Droites

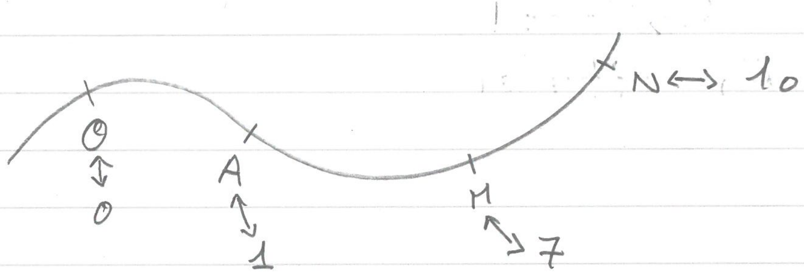
Définition : On appelle <u>droite (abstraite)</u> un ensemble D muni d'un couple de points (O, A) appelé <u>repère</u>, avec $O \neq A$, et d'une bijection $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée <u>abscisse</u> tq $f(O) = 0$ et $f(A) = 1$.

Je note sur les schémas $M \leftrightarrow x$ pour $f(M) = x$.

Exemples :

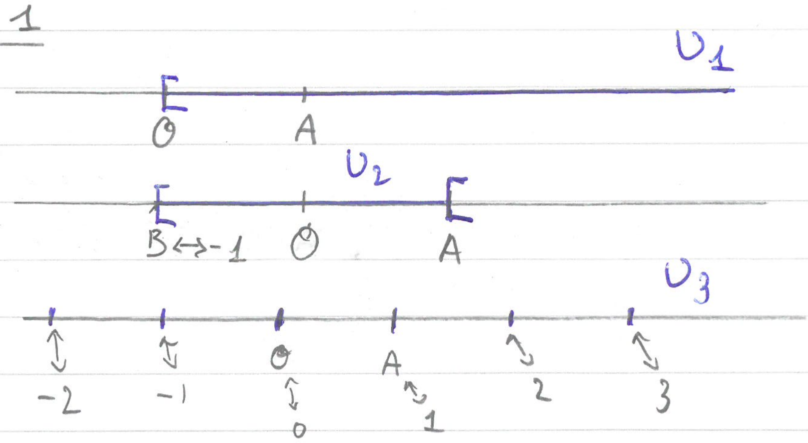
1) $D = \mathbb{R}$, $O = 0$, $A = 1$ et $f(x) = x$

2)



La $f°$ d'abscisse permet de faire abstraction de ce qu'est réellement D (pour l'exemple 2) où D ne correspond pas à l'image qu'on se fait d'une droite) et de travailler avec l'abscisse des points, qui eux appartiennent à la droite $\mathbb{R}$.

Exo 1



Sur $\mathbb{R}$, on peut mesurer l'écart entre deux nombres x et y en considérant $y-x$. Cette valeur étant positive si y est "après" x (ie $y>x$), négative si y est "avant" x ($y<x$) et nulle si $y=x$.

Définition:
Pour une droite munie d'une abscisse f, on peut grâce à cette dernière définir "l'écart" entre deux points M et N, appelée mesure algébrique :

$$\overline{MN} = f(N) - f(M).$$

Exo5

1. $\overline{MN} = f(N) - f(M) = -\big(f(M) - f(N)\big) = -\overline{NM}$
2. $\overline{MN} = 0 \iff f(M) = f(N)$
$\iff M = N$
car f est bijective
3. $\overline{MN} + \overline{NJ} = \big(\cancel{f(N)} - f(M)\big) + \big(f(J) - \cancel{f(N)}\big) = f(J) - f(M) = \overline{MJ}$

