Feuille d'exercices n° 6

Vecteurs et points. Barycentres

1 Droites

La *droite numérique* $\mathbb{R}$ correspond au modèle "standard" des droites. On *identifie* toute autre *droite* D avec la droite numérique en choisissant sur D une origine, c'est-à-dire un point O sur la droite D, et un autre point de D distinct de O, appelons-le A. Tout point $M \in D$ est alors *repéré* par son *abscisse*, qui est un nombre réel $x \in \mathbb{R}$. Cette correspondance entre les points de D et ceux du modèle standard $\mathbb{R}$ est uniquement déterminée par la paire de points (O, A), avec la convention suivante : O a pour abscisse 0, et A a pour abscisse 1. La paire (O, A) est appelée *repère* de la droite D.

On retiendra qu'une droite D munie d'un repère (O, A) définit de manière unique une bijection canonique, appelée *abscisse*, $f : D \to \mathbb{R}$, vérifiant $f(O) = 0$ et $f(A) = 1$.

Exercice 1 (représentation graphique, *). Soit D une droite munie d'un repère (O, A), et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction abscisse. Représenter graphiquement les ensembles de points suivants :

$$U_1 = \{M \in D \,:\, f(M) \geq 0\}, \quad U_2 = \{M \in D \,:\, -1 \leq f(M) < 1\}, \quad U_3 = \{M \in D \,:\, f(M) \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 2 (distance, *). Soit D une droite munie d'un repère (O, A). On appelle *distance* entre deux points M et N d'abscisses x et y, le nombre réel $|y - x| = d(M, N)$. Montrer que la distance vérifie les propriétés suivantes :

1. (définie positive) $\forall M, N \in D \quad \big(d(M, N) \geq 0 \quad \wedge \quad (d(M, N) = 0 \iff M = N)\big)$.
2. (symétrie) $\forall M, N \in D \quad d(M, N) = d(N, M)$.
3. (inégalité triangulaire) $\forall M, N, J \in D \quad d(M, J) \leq d(M, N) + d(N, J)$.

Exercice 3 (points équidistants d'un point sur une droite, **). Soit D une droite munie d'un repère (O, A), soit $M \in D$ et soit r un réel. Déterminer en fonction de r quel est l'ensemble suivant, et déterminer en particulier son cardinal :

$$C(M, r) = \big\{N \in D \,:\, d(M, N) = r\big\}.$$

Exercice 4 (changement de repère, **). Soit D une droite munie d'un repère (O, A). Soit (O', A') un autre repère de D, avec x_0 et y_0 les abscisse de O' et de A' dans le repère (O, A).

1. Étant donné un point M de D d'abscisse x dans le repère (O, A), déterminer l'abscisse x' de M dans le repère (O', A'). On pourra commencer par étudier le cas où $O = O'$.
2. Supposeons que $d(O', A') = 1$. Montrer que la distance d' calculée dans le repère (O', A') coïncide avec la distance d calculée dans le repère (O, A).

Exercice 5 (mesure algébrique, *). Soit D une droite munie d'un repère (O, A). Étant donnés deux points M et N de D, d'abscisses x et y, on pose :

$$\overline{MN} = y - x.$$

Montrer que:

1. $\forall M, N \in D \quad \overline{MN} = -\overline{NM}$
2. $\forall M \in D \quad \overline{MN} = 0 \iff M = N$.
3. (relation de Chasles) $\forall M, N, J \in D \quad \overline{MJ} = \overline{MN} + \overline{NJ}$. Comparer avec l'inégalité triangulaire à l'exercice 2.

Exercice 6 (barycentres, *). Soit D une droite munie d'un repère (O, A). Soit M et N deux points de D, et soit α et β deux réels. On considère l'application $g : D \to \mathbb{R}$ définie par $g(X) = \alpha\overline{XM} + \beta\overline{XN}$.

