Exercice 1

1. On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \log x \, dx$. Il y a deux problèmes ; un en $x \to 0^+$ où $\log x \to -\infty$ et un en $x \to +\infty$ où $\log x \to +\infty$, on coupe donc ces deux singularités :

$$\int_0^{\infty} \log x \, dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ M \to +\infty}} \int_\varepsilon^M \log x \, dx.$$

Par intégration par partie, on a pour $0 < \varepsilon < M < \infty$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^M \log x \, dx = \int_\varepsilon^M (x)' \log x \, dx = [x \log x]_{x=\varepsilon}^{x=M} - \int_\varepsilon^M x (\log x)' \, dx \\ = M \log M - \varepsilon \log \varepsilon - \int_\varepsilon^M dx \\ = M \log M - \varepsilon \log \varepsilon - (M - \varepsilon),\end{aligned}$$

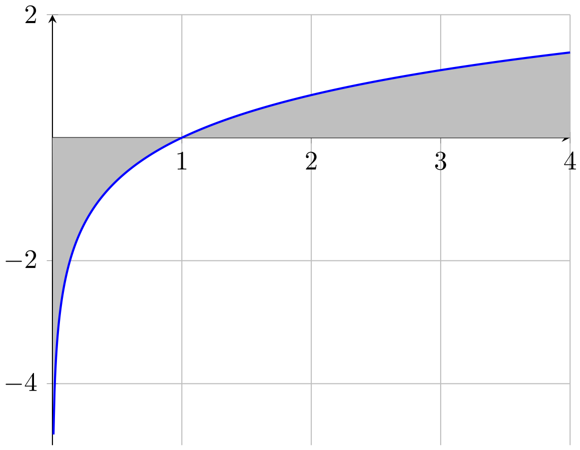
où on a utilisé que $(\log x)' = \frac{1}{x}$ dans la deuxième ligne. En faisant $\varepsilon \to 0^+$, on a $\varepsilon \log \varepsilon \to 0$ par puissance comparée, et donc

$$\int_0^M \log x \, dx = M \log M - M,$$

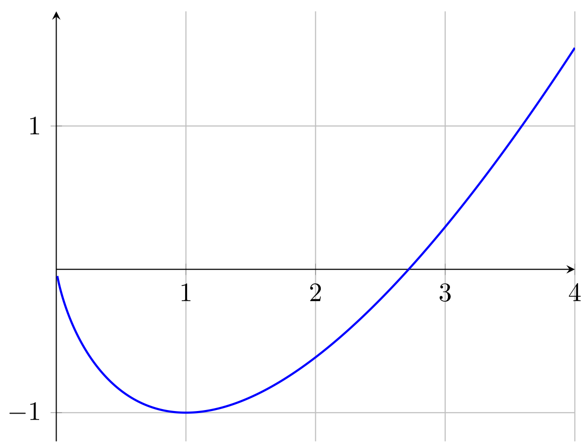
ce qui implique donc en faisant $M \to +\infty$

$$\int_0^\infty \log x dx = +\infty.$$

L'intégrale converge en 0, mais diverge en $+\infty$, donc l'intégrale sur $(0, +\infty)$ diverge.



(a) $\log x$



(b) $x \log x - x$

Remarque : On a déterminé une primitive du logarithme : $(x \log x - x)' = \log x$.

2. On considère l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x\log x}$. Il y a deux problèmes ; un en $x \to 0^+$ et un en $x \to 1^-$ car dans chaque cas $x \log x \to 0^-$ (par croissance comparée en 0) et donc $\frac{1}{x\log x} \to -\infty$, on coupe donc ces singularités :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\log x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \alpha\to 1^-}} \int_\varepsilon^\alpha \frac{dx}{x\log x}.$$

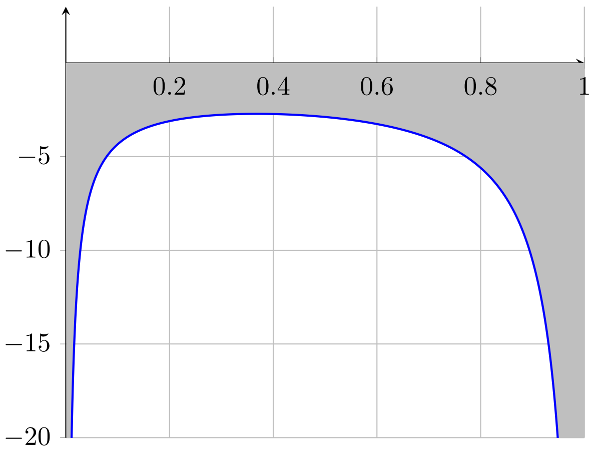
On reconnait $\frac{dx}{x} = (\log x)' dx$, de plus $\log x$ apparait dans l'intégrande, poser le changement de variable $y = \log x$ simplifiera donc l'intégrale : pour $0 < \varepsilon < \alpha < 1$ on a

$$\int_\varepsilon^\alpha \frac{dx}{x\log x} = \int_{\log\varepsilon}^{\log\alpha} \frac{dy}{y}.$$

