $m-1$[34]. On en déduit que, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \frac{q_1(z)Q(z) + (z-a)^m R(z)}{(z-a)^m q_1(z)} \\ &= \frac{Q(z)}{(z-a)^m} + \frac{R(z)}{q_1(z)}. \end{aligned}$$

34. On a $d \geq 0$ car $Q(a) \neq 0$ car a n'est pas une racine de p car p et q sont premiers entre eux.

On peut maintenant écrire le polynôme Q dans la base $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X]$ sous la forme[35]

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_{m-k}(z-a)^k,$$

pour certains coefficients $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$. Ceci conduit à la relation

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}, \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_{m-k}}{(z-a)^{m-k}} + \frac{R(z)}{q_1(z)}.$$

On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}, \qquad f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} = \frac{R(z)}{q_1(z)}.$$

Puisque $q_1(a) \neq 0$, on en déduit que la fonction dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus a une singularité effaçable en a. Il en est donc de même de celle dans le membre de gauche. Par suite, f admet une singularité polaire en a. Ceci valant quel que soit $a \in \mathcal{R}$, on en déduit que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. ■

Propriété 4.6.7 *Notons Q_a une fraction rationnelle de la forme*

$$Q_a : z \longmapsto \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}, \tag{4.91}$$

pour certains $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$. Pour tout chemin fermé γ tracé dans $\mathbb{C}$ tel que $a \notin \gamma^\star$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma Q_a(\omega) \mathrm{d}\omega = \mathrm{Ind}_\gamma(a) \times c_1.$$

Preuve. Puisque $a \notin \gamma^\star$, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, la fonction $\omega \mapsto c_k/(z-a)^k$ est continue sur $\gamma^\star$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma Q_a(\omega) \mathrm{d}\omega &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(\omega-a)^k} \right) \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{m} c_k \int_\gamma \frac{1}{(\omega-a)^k} \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Or, pour $k \geq 2$, la fonction $z \mapsto 1/(z-a)^k$ admet une primitive holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ (voir le corollaire 4.3.55). Puisque γ est un chemin fermé tracé dans $\Omega \setminus \{a\}$, il vient que

$$\forall k \geq 2, \qquad \int_\gamma \frac{1}{(\omega-a)^k} \mathrm{d}\omega = 0.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma Q_a(\omega) \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2i\pi} c_1 \int_\gamma \frac{1}{\omega - a} \mathrm{d}\omega = \mathrm{Ind}_\gamma(a) \times c_1.$$

■

35. On pourrait arrêter la somme aux d premiers coefficients dans la base, mais on conserve l'écriture dans les $m-1$ premiers (puisque $d \leq m-1$).

Remarque 4.6.8 *Lorsque Q_a, de la forme* (4.91)*, est la partie principale d'une fonction méromorphe f sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dont on note A l'ensemble des singularités polaires dans Ω (et donc $a \in A$), le coefficient c_1 est, par définition, le résidu de f en a (voir la définition 4.4.15). Ainsi on a dans ce cas,*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma Q_a(\omega)\mathrm{d}\omega = \mathrm{Ind}_\gamma(a) \times \mathrm{Res}(f,a).$$

Propriété 4.6.9 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in H(\Omega)$ une fonction différente de la fonction nulle et $g \in H(\Omega)$. La fonction*

$$\varphi = \frac{g}{f},$$

est méromorphe sur Ω.

Preuve. Exercice. On pourra vérifier que, si f est constante, alors φ est holomorphe sur Ω. Si f n'est pas constante, on pourra utiliser le principe des zéros isolés (théorème 4.4.3). ■

4.6.2 Le théorème des résidus

Théorème 4.6.10 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction méromorphe sur Ω, et A l'ensemble de ses pôles dans Ω. Soit Γ un cycle tracé dans $\Omega \setminus A$. Si l'indice de Γ est nul par rapport à tout point du complémentaire de Ω dans $\mathbb{C}$, i.e. si*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \qquad \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0, \tag{4.92}$$

alors d'une part, l'ensemble

$$B = \{a \in A \mid \mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\},$$

est fini, et d'autre part

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega = \sum_{a\in B} \mathrm{Res}(f,a)\mathrm{Ind}_\Gamma(a). \tag{4.93}$$

Remarque 4.6.11 *Sous les hypothèses du théorème des résidus, on écrit parfois le second point* (4.93) *sous la forme*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega = \sum_{a\in A} \mathrm{Res}(f,a)\mathrm{Ind}_\Gamma(a), \tag{4.94}$$

où la sommation dans le membre de droite a lieu sur l'ensemble (potentiellement infini, mais de toute façon dénombrable[36]) A plutôt que sur l'ensemble fini B. Quoi qu'il en soit, la définition de B assure que seul un nombre fini de termes dans la somme (4.94) *sont non nuls.*

Preuve. Notons W l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \Gamma^\star$. Soit V une composante connexe de W. Remarquons que Ind_Γ est constante sur V, en écrivant $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ et en utilisant le théorème 4.3.49 pour chaque chemin fermé $(\gamma_k)_{1\leq k\leq m}$. Remarquons que, si V est non-bornée, alors Ind_Γ est identiquement nulle sur V. Par ailleurs, si V intersecte $\mathbb{C} \setminus \Omega$, alors (4.92) implique que Ind_Γ est identiquement nulle sur V. Montrons par l'absurde que B est fini. Supposons qu'il est infini. Dans ce cas, il existe une suite injective $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de B. Distinguons deux cas.

36. Car pour tout compact $K \subset \Omega$, l'ensemble $K \cap A$ est fini (sinon A a un point d'accumulation dans Ω), et Ω est, comme tout ouvert non vide de $\mathbb{C}$, réunion d'une famille dénombrable de compacts.

- Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Dans ce cas, elle intersecte au moins une fois (en fait, une infinité de fois) la composante connexe non bornée de W. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que a_{n_0} est dans la composante connexe non bornée de W. Avec les remarques précédentes, on a $\mathrm{Ind}_\Gamma(a_{n_0}) = 0$, mais ceci contredit le fait que $a_{n_0} \in B$. On a donc une contradiction.
- Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Dans ce cas, elle admet une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain φ strictement croissant de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, qui converge vers un certain $z \in \mathbb{C}$. Observons que cette sous-suite est également injective[37]. Distinguons à nouveau deux cas.
  - Si $z \in \Omega$, alors z est un point d'accumulation de B dans Ω, donc un point d'accumulation de A dans Ω (car $B \subset A$). Or A n'a pas de point d'accumulation dans Ω car f est méromorphe sur Ω. On a donc une contradiction.
  - Si $\Omega = \mathbb{C}$ alors on a une contradiction par le point précédent. Sinon, $\Omega^C \neq \emptyset$. Si $z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$, alors, puisque $d(\Gamma^\star, \Omega^C) > 0$[38], la suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans une composante connexe de W qui intersecte Ω^C à partir d'un certain rang. On en déduit que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a_{\varphi(n)})$ est nul à partir d'un certain rang. Ceci contredit le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{\varphi(n)} \in B$.

On a donc une contradiction dans tous les cas. On en déduit que B est fini.
Montrons maintenant que la relation (4.93) est vérifiée. Pour cela, dans le cas où $B \neq \emptyset$, notons $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $Q_1, \ldots, Q_n$ les parties principales de f en $a_1, \ldots, a_n$. Posons pour $z \in \mathbb{C} \setminus A$,

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} Q_k(z),$$

avec la convention que $g = f$ dans le cas où $B = \emptyset$. Puisque A n'a pas de point d'accumulation dans Ω, il vient que $A \setminus B$ n'a pas non plus de point d'accumulation dans Ω. Ainsi, l'ensemble $\Omega_0 := \Omega \setminus (A \setminus B)$ est ouvert par le lemme 4.6.1. Puisque f est méromorphe sur Ω, on a, par définition des parties principales $Q_1, \ldots, Q_n$, que la fonction g admet une singularité effaçable en chacun des $a_1, \ldots, a_n$. On la prolonge (de $\Omega\setminus A$ à $\Omega_0 = \Omega\setminus(A\setminus B)$) donc en une fonction holomorphe sur Ω_0. L'hypothèse (4.92) implique que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_0, \qquad \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0.$$

On peut donc appliquer le théorème de Cauchy global 4.5.14 à la fonction g, et en déduire que

$$\int_\Gamma g(\omega)\mathrm{d}\omega = 0.$$

Puisque f et chacune des fonctions Q_k est une fonction continue sur $\Gamma^\star$, l'égalité précédente assure que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma Q_k(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

Utilisant la propriété 4.6.7 et la remarque 4.6.8, ceci implique[39]

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(\omega)\mathrm{d}\omega = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\Gamma(a_k)\mathrm{Res}(f, a_k).$$

37. C'est-à-dire que l'application $n \mapsto a_{\varphi(n)}$ est injective de $\mathbb{N}$ dans B.
38. On a, comme précédemment dans ce syllabus, que $\Gamma^\star$ est compact, que Ω^C est un fermé non vide, et que $\Gamma^\star \cap \Omega^C = \emptyset$. On peut donc appliquer le résultat de l'exercice 1.1.44.
39. On pourra si besoin écrire que $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ et utiliser l'additivité de l'intégrale et de l'indice par rapport aux chemins et aux cycles d'intégration.

Ceci implique (4.93). ∎

4.6.3 Le théorème de Rouché

Citons une application du théorème des résidus au calcul du nombre de zéros d'une fonction holomorphe.

Théorème 4.6.12 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit γ un chemin fermé tracé dans Ω tel que*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \qquad \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0. \tag{4.95}$$

Supposons que

$$\forall z \in \Omega \setminus \gamma^\star, \qquad \mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \{0, 1\}. \tag{4.96}$$

Notons

$$\Omega_1 = \{z \in \Omega \setminus \gamma^\star \mid \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1\}.$$

Soit $f \in H(\Omega)$ une fonction différente de la fonction nulle. Notons N_f le nombre de zéros de f dans Ω_1, comptés avec leur multiplicité.

Si la fonction f ne s'annule pas sur $\gamma^\star$, alors en posant $\Gamma = f \circ \gamma$,

$$N_f = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(\omega)}{f(\omega)}\mathrm{d}\omega = \mathrm{Ind}_\Gamma(0). \tag{4.97}$$

Si $g \in H(\Omega)$ vérifie

$$\forall z \in \gamma^\star, \qquad |f(z) - g(z)| < |f(z)|, \tag{4.98}$$

alors on a

$$N_f = N_g. \tag{4.99}$$

Remarque 4.6.13 *La deuxième partie du théorème qui conduit à* (4.99) *porte le nom de théorème de Rouché.*

Preuve. Puisque $f \in H(\Omega)$ n'est pas la fonction nulle, et puisque Ω est connexe, la fonction $\varphi = f'/f$ est méromorphe sur Ω en utilisant la propriété 4.6.9. Notons $A = Z(f)$ l'ensemble des zéros de f dans Ω. Puisque Ω est connexe, cet ensemble n'a pas de point d'accumulation dans Ω [40]. Si $a \in Z(f)$, notons $m(a) \geq 1$ son ordre, de sorte qu'il existe une fonction h holomorphe sur Ω telle que $h(a) \neq 0$ et

$$\forall z \in \Omega, \qquad f(z) = (z - a)^{m(a)} h(z).$$

Calculant l'expression de f' par la formule donnant la dérivée d'un produit de deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables, il vient que, pour $z \in \Omega \setminus Z(f)$,

