Rédaction : résolution d'équation

Exemples

Première équation d'inconnue x réel : $(E_1) : x = \sqrt{2x^2 - 1} - 1/2$.

Résolution L'expression n'a de sens que si $2x^2 - 1 \geq 0$, c'est-à-dire si x appartient à l'ensemble

$$A =]-\infty, -1/\sqrt{2}] \cup [1/\sqrt{2}, \infty[,$$

on résout alors l'équation dans cet ensemble.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2x^2 - 1} - 1/2 \\ x + 1/2 &= \sqrt{2x^2 - 1} \\ (x + 1/2)^2 &= 2x^2 - 1 \\ x^2 + x + 1/4 &= 2x^2 - 1 \\ x^2 - x - 5/4 &= 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5/4) = 6$$

Les racines sont

$$x_1 = 1/2 - \sqrt{6}/2 \text{ et } x_2 = 1/2 + \sqrt{6}/2.$$

Seul x_2 satisfait (E_1) car $x_1 + 1/2 < 0$ alors que $\sqrt{2x_1^2 - 1} \geq 0$.

Remarques

1. Il est essentiel d'expliquer ce que vous faites dans votre démonstration, sans quoi le lecteur sera perdu s'il n'arrive pas à deviner.

   Vous pouvez enchaîner les étapes évidentes d'un calcul sans avoir à expliquer quelle opération est utilisée (cf. TD1-Exercice 2), en revanche **à chaque nouvelle étape du raisonnement, expliquez ce que vous allez faire !**
2. Une démonstration s'apparente à un texte en français entrecoupé de blocs de calcul et de propositions. Devant être rédigée, on y retrouve les mots de liaisons classiques (donc, or, car, cependant, etc.). Évitez d'utiliser des symboles logiques hors d'une proposition, et **n'utilisez jamais de connecteur logique ($\forall$, $\exists$, $\vee$, $\wedge$ et $\Leftrightarrow$) dans une phrase en français !** Vous pouvez tomber sur un correcteur pointilleux sur la rédaction !

Le tableau du TD1 est trompeur, la résolution corrigée de l'équation (E') serait correcte, mais peu lisible et donc inappropriée pour une copie, si elle était écrite en une ligne (qui ne tenait pas dans le tableau) :

$\forall x \in \mathbb{R}, \big(x(x+4)+5 = x+3 \Leftrightarrow x^2+4x+5 = x+3 \Leftrightarrow x^2+4x+2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1\big)$,

On aurait aussi pu le rédiger ainsi :

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x(x+4)+5 = x+3$ $\Leftrightarrow x^2+4x+5 = x+3$ $\Leftrightarrow x^2+4x+2 = 0$ $\Leftrightarrow (x+2)(x+1) = 0$ $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

car on déclare que la variable x existe dans la première ligne, et les lignes suivantes peuvent être comprises comme une seule même proposition écrite sur plusieurs lignes.
NB : Dans la proposition en une seule ligne, x est une variable muette, et dans la proposition en plusieurs lignes, c'est une variable parlante.

3. Durant le bloc de calcul, plus précisément lorsqu'on a élevé au carré, on a perdu l'équivalence. Pour tout x dans A on a

$$x = \sqrt{2x^2-1} - 1/2 \Rightarrow x^2 - x - 5/4 = 0$$

mais pas la réciproque ! Par exemple, ici on n'a pas $x_2 + 1/2 = \sqrt{2x_2^2 - 1}$ car le membre de gauche est strictement négatif et celui de droite positif ou nul. En revanche, on a pour tout x dans A que

$$x = \sqrt{2x^2-1} - 1/2 \Leftrightarrow x^2 - x - 5/4 = 0 \wedge x + 1/2 \geq 0.$$

Cela illustre ce qu'on a vu dans le TD1-Exercice 2 : pour tous réels a et b

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2 \wedge (a \geq 0) \wedge (b \geq 0),$$

avec ici $a = \sqrt{2x^2-1}$ et $b = x + 1/2$.
Moralité : faites bien attention lorsque vous utilisez les opérations du TD1-Exercice 2 qui ne préservent pas l'équivalence pour tous réels a et b. Vous risquez de vous retrouver avec plus de solutions qu'il n'y en a vraiment, car vous aurez oublié certaines conditions qu'elles doivent satisfaire.
NB : Ces remarques sont elles-mêmes écrites en respectant ces conseils de rédaction.

Deuxième équation d'inconnues x et y réels : (E_2) : $2xy - 5 = x$.

Résolution

$$2xy - 5 = x$$
$$2xy - x = 5$$
$$x(2y-1) = 5$$

On distingue deux cas :

— Si $2y-1 \neq 0$, c'est-à-dire si $y \neq 1/2$, alors $x = \frac{5}{2y-1}$.
— Si $y = 1/2$, l'équation devient $x \cdot 0 = 5$, il n'y a alors aucune solution.

L'ensemble de solutions de (E_2) est alors

$$S = \left\{ \left(\frac{5}{2y-1}, y \right) \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 1/2 \right\}.$$

Remarques

1. Si vous avez une idée de manipulation pour avancer dans la résolution (ici, diviser par $2y-1$), mais que cette manipulation n'est pas toujours autorisée (ici, il faut que $2y-1 \neq 0$), il est nécessaire de distinguer les cas pour avancer dans la démonstration. **Attention à ne pas oublier de traiter l'autre cas !**
2. Après avoir distingué le cas $y \neq 1/2$ et exprimé x en fonction de y, on a une inconnue en fonction d'une autre sans aucune autre contrainte supplémentaire (à part pour $y \neq 1/2$). N'importe quelle valeur de $y \neq 1/2$ satisfera donc l'équation (E_2) (à condition que $x = \frac{5}{2y-1}$).

Exercices

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (ou dans une partie de $\mathbb{R}$ adaptée) les équations suivantes en suivant les conseils de rédaction :

1. $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$
   Indication : on reconnaît un expression proche d'un trinôme, mais avec e^x *au lieu de* x. *On peut poser* $y = e^x$ *pour transformer l'équation en une autre que l'on sait résoudre et dont l'inconnue est* y. *Attention à l'ensemble auquel appartient cette dernière !*
2. $\ln(1-x^2) = \ln(2x-1)$
3. $x^2 + |x| - 2 = 0$
   Indication : réécrire l'équation sans valeur absolue, il faudra distinguer plusieurs cas.