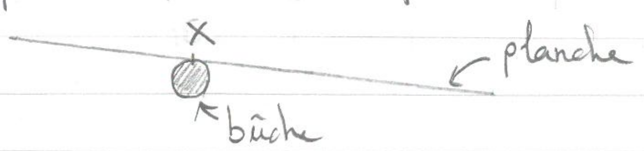
Exo6

1. Supposons $\alpha + \beta = 0$, ie $\beta = -\alpha$.

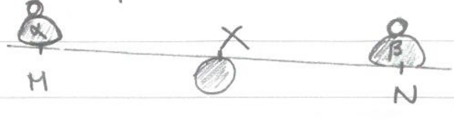
$$\begin{aligned} g(X) &= \alpha \overline{XM} + \beta \overline{XN} \\ &= \alpha \overline{XM} - \alpha \overline{XN} \\ &= \alpha \left(\overline{XM} - \overline{XN}\right) \\ &= \alpha \left(\overline{NX} + \overline{XM}\right) \\ &= \alpha \overline{NM} \end{aligned}$$

$g(X)$ ne dépend pas de X, donc g est constante.

Supposons qu'on pose une bûche à la position X sous une planche.



À présent, on place deux poids de masses α et β aux positions M et N.



Où faudrait-il placer X pour que la planche soit en équilibre et horizontale ? Ce point est unique et est appelé barycentre

Plus le poids de M est grand, plus le barycentre est proche de M, et idem pour N.

2. Trouvons le barycentre de $\{(M,\alpha),(N,\beta)\}$, que l'on notera G.
Grâce à la fonction abscisse il suffit de travailler avec des nombre réels au lieu de points abstraits.

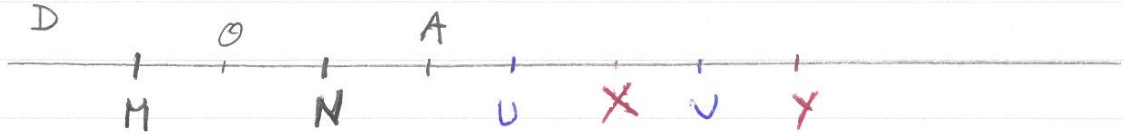
Il faut résoudre $\alpha\overline{GM}+\beta\overline{GN}=0$. Notons $x=f(G)$ l'abscisse de G, $m=f(M)$ et $n=f(N)$.

$$
\begin{aligned}
& \alpha\overline{GM}+\beta\overline{GN}=0 \\
\iff\ & \alpha(x-m)+\beta(x-n)=0 \\
\iff\ & (\alpha+\beta)x=\alpha m+\beta n \\
\iff\ & x=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}m+\frac{\beta}{\alpha+\beta}n, \quad \text{car } \alpha+\beta\neq 0.
\end{aligned}
$$

Donc $\left[x \text{ est l'abscisse du barycentre} \iff x=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}m+\frac{\beta}{\alpha+\beta}n\right]$.
On a donc prouvé l'existence (implicaᵒ $\Leftarrow$) et l'unicité (implication $\Rightarrow$).

<u>Définition:</u> G est le <u>barycentre</u> du système pondéré $\{(M,\alpha),(N,\beta)\}$ si $\alpha\overline{GM}+\beta\overline{GN}=0$

3. D'après 2., si $k\neq 0$, l'abscisse du barycentre ne change pas si on multiplie les poids par k.
<u>Conclusion:</u> En divisant les poids par $\alpha+\beta$, le barycentre reste le même et la somme des nouveaux poids vaut $\underline{1}$.
C'est-à-dire que si vous faites un exo sur des barycentres et que vous avez pour seule hypothèse $\alpha+\beta\neq 0$, vous pouvez supposer que $\alpha+\beta=1$ sans changer le barycentre.



<u>Définition</u> : Un bipoint de D est un couple de points de D, c'est-à-dire un couple (M, N) où $M, N \in D$.

Sur le schéma précédent, les bipoints (M,N), (X,Y) et (U,V) ont tous le même "écart", ie
$$\overline{MN} = \overline{UV} = \overline{XY}.$$
<u>Définition</u> : Deux bipoints (M,N) et (U,V) tq $\overline{MN} = \overline{UV}$ sont dits <u>équipollents</u>.

