Q°4 : On cherche un nombre $n \in \mathbb{N}$ de la forme

$$n = (n_2 n_1 n_0)_{10} = 100 n_2 + 10 n_1 + n_0$$

tel que (a) $5 / n$,
(b) $14 / n$,
(c) $n_2 + n_1 + n_0 = 14$.

Par (a) et (b), $10 / n$ donc $n_0 = 0$, et (c) revient ainsi à $n_2 + n_1 = 14$. Les différentes possibilités sont donc 950, 860, 770, 680, 590. Le nombre 770 est bien un nombre satisfaisant (a), (b) et (c).

Q°6 : On cherche une dimension $c \in \mathbb{N}$ telle que $N \in \mathbb{N}$ carrés de côté c recouvre le rectangle de largeur $l = 90$ et longueur $L = 126$.
Les nombres N et c doivent alors satisfaire

$$L \cdot l = Nc^2,$$
$$126 \cdot 90 = Nc^2$$
$$(2 \cdot 7 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 3^2) = 35 (2 \cdot 3 \cdot 3)^2$$

On peut donc prendre $c = 1, 2, 3, 6$ ou 9, et $N = \frac{Ll}{c^2} \in \mathbb{N}$.

Q°24 : On cherche à résoudre pour $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système

$$(S) \begin{cases} PGCD(a,b) = 16, \\ a + b = 256. \end{cases}$$

Supposons qu'une solu° (a,b) existe et notons

$$a = 16a',$$
$$b = 16b',$$

où a' et b' sont premiers entre eux car $PGCD(a,b) = 16$. Ils satisfont donc

$$(S') \begin{cases} a' + b' = 16 \\ PGCD(a', b') = 1 \end{cases}$$

Les solutions de (S') sont $(a', b') = (9, 7)$ ou $(7, 9)$, donc les sol^{ns} de (S) sont $(a, b) = (16\cdot 9, 16\cdot 7)$ ou $(16\cdot 7, 16\cdot 9)$.

__Q° 31__ : Soit $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$, montrons que
$$s := (abc)_{10} + (abb)_{10} + (acc)_{10}$$
est divisible par 3.

On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'équivalence $3 / n \iff n \equiv 0\ (3)$, donc il suffit de mq $s \equiv 0\ (3)$.

$$\begin{aligned} s &= (abc)_{10} + (abb)_{10} + (acc)_{10} \\ &= (10^2 a + 10b + c) + (10^2 a + 10b + b) + (10^2 a + 10c + c) \\ &= 3\cdot 10^2 a + 10(2b + c) + (2c + b) \\ &\equiv 0 \cdot 10^2 a + 1\cdot(2b + c) + (2c + b) \quad (3), \end{aligned}$$

car $10 = 3\cdot 3 + 1 \equiv 1\ (3)$. Donc,

$$\begin{aligned} s &\equiv 3c + 3b\ (3) \\ &\equiv 0 \quad (3). \end{aligned}$$

__Q° 39__ : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{12n+1}{30n+2}$ est irréductible, ie que $PGCD(12n+1, 30n+2)$, ou de manière équivalente, que $12n+1$ et $30n+1$ satisfont une relation de Bézout :
$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ tq } u(12n+1) + v(30n+2) = 1.$$
Il suffit de prendre $(u, v) = (5, -2)$:
$$\begin{aligned} &5(12n+1) - 2(30n+2) \\ &= \cancel{60n} + 5 - \cancel{60n} - 4 = 1. \end{aligned}$$

Q° 42 : Montrons que pour tout entier p premier et $k = 1, 2, \cdots, p-2, p-1$, on a $p / \binom{p}{k}$.

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad k!\,\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!} = p(p-1)\cdots(p-(k-2))(p-(k-1))$$

Donc, p divise $\frac{p!}{(p-k)!}$.

(*) De plus, p ne divise pas $k!$, sinon, par le th de Gauss, il diviserait un de ses facteurs, à savoir $1, 2, 3, \cdots, k-1$ et k, ce qui contredirait l'hypothèse $k < p$.

Donc, comme le nb premier p divise $\frac{p!}{(p-k)!}$ mais pas $k!$, le th de Gauss nous dit que p divise $\binom{p}{k}$.

Exercice : démontrer proprement (par récurrence) le lemme (*) :

Si un nombre premier p divise le produit $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, alors il existe $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que p divise a_j.