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(a)}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Ceci implique que $\mathrm{Res}(\varphi, a) = m(a)$. Notons $B = A \cap \Omega_1$. Par l'hypothèse (4.96), il vient que B est exactement l'ensemble des pôles de φ qui sont d'indice non nul par rapport à γ. L'hypothèse 4.95

40. Voir la preuve de la propriété 4.6.9 ou directement le principe des zéros isolés (théorème 4.4.3).

permet d'appliquer le théorème des résidus à la fonction méromorphe φ, puisque par ailleurs γ est un chemin tracé dans $\Omega \setminus A$ car f ne s'annule pas sur $\gamma^\star$ par hypothèse. On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \varphi(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(\omega)}{f(\omega)}\mathrm{d}\omega = \sum_{a\in B}\mathrm{Ind}_\gamma(\mathrm{a})\times \mathrm{Res}(\varphi(a)) = \sum_{a\in B} m(a) = N_f.$$

Ceci démontre la première égalité dans (4.97). Pour la deuxième, il suffit de constater que, puisque f ne s'annule pas sur $\gamma^\star$, on a $0 \notin \Gamma^\star$ et, en notant $[\alpha,\beta]$ le segment paramétrant γ, on a également

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_\Gamma(0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{1}{\omega-0}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1}{f\circ\gamma(s)}\left(f\circ\gamma\right)'(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\alpha^\beta \frac{f'(\gamma(s))}{f(\gamma(s))}\gamma'(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(\omega)}{f(\omega)}\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant le théorème de Rouché. Soit $g \in H(\Omega)$ vérifiant (4.98). En particulier, g ne s'annule pas sur $\gamma^\star$. Donc g n'est pas la fonction nulle sur Ω et l'on peut appliquer le premier point de ce théorème à la fonction g qui assure que, en posant $\Gamma_1 = g\circ\gamma$,

$$N_g = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g'(\omega)}{g(\omega)}\mathrm{d}\omega = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(0).$$

La relation (4.98) s'écrit également

$$\forall s\in[\alpha,\beta], \qquad |\Gamma(s)-\Gamma_1(s)| < |0-\Gamma(s)|.$$

Le lemme 4.5.24 assure que $\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(0)$. Ceci implique que

$$N_g = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_\Gamma(0) = N_f,$$

et achève la preuve. ■

4.6.4 Une autre application du théorème des résidus

Exercice 4.6.14 *Soit $t\in\mathbb{R}$. On considère la fonction*[41]

$$f_t : \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(z)}{z}\mathrm{e}^{-izt} & si\ z\neq 0 \\ 1 & si\ z=0 \end{cases}\end{pmatrix}.$$

Pour tout $s\in\mathbb{R}$, on note

$$g_s : \begin{pmatrix} \mathbb{C}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{2i}\dfrac{\mathrm{e}^{-izs}}{z}\end{pmatrix}.$$

On note[42]*, pour tout $A>1$,*

— γ_1 le chemin défini pour $t\in[-A,A]$ par $\gamma_1(t)=t$.

41. On note dans cet exercice sin la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $\sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}$.
42. Je vous invite à faire un dessin de chacun des chemins.

— γ_2 *le chemin défini sur* $[-A, A]$ *par*
  — $\gamma_2(t) = t$ *si* $t \leq -1$ *ou* $t \geq 1$ *;*
  — $\gamma_2(t) = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}(t+1)-\pi\right)}$.
— γ_3 *le chemin défini pour* $\theta \in [-\pi, 0]$ *par* $\gamma_3(\theta) = A\mathrm{e}^{i\theta}$.
— γ_4 *le chemin défini pour* $\theta \in [0, \pi]$ *par* $\gamma_4(\theta) = A\mathrm{e}^{i\theta}$.

1. *Justifier que la fonction* f_t *est entière.*
2. *Justifier que pour tout* $s \in \mathbb{R}$*, la fonction* g_s *est méromorphe sur* $\mathbb{C}$.
3. *Pour tout* $s \in \mathbb{R}$*, déterminer les pôles de* g_s *sur* $\mathbb{C}$ *et calculer le résidu de* g_s *en chacun de ses pôles.*
4. *Justifier que pour tout* $A > 1$*,*

$$\int_{\gamma_1} f_t(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{\gamma_2} f_t(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

5. *En déduire que pour tout* $A > 1$

$$\int_{\gamma_1} f_t(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{\gamma_2} g_{t-1}(\omega)\mathrm{d}\omega - \int_{\gamma_2} g_{t+1}(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

6. *Justifier que pour tout* $s \in \mathbb{R}$ *et tout* $A > 1$*,*

$$\int_{\gamma_2} g_s(\omega)\mathrm{d}\omega - \int_{\gamma_3} g_s(\omega)\mathrm{d}\omega = 0,$$

et

$$\int_{\gamma_2} g_s(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{\gamma_4} g_s(\omega)\mathrm{d}\omega = \pi.$$

On pourra utiliser le théorème de Cauchy 4.5.14, le théorème des résidus 4.6.10 et le résultat de la question 3.

7. *Justifier que, si* $s > 0$*, alors*

$$\int_{\gamma_3} g_s(\omega)\mathrm{d}\omega \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De même, justifier que, si $s < 0$*, alors*

$$\int_{\gamma_4} g_s(\omega)\mathrm{d}\omega \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

8. *Soit* $A > 1$*. Calculer* $\int_{\gamma_3} g_0(\omega)\mathrm{d}\omega$.
9. *Déduire de ce qui précède que*

$$\int_{\gamma_2} g_s(\omega)\mathrm{d}\omega \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \pi & \text{si } s < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } s = 0 \\ 0 & \text{si } s > 0 \end{cases}.$$

10. *Justifier que, pour tout* $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$*, l'intégrale de* f_t *converge sur* $\mathbb{R}$.

