Injectivité, surjectivité et bijectivité

Définitions

Injectivité Une fonction $f : X \to Y$ est dite *injective* si elle satisfait

$$\forall x_1, x_2 \in X, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

— Cela signifie que quelque soit $y \in Y$, l'équation $f(x) = y$ a **au plus** une solution $x \in X$.
— En terme de graphe, dans le cas ou $X, Y \subset \mathbb{R}$, **toute** droite horizontale d'équation $y = y_0$, avec $y_0 \in Y$, coupe **au plus** une fois le graphe de f.
— Si on pense à f comme une opération qui transforme x en $f(x)$, l'injectivité s'interprète comme le fait de pouvoir revenir en arrière (c'est-à-dire qu'on peut déduire x à partir de $f(x)$).
— L'injectivité s'interprète comme le fait que l'ensemble d'arrivée possède au moins autant d'éléments que l'ensemble d'arrivée.

Surjectivité Une fonction $f : X \to Y$ est dite *surjective* si elle satisfait

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y.$$

— Cela signifie que quelque soit $y \in Y$, l'équation $f(x) = y$ a **au moins** une solution $x \in X$.
— En terme de graphe, dans le cas ou $X, Y \subset \mathbb{R}$, **toute** droite horizontale d'équation $y = y_0$, avec $y_0 \in Y$, coupe **au moins** une fois le graphe de f.
— Si on pense à f comme un opération qui transforme x en $f(x)$, la surjectivité signifie qu'on peut obtenir n'importe quel $y \in Y$ grâce à l'opération f.
— La surjectivité s'interprète comme le fait que l'ensemble de départ contient au moins autant d'éléments que l'ensemble d'arrivée.

Attention ! La surjectivité n'est pas la négation de l'injectivité. Il existe des fonctions qui peuvent être injective et surjective, ni injective ni surjective, ou seulement l'un des deux.

Bijectivité et inverse Une fonction $f : X \to Y$ est dite *bijective* lorsqu'elle est à la fois injective et bijective, ce qui donne sous forme de proposition

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y.$$

— Cela signifie que quelque soit $y \in Y$, l'équation $f(x) = y$ a **exactement** une solution $x \in X$, que l'on note $f^{-1}(y)$. Ceci définit une fonction $f^{-1} : Y \to X$ appelée *inverse* ou *réciproque* de f.
— En terme de graphe, dans le cas ou $X, Y \subset \mathbb{R}$, **toute** droite horizontale d'équation $y = y_0$, avec $y_0 \in Y$, coupe **exactement** une fois le graphe de f.
— La bijectivité s'interprète comme le fait que les ensembles de départ et d'arrivée contiennent autant d'éléments.

Sur les graphes suivants, l'axe des abscisses est restreint au domaine de définition de la fonction représentée, et celui des ordonnées est restreint au domaine d'arrivée.

Exemple

Considérons la fonction $f : [-1, 1] \to [-0.6, 1.4]$ définie par $f(x) = x^2$.

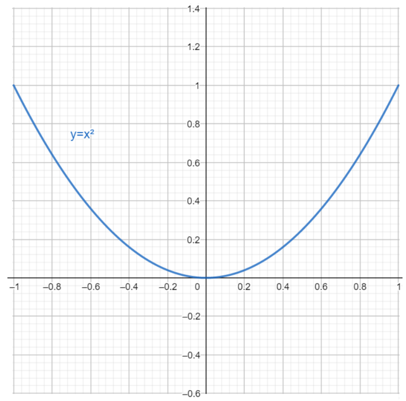

FIGURE 1 – La fonction carré de $[-1, 1]$ dans $[-0.6, 1.4]$

La fonction n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 1$, c'est-à-dire que la droite d'équation $y = 1$ est une droite horizontale qui coupe le graphe de f en deux points **distincts** : $(-1, 1)$ et $(1, 1)$.

En restreignant le domaine à $[0, 1]$, aucune droite horizontale ne coupe le graphe plus d'une fois ; la fonction est à présent injective.

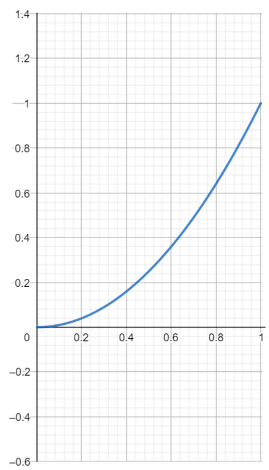

FIGURE 2 – La fonction carré de $[0, 1]$ dans $[-0.6, 1.4]$

Remarque Une fonction réelle continue est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

La fonction est à présent injective, mais pas surjective : il existe au moins une droite horizontale (par exemple $y = -1$) qui ne coupe pas le graphe de f. On restreint alors l'ensemble d'arrivée à $[0, 1]$:

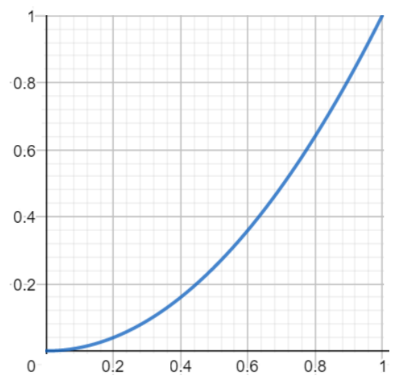

FIGURE 3 – La fonction carré de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$

Exercices

Exercice 1 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Lorsqu'elle est bijective (injective et surjective), donner sa réciproque.

1. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$
2. $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$
3. $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$
4. $f_5 :] - \pi/2, \pi/2[\cup]\pi/2, 3\pi/2[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$
5. $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$

Exercice 2 Soient deux fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$.

1. Montrer que si $g \circ f = id_X$, alors f est injective. Cela illustre le fait qu'on peut "revenir en arrière", annuler l'opération f grâce à l'opération g car on a dans ce cas que pour tout $x \in X$, $g(f(x)) = x$.
2. Montrer que si $g \circ f = id_X$, alors g est surjective.
3. Montrer que f est bijective si et seulement s'il existe une fonction $h : Y \to X$ telle que $h \circ f = id_X$ et $f \circ h = id_Y$. Dans ce cas, $h = f^{-1}$.

Notation : On note id_E l'application *identité* d'un ensemble E définie par $id_E(e) = e$ pour tout $e \in E$. On note $g \circ f$ la fonction définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exercice 3 Pour chaque fonction, restreindre le domaines d'arrivée pour qu'elle soit surjective. Ensuite, restreindre le domaine de définition pour qu'elle soit **aussi** injective (donc bijective). Enfin, donner sa réciproque (sauf pour f_4 qui serait un peu compliqué).

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x-1|+2$
3. $f_3 :]-\pi/2, \pi/2[\cup]\pi/2, 3\pi/2[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$

Notation : On note $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ le cercle unité du plan complexe.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. La fonction est-elle injective ? Surjective ?
3. Montrer que la restriction de f de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$ est bijective.