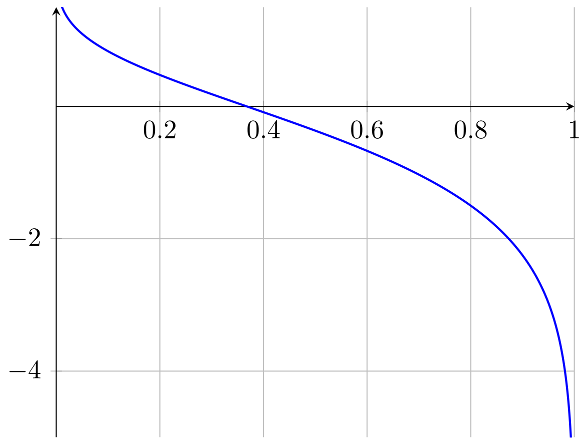
Étant donné que $\varepsilon \in (0,1)$ et $\alpha \in (0,1)$, on a donc que $\log(\varepsilon) < 0$ et $\log\alpha < 0$, on utilise alors que $(\log(-x))' = \frac{1}{x}$ pour $x < 0$ [1] :

$$\int_\varepsilon^\alpha \frac{dx}{x\log x} = [\log(-y)]_{y=\log\varepsilon}^{y=\log\alpha} = \log(-\log\alpha) - \log(-\log\varepsilon).$$

On a que $\log(-\log\alpha) \to -\infty$ lorsque $\alpha \to 1^-$ ainsi que $\log(-\log\varepsilon) \to +\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$, donc l'intégrale sur $[\varepsilon,\alpha]$ diverge vers $-\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$ ou $\alpha \to 1^-$. On conclut que l'intégrale sur $(0,1)$ diverge.



(a) $\frac{1}{x\log x}$



(b) $\log(-\log x)$

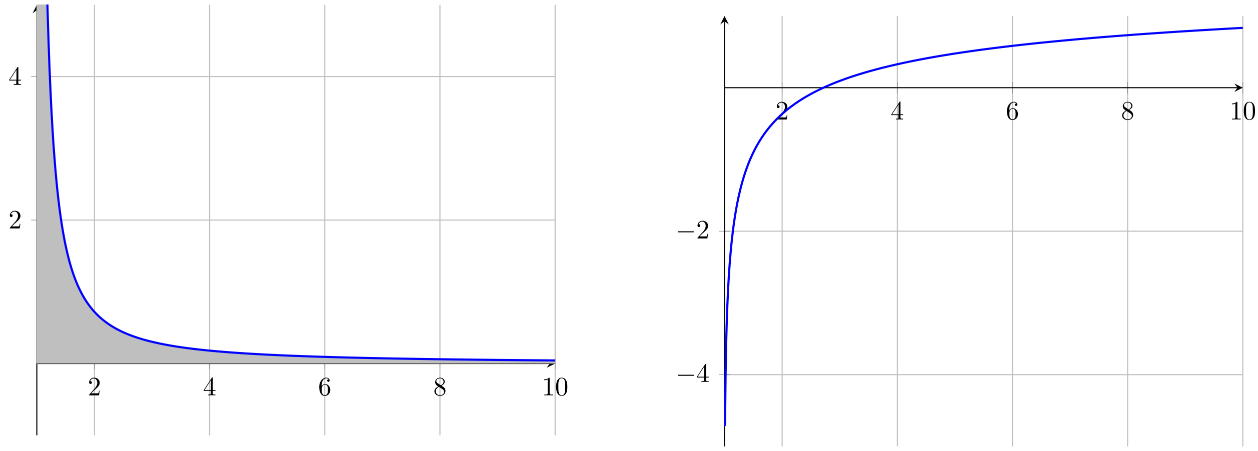
3. On considère l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\log x}$. Il y a deux problèmes ; un en $x \to 1^+$ où $\frac{1}{x\log x} \to$

1. ou plus généralement, que $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

$+\infty$ et un en $x \to \infty$. Les mêmes calculs[2] que pour $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\log x}$ montrent que

$$\int_\alpha^M \frac{dx}{x\log x} = \log(\log M) - \log(\log\alpha).$$

L'intégrale sur $[\alpha, M]$ diverge lorsque $\alpha \to 1$ ou $M \to \infty$, donc l'intégrale sur $(1, +\infty)$ diverge.