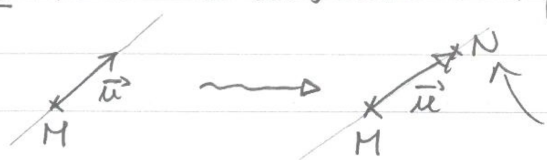
Sans préciser comment définir les vecteurs, on partira du principe que
$$\overline{MN} = \overline{UV} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{UV},$$
et que tout vecteur de D est de la forme $\overrightarrow{MN}$ avec $M, N \in D$.

L'exo 7 nous permet d'utiliser les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $M \in D$, $\overrightarrow{MM}$ est ce qu'on appelle le <u>vecteur nul</u>, noté $\vec{0}$

(2) Soient M un point de D et $\vec{u}$ un vecteur de D, il existe un unique point $N \in D$ tq $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

<u>NB</u> : N est la translation de M par $\vec{u}$.



c'est le point tq $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$

(3) Les vecteurs ont eux aussi une notion d'abscisse ; soit $\vec{u}$ un vecteur de D et M tq $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, <u>l'abscisse de $\vec{u}$ dans le repère (O, A)</u> est défini comme l'abscisse de M dans (O, A).

(4) Règles de calcul vectoriel :

(i) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ et $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

(ii) Pour tout $\vec{u}$ il existe $\vec{v}$ tq $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, on note ce vecteur $-\vec{u}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

(iii) $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(iv) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (vi) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$

<u>Conclusion</u> : Vous avez le droit de faire tout ce que vous savez déjà faire

Propriété : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\lambda \vec{u} = \mu \vec{u} \Rightarrow \lambda = \mu$$

Preuve : $\lambda \vec{u} = \mu \vec{u} \Rightarrow (\lambda - \mu)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \lambda - \mu = 0$

sinon on aurait en divisant par $\lambda - \mu$ que $\vec{u} = \vec{0}$.

Exo 8

⚠ Il faut supposer $\alpha + \beta = 1$.

Soit $G \in D$,

$$\alpha \vec{GM} + \beta \vec{GN} = \alpha(\vec{GO} + \vec{OM}) + \beta(\vec{GO} + \vec{ON})$$
$$= \overbrace{(\alpha + \beta)}^{1}\vec{GO} + \alpha \vec{OM} + \beta \vec{ON}$$

Donc $\alpha \vec{GM} + \beta \vec{GN} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OG} = \alpha \vec{OM} + \beta \vec{ON}$,
c'est-à-dire que G est la translaᵒ de O par $\alpha \vec{OM} + \beta \vec{ON}$
(cf correcᵒ exo 7 - remarque (2)).

Exo 9

1. Cette question signifie que si on nous donne (O, A) on peut déduire $(O, \vec{\imath})$ (par définition, c'est vrai) et que si on nous donne $(O, \vec{\imath})$ on peut déduire (O, A) (où $\vec{\imath} = \vec{OA}$).

   Si on a $(O, \vec{\imath})$, il faut trouver quel est le point A tq $\vec{\imath} = \vec{OA}$. Il s'agit tout simplement de "$A = O + \vec{\imath}$" c'est-à-dire que A est le translaté de O par $\vec{\imath}$.

2. Soit $\vec{u}$ un vecteur de D, disons $\vec{OM}$. Trouvons $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\vec{u} = \lambda \vec{\imath}$, ie $\vec{OM} = \lambda \vec{OA}$.
   * $\lambda \vec{OA}$ est l'unique vecteur d'abscisse λ, car $\vec{OA}$ est d'abscisse 1 (exo 7 - qᵒ4)
   * $\vec{OM}$ a pour abscisse $f(M)$ (exo 7 - qᵒ3)

   Donc $\vec{OM} = \lambda \vec{OA} \Leftrightarrow \lambda = f(M)$.

Propriétés :

(i) $\overrightarrow{OM} = f(M)\,\overrightarrow{OA}$

(ii) $\overrightarrow{MN} = \overline{MN}\,\overrightarrow{OA}$

Preuve : exercice (utiliser l'exo 8)

Remarque : On peut faire l'exo 8 en se ramenant à l'exo 6 grâce à la propriété précédente.