11. Déduire des questions précédentes que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{e}^{-itx} \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & si\ |t| < 1 \\ 0 & si\ |t| > 1 \end{cases},$$

et, si $t = \pm 1$, alors

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{e}^{-itx} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 4.6.15 *On a ainsi calculé, à l'aide du théorème des résidus, la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$, qui n'est pas absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle ne "décroît" pas vite vers 0 à l'infini ; une formulation plus précise a été vue à l'exemple 2.2.11 sur l'intervalle $[1, +\infty[$) mais qui est très régulière (elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et même entière quand on considère son prolongement à $\mathbb{C}$ tout entier). À l'inverse, la tranformée de Fourier obtenue est une "fonction créneau", qui "décroit" vite vers 0 à l'infini (elle est à support compact), mais qui n'est pas très régulière (elle est constante par morceaux, mais pas continue par exemple, sur $\mathbb{R}$). Ces remarques peuvent être rapprochées de celles faites à la fin de la section 2.5.2 sur l'échange entre régularité et "décroissance" à l'infini (et réciproquement) par la transformation de Fourier.*

Chapitre 5

Matière d'examen

Pour les examens liés à ce cours, **il est attendu que les étudiant.e.s maîtrisent l'ensemble des notions, définitions, lemmes, propriétés, théorèmes, corollaires et remarques vus en cours, et qu'iels sachent les mettre en œuvre dans le cadre d'exercices du type de ceux vus en cours, en séances d'exercices, ou dans les travaux personnels.** À toutes fins utiles, je liste ci-dessous les points du cours dont la **preuve** est également à connaître et peut être demandée, parmi les questions de cours, dans le cadre de ces examens.

5.1 Matière d'examen pour le chapitre 1

— la propriété 1.1.24 en page 16 : critère séquentiel de caractérisation des fermés d'un espace métrique.
— l'exercice 1.1.33 en page 17 : exemple d'une partie compacte d'un espace métrique.
— la propriété 1.1.46 en page 19 : les suites convergentes d'un espace métrique sont de Cauchy.
— la propriété 1.1.53 en page 21 : caractérisation de la continuité globale d'une fonction entre espaces métriques par les images réciproques d'ouverts.
— la propriété 1.1.54 en page 21 : le critère séquentiel de continuité.
— la propriété 1.1.55 en page 21 : l'image continue d'un compact est compacte.
— la propriété 1.1.60 en page 22 : les fonctions lipschitziennes sont continues.
— les exemples 1.1.61 et 1.1.62 en page 22 : exemple d'un evn (de dimension infinie) qui n'est pas complet.
— l'exercice 1.1.64 en page 23 : la fonction carré est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ mais pas globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
— l'exemple 1.2.3 en page 23 : exemple d'une suite de fonctions continues sur un intervalle qui CVS sans CVU.
— la propriété 1.2.7 en page 24 : la CVU d'une suite de fonctions sur X implique la CVS de cette suite de fonctions sur X.
— l'exemple 1.2.8 en page 24 : la CVU d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ne suffit par à assurer la dérivabilité de la limite.
— la propriété 1.2.9 et son corollaire 1.2.10 en page 25 : la CVU d'une suite de fonctions préserve la continuité ponctuelle comme la continuité globale.
— la propriété 1.2.11 en page 26 : si E est un evn et $X \neq \emptyset$, alors $B(X, E)$ muni de la norme infinie est aussi un evn.
— la propriété 1.2.12 en page 26 lorsque $X \neq \emptyset$ et E est un evn, l'espace $B(X, E)$ muni de la norme infinie sur X est complet si et seulement si E est complet.
— la propriété 1.2.14 en page 27 une suite de fonctions à valeurs dans un Banach converge uniformément sur X si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X.
— l'exemple 1.2.17 en page 28 : la série de fonctions définissant classiquement l'exponentielle converge normalement sur les compacts de $\mathbb{R}$ (mais pas normalement sur $\mathbb{R}$).
— les propriétés 1.2.18 et 1.2.19 en page 28 : la CVU sur les compacts d'un intervalle préserve la continuité.
— les propritétés 1.2.21 et 1.2.22 en page 29 : la CVU sur un ouvert d'un evn de dimension finie préserve la continuité.
— le théorème 1.3.1 en page 30 : condition suffisante pour passer à la limite sous une intégrale de Riemann (on peut ne traiter que le cas $d = 1$).
— la propriété 1.4.16 en page 37 : la convergence normale d'une série de fonctions sur X

équivaut au critère de Weierstrass sur X.