(a) $\dfrac{1}{x\log x}$ (b) $\log(\log x)$

4. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Il y a un problème en $x \to 1^-$ où $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to +\infty$, on coupe donc cette singularité :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\alpha\to 1^-} \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

On utilise le fait que $(-\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: pour $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(0) - \arccos\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\alpha.$$

En faisant $\alpha \to 1^-$, on obtient

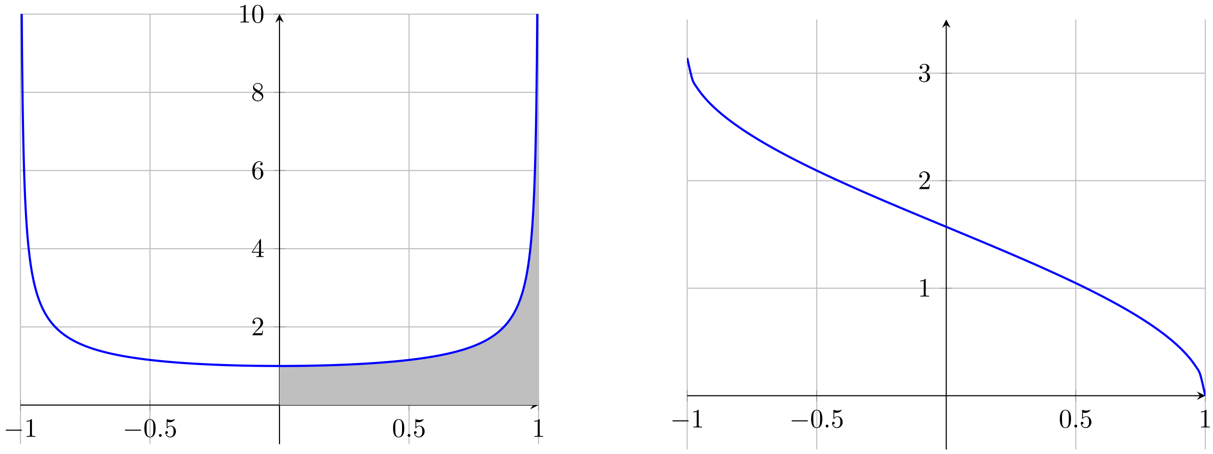
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale sur $(0, 1)$ est donc convergente.

5. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}dx$. Il y a un problème en $x \to 1^-$, où $\frac{x}{(1-x)^2} \to +\infty$ on coupe donc cette singularité :

$$\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}dx = \lim_{\alpha\to 1^-} \int_0^\alpha \frac{x}{(1-x)^2}dx.$$

2. sauf qu'ici $\log\alpha > 0$ et $\log M > 0$, donc on utilise cette fois-ci $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$



(a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\arccos(x)$

Afin de simplifier la fraction, on écrit

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x-1+1}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2},$$

ce qui nous permet d'intégrer, sachant que $(\log(1-x))' = \dfrac{-1}{1-x}$ et $\left(\dfrac{-1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \frac{x}{(1-x)^2}dx &= [\log(1-x)]_{x=0}^{x=\alpha} + \left[\frac{-1}{1-x}\right]_{x=0}^{x=\alpha} \\ &= \log(1-\alpha) - \log 1 + 1 - \frac{1}{1-\alpha} \\ &= 1 + \log(1-\alpha) - \frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Lorsque $\alpha \to 1^-$, on a une forme indéterminée :

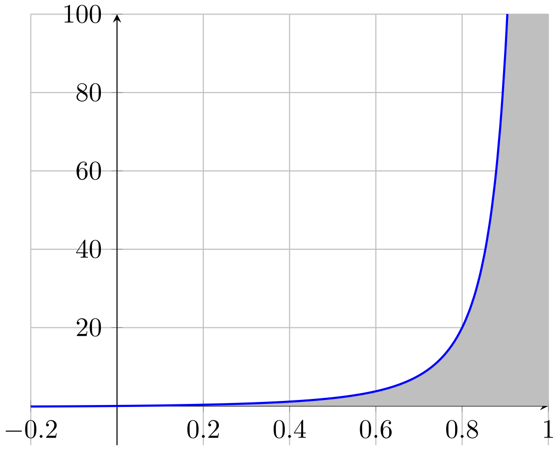
$$1 + \log(1-\alpha) - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{\alpha\to 1^-} «-\infty + \infty».$$

Cependant, «les polynômes sont plus faibles que les logarithmes» (*théorème des croissances comparées*), on peut donc s'attendre à ce que $\frac{1}{1-\alpha}$ l'emporte. Pour lever cette indétermination, on peut par exemple mettre au même dénominateur :