1. On suppose que $\alpha + \beta = 0$. Montrer que l'application g est constante.
2. On suppose que $\alpha + \beta \neq 0$ et que $M \neq N$. Montrer qu'il existe un unique point $G \in D$ tel que $g(G) = 0$, et déterminer son abscisse. Ce point G est appelé *barycentre du système de points pondérés* $\{(M, \alpha), (N, \beta)\}$.
3. Soit k un réel non nul. Montrer que le barycentre de $\{(M, \alpha), (N, \beta)\}$ coïncide avec le barycentre de $\{(M, k\alpha), (N, k\beta)\}$. En déduire qu'on peut toujours se ramener au cas où $\alpha + \beta = 1$ pour étudier le barycentre d'un système de points pondérés $\{(M, \alpha), (N, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$.
4. Étudier graphiquement la position du barycentre de $\{(M, \alpha), (N, \beta)\}$ en fonction des signes de α et de β.
5. Soit X un point de D. Montrer qu'il existe un unique couple (α, β) de réels tels que $\alpha + \beta = 1$ et X est barycentre du système de points pondérés $\{(M, \alpha), (N, \beta)\}$. Déterminer les coefficients α et β dans les cas où $X = M$, $X = N$, X est le milieu de $[M, N]$.

Exercice 7 (vecteurs, *). Soit D une droite munie d'un repère (O, A). On appelle *bipoint* un couple (M, N) de points de D. Deux bipoints (M, N) et (U, V) sont *équipollents* si $\overline{MN} = \overline{UV}$. Dans ce cas, on dit que les deux bipoints équipollents (M, N) et (U, V) représentent le même *vecteur*, que l'on note indifféremment $\overrightarrow{MN}$ ou $\overrightarrow{UV}$.

1. Montrer que tous les bipoints de la forme (M, M) sont équipollents. Ils représentent le *vecteur nul*, qu'on notera 0.
2. Soit u un vecteur et soit M un point de D. Montrer qu'il existe un unique bipoint de la forme (M, N) représentant u.
3. En particulier, soit u un vecteur et soit M l'unique point de D tel que $u = \overrightarrow{OM}$. L'abscisse de M est appelée *abscisse de u dans le repère* (O, A). Montrer que pour tout réel x, il existe un unique vecteur d'abscisse x dans le repère (O, A).
4. Soit u un vecteur d'abscisse x et soit k un réel. On définit ku comme l'unique vecteur d'abscisse kx. Montrer que $(k \cdot k')u = k(k'u)$ pour tout vecteur u et pour tous réels k et k'. Montrer que $0u = 0$.
5. Soit u et v deux vecteurs d'abscisses x et y. On définit $u + v$ comme l'unique vecteur d'abscisse $x + y$. Montrer que les relations suivantes sont vraies pour tous vecteurs et tous réels:
$$(k + k')u = ku + k'u, \qquad\qquad k(u + u') = ku + k'u.$$
6. Soit u un vecteur. Montrer qu'il existe un unique vecteur u' tel que $u + u' = 0$. On posera $u' = -u$. Montrer que $(-1)u = -u$.
7. Montrer la relation de Chasles pour les vecteurs : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{MJ}$. L'illustrer graphiquement.

Exercice 8 (vecteurs et barycentres, **). Soit D une droite munie d'un repère (O, A). Soit M et N deux points distincts de D et soit α et β deux réels. Montrer qu'il existe un unique point G de D tel que $\alpha\overrightarrow{GM} + \beta\overrightarrow{GN} = 0$, qui correspond au barycentre du système de points pondérés $\{(M, \alpha), (N, \alpha)\}$ (*cf.* exercice 6).

Exercice 9 (forme vectorielle pour le repère d'une droite, **). Soit D une droite munie d'un repère (O, A). On pose $i = \overrightarrow{OA}$.

1. Montrer que la donnée de (O, A) est équivalente à la donnée de (O, i).

2. Montrer que pour tout vecteur x, il existe un unique réel k tel que $x = ki$. À quoi correspond le réel k dans l'exercice 7 ? Ceci justifie que la droite est un espace de *dimension* 1.