— la propriété 1.4.17 en page 37 : pour les séries de fonctions à valeurs dans un Banach, la CVN implique la CVU.
— les propriétés 1.4.22 et 1.4.24 en page 39 : le critère d'Abel pour la convergence d'une série dans un Banach et sa version pour la CVU des séries de fonctions à valeurs dans un Banach.
— la propriété 1.5.9 en page 44 : caractérisation du rayon de convergence d'une série de puissances par CVA/DVG.
— le théorème 1.5.10 et le corollaire 1.5.11 en page 46 : convergence uniforme d'une série de puissances de rayon strictement positif sur les compacts du disque ouvert de convergence.
— la propriété 1.5.16 en page 47 : la règle de D'Alembert.
— le théorème 1.5.17 en page 48 : la CVA en un point du bord du disque de convergence d'une série de puissances de rayon réel strictement positif implique la convergence normale de la série de puissances sur le disque fermé de convergence.
— le théorème 1.5.21 en page 50 : égalité entre le produit des sommes de deux séries complexes et la somme de la série produit de Cauchy dans le cas où les 3 séries convergent.
— la propriété 1.5.24 : le rayon d'une série de puissances est égal à celui de la série de puissances dérivée formelle.
— les corollaires 1.5.25 et 1.5.26 en page 52 : la somme d'une série de puissances de rayon R strictement positif est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence $]x_0 - R, x_0 + R[$ et les coefficients de la série de puissances se déduisent de la suite des dérivées de la somme en x_0.
— la propriété 1.6.15, en page 55 : le théorème de Pythagore dans $\mathcal{R}_{2\pi}$.
— les corollaires 1.6.23, 1.6.24 et 1.6.25, en page 58 : l'inégalité de Bessel (2 versions) et le lemme de Riemann-Lebesgue dans $\mathcal{R}_{2\pi}$.
— la propriété 1.6.26 et les corollaires 1.6.27 et 1.6.28 en page 59 : coefficients de Fourier de $f^{(p+1)}$ lorsque $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ ($p \geq 0$), et le comportement du module des coefficients de Fourier de f à l'infini.
— le corollaire 1.6.30 en page 60 : la série de Fourier d'une fonction de $\mathcal{R}_{2\pi}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
— le lemme 1.6.31 et son corollaire 1.6.33 en page 60 : l'autre lemme de Riemann-Lebesgue.
— la propriété 1.6.37 en page 62 : expression du noyau de Dirichlet comme un quotient de fonctions sinus sur $\mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$.
— le théorème 1.6.40 en page 64 : le théorème de Dirichlet global (en utilisant le théorème de Dirichlet local).

5.2 Matière d'examen pour le chapitre 2

— la propriété 2.1.69 et corollaire 2.1.70 en page 84 : caractère localement lipschitzien puis globalement continu sur I de l'intégrale d'une fonction $\mathcal{L}^1(I)$ comme fonction de sa borne haute.
— la propriété 2.1.72 et corollaire 2.1.73 en page 85 : condition suffisante de dérivabilité ponctuelle de la même fonction ; puis condition suffisante de caractère $\mathcal{C}^{k+1}$ sur un sous-intervalle $J \subset I$.
— la propriété 2.1.74 en page 86 : critère d'intégrabilité absolue par majoration du module sur un intervalle par une fonction positive (absolument) intégrable sur l'intervalle.

— la propriété 2.1.75 en page 86 : critère d'intégrabilité absolue par comparaison du module aux bornes de l'intervalle.
— les propriétés 2.1.76 et 2.1.77 en page 87 : critère d'intégrabilité (absolue) des fonctions de référence de Riemann sur $[1, +\infty[$ et sur $]0, 1]$.
— l'exemple 2.2.11 en page 93 : la fonction sinus cardinal est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$, mais elle n'est pas absolument intégrable sur cet intervalle.
— la propriété 2.2.15 en page 94 : la première formule de la moyenne.
— la propriété 2.2.22 en page 99 : le critère d'Abel pour la convergence des intégrales sur un intervalle.
— la propriété 2.2.27 en page 101 : l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
— la propriété 2.3.1 en page 102 : condition suffisante de continuité d'une intégrale à paramètre sur un segment fixe.
— la propriété 2.3.18 en page 109 : condition suffisante de continuité d'une intégrale à paramètre sur un intervalle fixe.
— la propriété 2.3.21 en page 110 : critère de Weierstrass pour la convergence uniforme (en fait, normale) des intégrales à paramètre.
— le théorème 2.3.24 en page 111 : théorème de Fubini sur le produit de deux segments.
— le théorème 2.3.25 en page 112 : théorème de Fubini sur le produit d'un segment et d'un intervalle.
— la propriété 2.5.2 en page 122 : une caractérisation de la classe de Schwartz.
— la propriété 2.5.6 en page 123 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
— la propriété 2.5.8 en page 123 : dérivées d'une transformée de Fourier.
— la propriété 2.5.10 en page 124 : transformée de Fourier d'une dérivée.
— le lemme 2.5.12 en page 125 : lemme de Riemann-Lebesgue.
— la propriété 2.5.13 en page 125 : $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
— l'exercice 2.5.14 en page 126 : expression de la transformée de Fourier d'une gaussienne.
— le théorème 2.5.15 en page 127 : le théorème d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

5.3 Matière d'examen pour le chapitre 3

— la propriété 3.1.18 en page 140 : formulation intégrale du problème de Cauchy.
— le théorème 3.2.1 en page 141 : du point fixe de Banach/Picard.
— le lemme 3.2.8 en page 144 : de sécurité.
— la propriété 3.2.12 en page 145 assurant l'existence de cylindres de sécurité pour un champ de vecteurs continu.
— la propriété 3.2.18 en page 148 : condition suffisante pour qu'un champ de vecteurs soit localement lipschitzien en espace.
— le lemme 3.3.17 en page 156 de sortie de tout compact pour les solutions maximales d'un problème de Cauchy.
— le lemme 3.4.5 en page 158 de Gronwall.
— la propriété 3.4.19 en page 168 de caractérisation des intégrales premières.
— l'exemple 3.5.5 en page 170 de problème de Cauchy admettant une infinité de solutions globales.
— le théorème 3.6.1 en page 171 de Cauchy pour les équations différentielles linéaires et la propriété 3.6.3 en page 172 qui en découle.

