Exercice 1 :

1. f est majorée : f est toujours plus petite qu'une certaine valeur $M \in \mathbb{R}$.

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$$

2. f admet un maximum : f est toujours plus petite qu'une certaine valeur M **et** f atteint M en un point.

$$\exists M \in \mathbb{R} : \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M)}_{f \text{ est majorée par } M} \wedge \underbrace{(\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) = M)}_{f \text{ atteint } M \text{ (en } x_0)}$$

3. f est paire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$

4. f est impaire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$

5. f est T-périodique : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$

NB : Ceci équivaut à $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ f(x+nT) = f(x)$ mais ce n'est pas la définition de T-périodicité.

6. f est périodique : $\underbrace{\text{Il existe un } T \in \mathbb{R}}_{\exists T \in \mathbb{R}}$ $\underbrace{\text{tel que } f \text{ soit } T\text{-per.}}_{:\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)}$

$$\exists T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$

NB : Dans 5., T est une variable libre, et dans 6. elle est muette.

7. f est croissante : pour tous réels a et b, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}},\ a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

8. f est strictement croissante : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

9. f n'est pas la fonction nulle :

f est la fonction nulle s'écrit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$,
donc 9. qui est sa négation s'écrit

$$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$$

NB : • $\neg(\forall x \in X,\ P[x])$ ssi $\exists x \in X : \neg P[x]$

• $\neg(a = b)$ ssi $a \neq b$

Exercice 2 :

1. $\neg(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 1)$ ssi $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) > 1$
2. $\neg\left(\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)\right)$

ssi $\exists a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b) \wedge (f(a) > f(b))$

NB : $\neg(A \Rightarrow B)$ ssi $A \wedge \neg B$

3. $\neg\left(\underbrace{[\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)]}_{} \wedge \underbrace{[\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0]}_{}\right)$

ssi $[\exists a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b) \wedge (f(a) > f(b))] \vee [\exists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0]$

4. $\neg(\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M)$ ssi $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) > M$

Exercice 3 :

Soient a et b deux réels différents de -1, montrons que $a+b+ab \neq -1$.

Par l'absurde : supposons $a+b+ab = -1$ (le contraire de ce qu'on veut prouver) et essayons de trouver une contradiction.

$$a + b + ab = -1$$

$$a(1+b) = -(1+b)$$

$$a = -1, \text{ car } 1+b \neq 0 \text{ par hypothèse.}$$

Or on a supposé $a \neq -1$, contradiction.

Donc $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a \neq -1 \wedge b \neq -1 \Rightarrow a+b+ab \neq -1)$

Exercice 4 :

1. Pour tous réels x et y, si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $xy \neq 0$, ce qui est vrai.

2. Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas rectangle en A, ce qui est vrai (Pythagore).

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, (n premier $\Rightarrow$ n impair), ce qui est faux car 2 est premier et pair.
En revanche, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, ($n$ premier $\Rightarrow$ n pair) est vrai.

Exercice 5 :

1. a et b ont même parité ssi a pair $\Leftrightarrow$ b pair

ssi (a pair $\Rightarrow$ b pair) $\wedge$ (b pair $\Rightarrow$ a pair) — $A \Leftrightarrow B$ ssi $(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$

ssi (a pair $\Rightarrow$ b pair) $\wedge$ (a impair $\Rightarrow$ b impair) — $A \Rightarrow B$ ssi $\neg B \Rightarrow \neg A$

2. On veut montrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, n et n^2 ont même parité, c'est-à-dire (d'après 1.) que

(n pair $\Rightarrow$ n^2 impair) $\wedge$ (n impair $\Rightarrow$ n^2 impair).

Soit n un entier naturel.

<u>Si n est pair :</u> alors $n = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et dans ce cas $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ est donc pair.

<u>Si n est impair :</u> alors $n = 2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

Exercice 6 :

1. Les rôles de a, b et c sont les mêmes donc il suffit de montrer que a ne peut pas être égal à 1.

<u>Par l'absurde :</u> supposons $a = 1$.

$$bc > 1 \quad \text{donc} \quad c > \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad b > \frac{1}{c}$$

et $1 + b + c < 1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ donc $b + c < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

En combinant ces inégalités on obtient une contradiction :

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} < b + c < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Donc $a = 1$.

2. <u>Par l'absurde :</u> si $a, b, c \leq 1$, alors $abc \leq 1$, contradiction.

Donc a, b ou c est strictement supérieur à 1.

3. <u>Par l'absurde :</u> si $a, b, c \geq 1$, alors

$$3 \leq a + b + c \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$$

donc d'après (2), $3 < 3$, contradiction.

Donc a, b ou c est strictement inférieur à 1.

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui soit un carré, disons $n = n_0^2$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

<u>Par l'absurde</u> : supposons que $2n$ soit un carré, c'est-à-dire qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m_0^2 = 2n$.

$$2n = 2n_0^2 = m_0^2$$

$$2 = \left(\frac{m_0}{n_0}\right)^2$$ ce qui impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Donc $2n$ n'est pas un carré.

Exercice 8 :

Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$$

ssi $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 : |a| > \varepsilon)$ contraposée

Ce qui est vrai, si $a \neq 0$ on peut prendre $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ pour que la proposition soit satisfaite.

Exercice 9 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

<u>Si $x - 1 \leq 0$</u> : $|x-1| = 1 - x \leq 1 - x + x^2$ car $x^2 \geq 0$

<u>Si $x - 1 \geq 0$</u> : $|x-1| = x - 1$ et $|x-1| \leq x^2 - x + 1$ est alors équivalent à $x - 1 \leq x^2 - x + 1$, c'est-à-dire

$$x^2 - 2x + 2 \geq 0,$$

ce qui est vrai car $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.