Plans

Définition : On appelle <u>plan (abstrait)</u> un ensemble P muni d'un triplet de points distincts (O, I, J) appelé <u>repère</u>, et d'une bijection $f : P \to \mathbb{R}^2$ appelée <u>coordonnée</u> tq

- $f(O) = 0 = \binom{0}{0}$
- $f(I) = \binom{1}{0}$
- $f(J) = \binom{0}{1}$

Toutes les propriétés des vecteurs sur une droite evoquées dans la partie précédente reste vrai dans le plan.
Attention au lien coordonnées - vecteurs :

Droite :

$$\overrightarrow{UV} = x\,\overrightarrow{OA} \iff f(V) - f(U) = x$$

en particulier

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OA} \iff f(M) = x$$

Plan :

$$\overrightarrow{UV} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ} \iff f(V) - f(U) = \binom{x}{y}$$

en particulier

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ} \iff f(M) = \binom{x}{y}$$

Définition : La <u>droite D (du plan P)</u> passant par A et dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$ est définie comme

$$D = \{ M \in P \mid \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \vec{u} \}.$$

<u>Propriétés</u> :

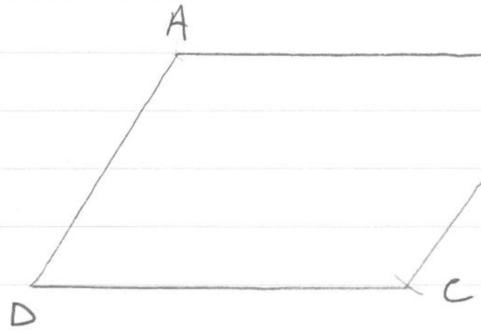
exo12 → (1) Soient D et D', deux droites passant par A et A' respectivement et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ respectivement.

(i) $D = D' \iff A' \in D$ et $\vec{u}'$ est colinéaire à $\vec{u}$.

(ii) $D \parallel D' \iff \vec{u}'$ est colinéaire à $\vec{u}$

(2) Soient $A \neq B$, il existe une unique droite passant par A et B ; elle est dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

Exo 12



1. (i) ⇒ (ii), (iii) : supposons que $(ABCD)$ soit un parallélogramme, montrons que $\vec{AB} = \vec{DC}$ (la preuve est similaire pour $(AB) // (DC)$ donc (pp (1)-(ii) des propriétés précédentes)
$\vec{AB} = \lambda \vec{DC}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$,
et $(AD) // (BC)$ donc $\vec{AD} = \mu \vec{BC}$ pour un $\mu \in \mathbb{R}$.

Il ne reste plus qu'à mq $\lambda = 1$:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \lambda \vec{DC} + \vec{BC}$$
$$= \vec{AD} + \vec{DC} = \mu \vec{BC} + \vec{DC}$$

En soustrayant les deux lignes, on obtient
$$(\lambda - 1) \vec{DC} + (1-\mu) \vec{BC} = \vec{0}$$

Il est impossible que λ soit différent de 1, sinon on aurait $\vec{DC} = \frac{\mu-1}{\lambda-1} \vec{BC}$ et donc que B, D et C sont alignés, ce qui contredirait l'énoncé.

NB : Dire que X, Y et Z sont alignés signifie que $\vec{XY}$ est colinéaire à $\vec{XZ}$, ou l'inverse.

(ii) ⇒ (i), (iii) ⇒ (i) : supposons $\vec{AB} = \vec{DC}$ (le cas $\vec{AD} = \vec{BC}$ est équivalent) et montrons que $ABCD$ est un parallélogramme.
On a bien évidemment $(AB) // (DC)$, mais également $(AD) // (BC)$:
$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} \underset{\text{par hypothèse}}{=} \vec{AB} + \vec{BC} - \vec{AB} = \vec{BC}$$