— la propriété 3.6.15 en page 175 donnant l'équation de Jacobi et la formule de Liouville qui s'en déduit.
— le théorème 3.6.16 en page 176 donnant la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire inhomogène à coefficients et second membre continus sur un intervalle.
— le théorème 3.6.17 en page 177 donnant la formule de Duhamel permettant de résoudre un problème de Cauchy linéaire inhomogène connaissant la matrice résolvante de l'équation linéaire homogène associée.
— la propriété 3.6.24 en page 180 justifiant que $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donnant une expression de ses dérivées.
— la propriété 3.6.25 en page 180 caractérisant les matrices carrées à coefficients complexes vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$ la propriété $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$.

5.4 Matière d'examen pour le chapitre 4

— la propriété 4.3.40 en page 203 : l'image d'une partie connexe de $\mathbb{C}$ par une application continue à valeurs dans $\mathbb{C}$ est connexe.
— le théorème 4.3.49 en page 205 donnant 4 propriétés de l'indice d'un point par rapport à un chemin fermé.
— les corollaires 4.3.54 en page 208 et 4.3.55 en page 209 qui donnent la nullité de l'intégrale de $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ le long de chemins fermés appropriés.
— le théorème 4.3.60 de Cauchy dans un ouvert convexe en page 212 (en admettant le théorème de Cauchy 4.3.58 le long du bord d'un triangle).
— la formule de Cauchy du théorème 4.3.62 dans un ouvert convexe en page 214.
— le théorème 4.4.3 énonçant le principe des zéros isolés en page 217.
— le théorème 4.4.13 en page 221 donnant une condition suffisante (qui est trivialement nécessaire) pour qu'une singularité isolée d'une fonction holomorphe soit effaçable.
— le théorème 4.4.14 en page 221 qui classifie les singularités isolées des fonctions holomorphes.
— le lemme 4.4.18 en page 223 et le théorème 4.4.20 en page 225 de Liouville pour les fonctions entières.
— le principe du maximim (théorème 4.4.22 en page 225).
— le théorème fondamental de l'algèbre 4.4.25 de D'Alembert-Gauss en page 227.

Index

Abel
- critère d'Abel pour la convergence des intégrales, 99
- critère d'Abel pour la convergence des séries, 39
- critère d'Abel pour la convergence uniforme des intégrales, 111
- critère d'Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions, 41
- théorème d'Abel radial pour les séries de puissances, 48
- transformation d'Abel, 39, 49

Arzelà
- théorème de Cauchy-Peano-Arzelà, 169

Banach
- espace de Banach, 20
- théorème du point fixe de Banach, 141

Bessel
- inégalité de Bessel, 58
- ingégalité de Bessel, 68

Bolzano
- propritété de Bolzano-Weierstrass, 17

Bonnet, Pierre
- première formule de la moyenne, 94
- seconde formule de la moyenne, 95

Borel
- propriété de Borel-Lebesgue, 17

boule
- fermée, 15
- ouverte, 15

bouts droits et gauches, 153

Cauchy
- critère de Cauchy pour la convergence des intégrales, 90, 91
- critère de Cauchy pour la convergence uniforme des intégrales, 107
- critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions, 27
- donnée de Cauchy, 140
- estimations de Cauchy dans un disque, 227
- formulation intégrale d'un problème de Cauchy, 140
- formule de Cauchy dans un ouvert convexe, 213
- inégalité de Cauchy-Schwarz, 101
- problème de Cauchy, 140
- produit de Cauchy, 50
- relations de Cauchy-Riemann, 189
- suite de Cauchy, 19
- théorème de Cauchy dans un ouvert convexe, 211
- théorème de Cauchy dans un triangle, 209
- théorème de Cauchy global, 233
- théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires, 171
- théorème de Cauchy-Lipschitz global, 153
- théorème de Cauchy-Lipschitz local, 149
- théorème de Cauchy-Peano-Arzelà, 169

chaîne
- définition, 230
- image d'une chaîne, 230
- support d'une chaîne, 230

champ de vecteurs
- autonome, 140
- définition, 139
- localement lipschitzien en espace, 145, 146

Chasles
- relation de Chasles, 73, 74, 83, 92

chemin
- chemin renversé, 198
- définition, 196
- fermé, 196
- image d'un chemin, 196
- lemme d'invariance de l'indice, 239

longueur d'un chemin, 196
somme de deux chemins, 198
support d'un chemin, 196
classification des singularités isolées, 220
coefficients
de Fourier exponentiels, 55
de Fourier trigonométriques, 67
unicité des coefficients dans un développement en série de puissances, 52, 193
compact
en dimension finie, 18
localement compact, 18
produit de compacts, 17
propriété de Bolzano-Weierstrass, 17
propriété de Borel-Lebesgue, 17
compact
image continue d'un compact, 21
connexe
composante connexe, 201
définition, 199
image continue d'un connexe, 203
les convexes sont connexes, 200
les ouverts convexes sont simplement connexes, 238
simplement connexe, 238
continuité
critère séquentiel, 21
d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable, 189
d'une fonction définie sur un intervalle, 75
d'une intégrale à paramètre, 102, 105, 109
d'une somme de série de puissances, 47
globale, 20
globale par images réciproques, 21
image continue d'un compact, 21
locale, 20
par morceaux, 75
convergence
d'une série de fonctions, 35
dans un espace métrique, 12
normale d'une série de fonctions, 37
normale d'une série de Fourier, 60
normale et critère de Weierstrass, 37
normale implique uniforme, 37
rayon de convergence, 44
simple d'une suite de fonctions, 23
uniforme d'une suite de fonctions, 24
uniforme et continuité, 25
uniforme et dérivation, 32
uniforme et intégrale de Riemann, 30
uniforme sur les compacts, 28
convexe
déefinition, 200
les convexes sont connexes, 200
les ouverts convexes sont simplement connexes, 238
convolution
dans la classe de Schwartz, 130
définition, 116
transformée de Fourier d'une convolution, 131
critère
d'Abel pour la convergence des intégrales, 99
d'Abel pour la convergence des séries, 39
d'Abel pour la convergence uniforme des intégrales, 111
d'Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions, 41
d'intégrabilité absolue, 86
de Cauchy, 19
de Cauchy pour la convergence des intégrales, 90, 91
de Cauchy pour la convergence uniforme des intégrales, 107
de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions, 27
de Weierstrass pour la convergence normale des séries de fonctions, 37
de Weierstrass pour la convergence uniforme des intégrales, 110
cycle
définition, 230
indice d'un point par rapport à un cycle, 231
cylindre de sécurité
définition, 143
existence, 145