Exercice 10 (vecteurs et changement de repère, **). Soit D une droite munie de deux repères (O, A) et (O', A').

1. Montrer que deux bipoints (M, N) et (U, V) sont équipollents dans le repère (O, A) si et seulement si ils sont équipollents dans le repère (O', A'). La notion de vecteur est donc *intrinsèque*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du repère choisi.

2. L'abscisse des vecteurs est-elle modifée *a priori* lorsqu'on change de repère ? À quelle condition sur les deux paires (O, A) et (O', A') est-elle invariante ?

2 Plans

Par analogie avec ce qu'on a vu précédemment sur les droites, on considèrera les plans *via* le *modèle standard* du plan qui est $\mathbb{R}^2$. Par convention, on écrit les éléments de $\mathbb{R}^2$ en colonnes, comme $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. On note en particulier $0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Les éléments de $\mathbb{R}^2$ peuvent être additionnés entre eux et multipliés par les scalaires, suivant les règles évidentes suivantes :

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+u \\ y+v \end{smallmatrix}\right), \qquad k \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} kx \\ ky \end{smallmatrix}\right).$$

Par définition, tout plan P est un ensemble de points parmi lesquels on peut arbitrairement choisir un triplet de points (O, I, J) appelé *repère du plan.* Une fois choisi ce repère, il existe une unique fonction *coordonnés*, notons-la $f : P \to \mathbb{R}^2$, vérifiant :

$$f(O) = 0, \qquad f(I) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad f(J) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

La *fonction coordonnées* f joue pour le plan P exactement le même rôle que la fonction *abscisse* dans le cas des droites. Elle permet en particulier de définir l'équivalence de deux bipoints (M, N) et (U, V) par l'égalité suivante dans $\mathbb{R}^2$: $f(N) - f(M) = f(V) - f(U)$.

Deux bipoints équipollents (M, N) et (U, V) définissent le même *vecteur*, ce qu'on note : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{UV}$. Comme précédemment, on vérifie qu'on peut toujours choisir de fixer une origine M et trouver un bipoint (M, N) équipollent à un autre bipoint. En particulier, en choisissant l'origine du repère comme origine des bipoints, on identifie l'ensemble des vecteurs avec $\mathbb{R}^2$. Chaque vecteur u correspond donc à un unique élément $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^2$, et la correspondance $u = \overrightarrow{OM}$ définit une bijection entre les vecteurs u et les points M du plan.

L'addition des vecteurs est définie par leurs coordonnées comme dans l'exercice 7. L'addition des vecteurs "par les flèches" correspond à la relation de Chasles : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{MJ}$.

En Physique, les vecteurs sont souvent notés par des lettres surmontées d'une flèche, par exemple $\vec{i}$. La notation $\overrightarrow{MN}$ est aussi utilisée, les deux notations ne doivent pas être confondues.

Dans tous les exercices suivants, on se donne un plan P muni d'un repère (O, I, J).

Exercice 11 (vecteurs colinéaires, *). Soit u et v deux vecteurs de P. On dit que v est *colinéaire* à u s'il existe un scalaire $k \in \mathbb{R}$ tel que $v = ku$.

1. Quels sont les vecteurs colinéaires à 0 ?
2. Montrer que si v est colinéaire à u et si w est colinéaire à v, alors w est colinéaire à u.
3. Montrer que si v est colinéaire à u et si $v \neq 0$, alors u est colinéaire à v.
4. Montrer que si v est colinéaire à u et si $u \neq 0$, alors le scalaire k tel que $v = ku$ est unique.

