# Logique - Exercices

**Exercice 1 :** Soient $f$ et $g$ deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, écrire à l'aide de quantificateurs et de connecteurs les propositions suivantes :

1. $f$ est majorée
2. $f$ admet un maximum
3. $f$ est paire
4. $f$ est impaire
5. $f$ est $T$-périodique (où $T > 0$)
6. $f$ est périodique
7. $f$ est croissante
8. $f$ est strictement croissante
9. $f$ n'est pas la foncion nulle

**Exercice 2 :** Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, écrire la négation des proposiions suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$
2. $f$ est croissante
3. $f$ est croissante et positive
4. $f$ est majorée

**Exercice 3 :** Montrer que si deux réels $a$ et $b$ sont différents de $-1$ alors $a + b + ab$ aussi, puis l'écrire à l'aide de quantificateurs et de connecteurs.

**Exercice 4 :** Donner la contraposée de chaque proposition puis déterminer si elle est vraie ou fausse.

1. Pour tous réels $x$ et $y$, si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.
2. Si $ABC$ est un triangle rectangle en $A$, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ n'est pas premier})$

**Exercice 5 :** On dit que deux entiers $a$ et $b$ ont la même parité lorsqu'ils satisfont

$$a \text{ est pair} \Leftrightarrow b \text{ est pair.}$$

1. Montrer que deux entiers $a$ et $b$ ont même parité si et seulement s'ils satisfont

$$(a \text{ est pair} \Rightarrow b \text{ est pair}) \wedge (a \text{ est impair} \Rightarrow b \text{ est impair})$$

2. Montrer qu'un entier et son carré on toujours même parité.

**Exercice 6 :** Soient $a, b$ et $c$ trois réels stictement positifs tels que

$$abc > 1 \tag{1}$$

$$a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \tag{2}$$

Montrer que

1. aucun des réels $a, b$ ou $c$ ne peut être égal à 1,
2. au moins l'un deux est strictement supérieur à 1,
3. au moins l'un deux est strictement inférieur à 1.

**Exercice 7 :** Soit $n$ un entier strictement positif, montrer que si $n$ est un carré alors $2n$ n'en est pas un.

**Exercice 8 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

**Exercice 9 :** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
*Indication : lorsqu'on travaille avec une valeur absolue $|a|$, il peut être utile de distinguer les cas $a \leq 0$ et $a \geq 0$.*