D'Alembert
règle de D'Alembert, 47
théorème de D'Alembert-Gauss, 226
dérivée
d'une fonction d'une variable complexe, 188

- d'une fonction holomorphe est holomorphe, 214
- d'une intégrale à paramètre, 103, 106, 109
- d'une transformée de Fourier, 123
- formelle d'une série de puissances, 51

Dirichlet
- noyau de Dirichlet, 62
- théorème de Dirichlet global, 64
- théorème de Dirichlet local, 62

distance
- d'un fermé à un compact, 19
- d'un point à une partie, 13
- dans un espace métrique, 12
- induite par une norme, 14

équation différentielle
- définition, 138
- lemme de Gronwall, 158
- linéaire, 170
- linéaire à coefficients constants, 179
- linéaire homogène, 172
- linéaire inhomogène, 176
- linéaire scalaire, 178
- réduction au premier ordre, 139
- résolue, 138
- théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires, 171
- théorème de Cauchy-Lipschitz global, 153
- théorème de Cauchy-Lipschitz local, 149
- théorème de Cauchy-Peano-Arzelà, 169

espace
- complet, 20
- de Banach, 20
- métrique, 12
- vectoriel normé, 14

exponentielle d'une matrice, 179

fermé, 16

flot
- continuité du flot, 162
- d'une équation différentielle, 157
- différentiabilité du flot, 163

formule
- de Cauchy dans un ouvert convexe, 213
- de Cauchy-Riemann, 189
- de Green-Riemann, 211
- de Hadamard, 44
- de Liouville, 175
- de Liouville pour le Wronskien, 178
- de Taylor pour les polynômes, 215
- première formule de la moyenne, 94
- seconde formule de la moyenne, 95

Fourier
- coefficients de Fourier exponentiels, 55
- coefficients de Fourier triogonométriques, 67
- série de Fourier associée à une fonction périodique, 57
- séries de Fourier, 53
- théorème d'inversion de Fourier, 127
- transformation de Fourier, 123

Fubini
- théorème de Fubini sur le produit d'un segment et d'un intervalle, 112
- théorème de Fubini sur un produit d'intervalles, 113
- théorème de Fubini sur un produit de segments, 111

Gauss
- intégrale de Gauss, 104
- théorème de D'Alembert-Gauss, 226
- transformée de Fourier d'une gaussienne, 126

Green
- formule de Green-Riemann, 211

Gronwall
- lemme de Gronwall, 158

Hadamard
- formule de Hadamard, 44

holomorphe
- convergence uniforme sur les compacts d'une suite de fonctions holomorphes, 228
- définition, 190
- les fonctions holomorphes sont développables en séries de puissances, 214
- les séries de puissances sont holomorphes, 191

homotopie
- entre chemins fermés, 238
- nulle, 238
- théorème d'invariance de l'indice, 240

identité

de Parseval-Plancherel, 66, 68
de Plancherel, 133, 134
du parallélogramme, 55
indice
d'un point par rapport à un chemin fermé, 204
lemme d'invariance de l'indice, 239
théorème d'invariance de l'indice, 240
théorème de l'indice, 205
inégalité
de Bessel, 58, 68
de Cauchy-Schwarz, 101
de la moyenne, 98
de Young, 129
intégrale
à paramètre, 102
absolument convergente, 76
convergente, 89
d'une fonction continue le long d'un chemin, 196
de Gauss, 104
de Riemann sur un segment, 70
première, 168
uniformément convergente, 107

Jacobi
équation de Jacobi, 175
Jordan
réduction de Jordan, 182

Lebesgue
lemme de Riemann-Lebesgue, 58, 60, 125
propriété de Borel-Lebesgue, 17
lemme
d'invariance de l'indice, 239
de développement en série de puissances, 194
de Gronwall, 158
de Riemann-Lebesgue, 58, 60, 125
de sécurité, 144
de sortie de tout compact, 156
limite
dans une intégrale de Riemann, 30
simple d'une suite de fonctions, 23
supérieure, 43
unicité, 13
Liouville
formule de Liouville, 175
formule de Liouville pour le Wronskien, 178
théorème de Liouville pour les fonctions entières, 224
Lipschitz
constante de Lipschitz, 22
fonction lipschitzienne, 22
fonction localement lipschitzienne, 23
théorème de Cauchy-Lipschitz global, 153
théorème de Cauchy-Lipschitz local, 149
lipschitzienne
fonction lipschitzienne, 22
fonction localement lipschitzienne, 23
fonction localement lipschitzienne en espace, 145, 146

matrice
exponentielle de matrice, 179
fondamentale, 174
résolvante, 173
méromorphe
définition, 245
méromorphe
théorème des résidus, 247
Morera
théorème de Morera, 215

norme, 14
en moyenne quadratique, 54
infinie, 37
subornonnée, 171, 179
noyau de Dirichlet, 62

ouvert, 16
relatif, 19

Parseval
identité de Parserval-Plancherel, 66, 68
Peano
théorème de Cauchy-Peano-Arzelà, 169
Picard
théorème du point fixe de Picard, 141
Plancherel
identité de Parseval-Plancherel, 66, 68
identité de Plancherel, 133, 134
principe
des zéros isolés, 216

du maximum, 224
problème de Cauchy, 140
produit de Cauchy, 50
Pythagore
théorème de Pythagore, 55

rayon de convergence, 44
réduction
au premier ordre d'une équation différentielle, 139
réduction
de Jordan, 182
relation
de Cauchy-Riemann, 189
de Chasles, 73, 74, 83, 92
résidu
définition, 221
théorème des résidus, 247
Riemann
fonctions de référence de Riemann, 87
formule de Green-Riemann, 211
intégrale de Riemann sur un segment, 70
lemme de Riemann-Lebesgue, 58, 60, 125
relations de Cauchy-Riemann, 189
Rouché
théorème de Rouché, 249