Exercice 12 (droites du plan : un point et un vecteur non nul, *). Soit A un point du plan P et soit u un vecteur non nul. On considère l'ensemble D de points du plan défini par :

$$D = \{M \in P \ : \ \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } u\}.$$

1. Montrer que D est une droite dont on donnera la fonction abscisse $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que D est la *droite passant par A et dirigée par u*.
2. Donner une représentation paramétrique de D.
3. Soit A' un point de P et u' un vecteur de P, et soit D' la droite passant par A' et dirigée par u'. Montrer que $D = D'$ si et seulement si $A' \in D$ et u' est colinéaire à u.
4. On dit que deux droites sont *parallèles* si elles sont égales ou si elles ne s'intersectent pas, ce qu'on note $D \parallel D'$. Montrer que deux droites sont parallèles si et seulement si deux quelconques de leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exercice 13 (droites du plan : deux points distincts, *). Soit A et B deux points distincts du plan P.

1. Montrer qu'il existe une unique droite passant par A et B. On la note (AB). En donner un vecteur directeur.
2. Exemple : donner une équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $\binom{0}{1/2}$ et $\binom{-1}{-1}$.
3. Exemple : soit D la droite d'équation cartésienne $2x - 3y - 1 = 0$. En trouver un vecteur directeur. Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point de coorodonnées $\binom{1}{1}$ et parallèle à D.

Exercice 14 (parallélogrammes, **). Soit (A, B, C, D) un quadruplet de points du plan, non trois à trois alignés. On dit que $ABCD$ est un parallélograme si $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:
   i) $ABCD$ est un parallélogramme.
   ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   iii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Exercice 15 (norme et distance, produit scalaire, *). On appelle *norme euclidienne*, ou simplement *norme*, d'un vecteur u de coordonnées $\binom{x}{y}$, le nombre noté $\|u\|$ et défini par $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. On notera donc : $\|u\|^2 = x^2 + y^2$. La *distance* entre deux points M et N du plan est définie par $d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$.

1. Vérifier que la distance est symétrique et définie positive. On admettra qu'elle vérifie aussi l'inégalité triangulaire.

2. Soit u et u' deux vecteurs de coordonnées $\binom{x}{y}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On appelle *produit scalaire calculé dans le repère (O, I, J) de u et u'*, ou plus simplement *produit scalaire de u et u'*, le nombre $\langle u, v\rangle$ défini par $\langle u, u'\rangle = xx' + yy'$. Montrer que :

   (a) $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$.

   (b) $\langle ku, k'v\rangle = kk'\langle u, v\rangle$.

   (c) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

   (d) $\langle u + v, u + v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$.

3. On admettra le résultat suivant: si u et v sont deux vecteurs non nuls faisant un angle θ, alors $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$. Remarquer qu'on peut indifféremment considérer l'angle orienté ou l'angle non orienté puisque $\cos\theta = \cos(-\theta)$.

   Soit u un vecteur non nul fixé, et soit $v(\theta)$ le vecteur de même norme que u, faisant l'angle orienté θ avec u. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles : $\langle u, v(\theta)\rangle$ est maximal, minimal, et les valeurs correspondantes du produit scalaire. *Idem* pour $\big|\langle u, v(\theta)\rangle\big|$. Interpréter ces résultats physiquement lorsque le produit scalaire correspond au travail d'une force le long d'un déplacement.

Remarque : le produit scalaire dépend *a priori* du repère dans lequel on l'a calculé.

Exercice 16 (orthogonalité, *). On dit que deux vecteurs u et v sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, noté $u \perp v$. On dit que deux droites D et D' sont *orthogonales* si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, noté $D \perp D'$ (remarquer que cette propriété ne dépend pas des vecteurs directeurs choisis).

1. Montrer que le repère (O, I, J) est *orthonormé*, c'est-à-dire : $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = 1$ et $\langle\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\rangle = 0$.

2. Montrer que pour tout vecteur u, les coordonnées $\binom{x}{y}$ de u s'obtiennent par : $x = \langle u, \overrightarrow{OI}\rangle$ et $y = \langle u, \overrightarrow{OJ}\rangle$.

3. Soit u un vecteur non nul, de coordonnées $\binom{a}{b}$. Déterminer tous les vecteurs de même norme que u et qui lui sont orthogonaux.