Schwartz
classe de Schwartz, 122
convolution dans la classe de Schwartz, 130
Schwarz
inégalité de Cauchy-Schwarz, 101
séries de fonctions
convergence normale, 37
convergences simple et uniforme, 35
critère d'Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions, 41
critère de Weierstrass pour la convergence normale des séries de fonctions, 37
définition, 35
lemme de développement en séries de puissances, 194
les fonctions holomorphes sont développables en séries de puissances, 214
les séries de puissances sont holomorphes, 191
série téléscopique associée à une suite, 38
séries de Fourier, 53
séries de puissances, 43
séries entières, 43
somme, 35
singularité
classification des singularités isolées, 220
effacable :effaçable, 219
essentielle, 221
isolee :isolée, 219
polaire, 221
solution
d'une équation différentielle, 138
d'un problème de Cauchy, 140
globale d'un problème de Cauchy, 156
maximale d'un problème de Cauchy, 153
sous-solution d'un problème de Cauchy, 153
sur-solution d'un problème de Cauchy, 153
système fondamental de solutions, 174
somme d'une série de fonctions, 35
suite
convergente, 12
critére de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions, 27
de Cauchy, 19
de fonctions simplement convergente, 23
de fonctions uniformément convergente, 24
exhaustive de segments, 77
systeme fondamental de solutions, 174

Taylor
formule de Taylor pour les polynômes, 215
terme général, 35
théorème
de classification des singularités isolées d'une fonction holomorphe, 220
d'Abel radial pour les séries de puissances, 48
d'approximation de Weierstrass, 119
d'invariance de l'indice, 240
d'inversion de Fourier, 127
de Cauchy dans un ouvert convexe, 211
de Cauchy dans un triangle, 209
de Cauchy global, 233
de Cauchy pour les équations différentielles linéaires, 171

de Cauchy-Lipschitz global, 153
de Cauchy-Lipschitz local, 149
de Cauchy-Peano-Arzelà, 169
de changement de variable, 88
de D'Alembert-Gauss, 226
de développement en séries de puissances des fonctions holomorphes, 214
de différentiabilité du flot, 163
de Dirichlet global, 64
de Dirichlet local, 62
de Fubini sur le produit d'un segment et d'un intervalle, 112
de Fubini sur un produit d'intervalles, 113
de Fubini sur un produit de segments, 111
de l'indice, 205
de Liouville pour les fonctions entières, 224
de Morera, 215
de Plancherel, 133
de Plancherel, 134
de Pythagore, 55
de Rouché, 249
des résidus, 247
du point fixe de Banach, 141
du point fixe de Picard, 141
fondamental de l'algèbre, 226
principe des zéros isolés, 216
principe du maximum, 224
transformation
d'Abel, 39, 49
de Fourier d'une convolution, 131
de Fourier d'une gaussienne, 126
de Fourier dans la classe de Schwartz, 123

voisinage, 16

Weierstrass
critère de Weierstrass pour la convergence normale des séries de fonctions, 37
critère de Weierstrass pour la convergence uniforme des intégrales, 110
propritété de Bolzano-Weierstrass, 17
théorème d'approximation de Weierstrass, 119
Wronskien, 178

Young
inégalité de Young, 129

Bibliographie

[1] Sylvie Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles : Cours et exercices corrigés.* Dunod, 2010.

[2] Henri Cartan. *Calcul Différentiel : I-Calcul différentiel dans les espaces de Banach ; II-Équations différentielles.* Cours de mathématiques II. Hermann & Cie, Éditeurs, hermann edition, 1967.

[3] Augustin Louis Cauchy. Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. première partie : Analyse algébrique. `http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-29058&I=1&M=tdm`, 1821.

[4] Roger Godement. *Analyse mathématique I : Convergence, fonctions élémentaires*, volume 1. Springer, 1998.

[5] Roger Godement. *Analyse mathématique II : Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes*, volume 2. Springer, 1998.

[6] Jacques Hadamard. Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. *Comptes-rendus de l'académie des sciences*, 106 :259–262, 1888. `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3062v/f259.image`.

[7] Jacques Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *J. Math. Pures Appl.*, VIII-IX(4e série), 1892. `https://archive.org/details/essaisurltuded00hadauoft/page/n6/mode/2up`.

[8] Omran Kouba. *263 exercices corrigés de Mathématiques en Spéciales.* Ellipses, 1995.

[9] Hervé Quéffelec. *Topologie : Cours et exercices corrigés.* Dunod, 2016. `https://books.google.fr/books?id=wcL8DAAAQBAJ&pg=PA88&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false`.

[10] Walter Rudin. *Analyse réele et complexe : Cours et exercices.* Dunod, 1998.

[11] Patrice Tauvel. *Analyse complexe pour la Licence 3 : Cours et exercices corriges.* Dunod, 2006.

[12] Jean Voedts. *Cours de Mathématiques MP-MP*.* Ellipses, 2002. `http://kuartin.free.fr/Cours_MP.pdf`.