4. Soit A un point de coordonnées $\binom{x}{y}$ et soit u un vecteur non nul de coordonnées $\binom{a}{b}$. Soit D l'ensemble des points suivants :

   $$D = \{M \in P \,:\, \overrightarrow{AM} \perp u\}.$$

   Montrer que D est une droite dont on donnera un vecteur directeur.

5. Soit A et B deux points distincts, et soit I le milieu de $[AB]$. Soit C l'ensemble suivant :

   $$C = \{M \in P \,:\, \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}\}.$$

   Montrer que C est le cercle centré I et de diamètre $\|\overrightarrow{AB}\|$.

6. Soit A et B deux points disctincts de P.

   (a) Déterminer la nature de l'ensemble suivant :

   $$D = \{M \in P \,:\, \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|\}.$$

   Indication : élever la relation $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ au carré et introduire le point I milieu de $[AB]$.

(b) Déterminer la nature de l'ensemble suivant :

$$D = \{M \in P \ : \ 2\|\overrightarrow{MA}\| = 3\|\overrightarrow{MB}\|\}.$$

Indication : élever la relation $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ au carré et introduire un barycentre de A et B avec des coefficients bien choisis.

Remarque : puisque le produit scalaire dépend *a priori* du repère dans lequel on l'a calculé, la notion d'orthogonalité dépend aussi du repère de base. En Physique, on procède souvent dans l'autre sens : on part d'un repère qu'on estime être orthonormé, à cause de considérations physiques. On définit le produit scalaire comme le produit scalaire calculé dans ce repère. On peut alors utiliser la notion d'orthogonalité induite par ce produit scalaire, qui correspond effectivement à notre notion intuitive d'orthogonalité. il est donc important d'effectuer les calculs de produit scalaire dans un repère orthonormé au départ.

3 Exercices récapitualitifs et d'évaluation

Exercice 17. Soit P un plan muni d'un repère (O, I, J). Soit D la droite d'équation $2x - 3y + 1 = 0$.

1. Donner une représentation de D par une paire (A, u), où A est un point de D et u en est un vecteur directeur. En déduire une représentation paramétrique de D.
2. Soit a un paramètre réel et soit D_a la droite d'équation $ax - y - 1 = 0$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $D \parallel D_a$.

Exercice 18. Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit A et B les points de P de coordonnées $\binom{0}{2}$ et $\binom{3}{0}$. Soit D la droite passant par A et B.

1. Déterminer une equation de D, et en donner un vecteur directeur de norme 1.
2. Soit C le point de coordonnées $\binom{x_0}{y_0}$. Déterminer une équation de la droite E passant par C et parallèle à D, et une équation de la droite H orthogonale à D et passant par C.

Exercice 19. Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit D la droite d'équation $-2x + y - 4 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de l'origine O sur D.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point de coordonnées $\binom{x_0}{y_0}$ sur D.

Exercice 20. Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit A un point de coordonnées $\binom{x_0}{y_0}$ et soir $r > 0$ un réel. Donner une équation paramétrique du cercle de centre A et de rayon r.

Exercice 21. Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit A et B les points de coordonnées $\binom{1}{1}$ et $\binom{-3}{2}$. Déterminer l'ensemble suivant :

$$D = \left\{M \in P \ : \ \|\overrightarrow{AM}\| = \frac{3}{2}\|\overrightarrow{BM}\|\right\}.$$

Exercice 22. Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit D la droite d'équation $-3x + y - 1 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées du symétrique de O par rapport à D.
2. Déterminer les coordonnées du symétrique d'un point de coordonnées $\binom{x_0}{y_0}$ par rapport à D.

Exercice 23. Soit P un plan muni d'un repère (O, I, J). Soit D la droite d'équation $2x - y = 0$, et soit A le point de D de coordonnées $\binom{1}{2}$. Pour tout point M de D de coordonnées $\binom{t}{2t}$, déterminer les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$ et M est le barycentre du système pondéré $\big\{(O, \alpha), (A, \beta)\big\}$.