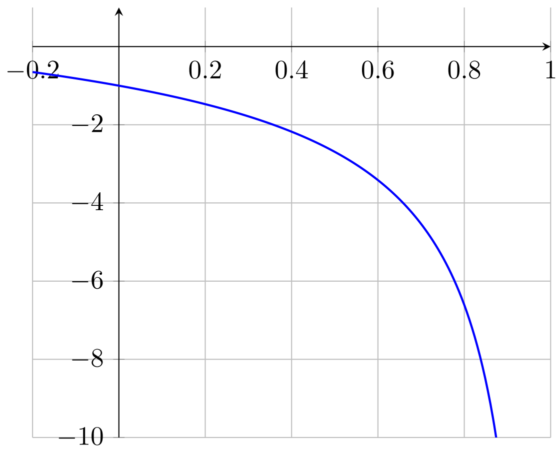
$$\log(1-\alpha) - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{(1-\alpha)\log(1-\alpha) - 1}{1-\alpha},$$

et, en effet, lorsque $\alpha \to 1^-$, on a que $(1-\alpha)\log(1-\alpha) \to 0$, et donc

$$\log(1-\alpha) - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{\alpha\to 1^-} -\infty.$$



(a) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$



(b) $\log(1-x) - \dfrac{1}{1-x}$

6. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$. Il y a deux problèmes ; un en $x \to 0^+$ où $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} \to +\infty$ et un en $x \to +\infty$, on coupe donc ces singularités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ M \to +\infty}} \int_\varepsilon^M \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$$

On reconnait $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})' dx$, on effectue alors le changement de variable $y = \sqrt{x}$: pour $0 < \varepsilon < M < \infty$

$$\int_\varepsilon^M \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{M}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}},$$

ce qui permet de se débarrasser de la singularité en 0, et permet de faire $\varepsilon \to 0^+$, d'où

$$\int_0^M \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\int_0^{\sqrt{M}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

On peut alors soit reconnaitre la dérivée $(\operatorname{arcsinh}(y))' = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ pour déduire

$$\int_0^M \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{M}\right) - 2\operatorname{arcsinh}(0) = 2\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{M}\right) \xrightarrow{M \to +\infty} +\infty$$

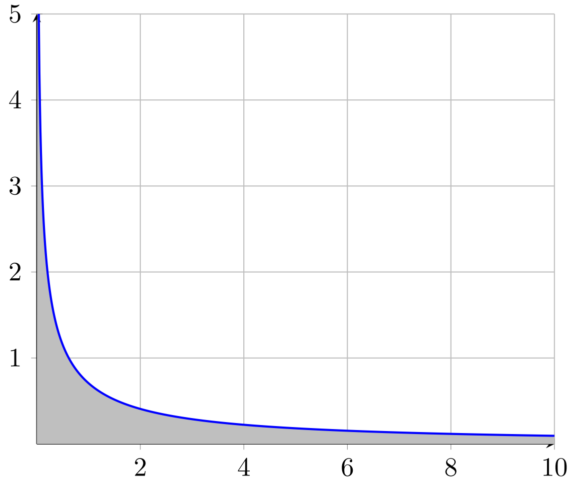
soit comparer à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$: sachant que

$$\forall y \geq 1, \quad \sqrt{1+y^2} \leq \sqrt{y^2+y^2} = \sqrt{2}y,$$

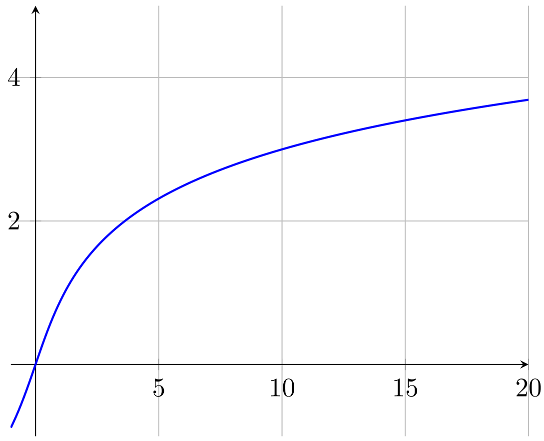
on peut comparer comme suit [3] :

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} &\geq 2\int_1^{\sqrt{M}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}\\ &\geq \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^M \frac{dy}{y}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{M}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\log M \xrightarrow{M\to+\infty} +\infty.\end{aligned}$$

On conclut dans les deux cas que l'intégrale sur $(0,+\infty)$ est divergente.



(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$



(b) $\operatorname{arcsinh}(x)$

7. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$. Il y a un problème en $x\to+\infty$, on coupe donc cette singularité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{\arctan x}{1+x^2}dx.$$

On reconnait $\dfrac{dx}{1+x^2} = (\arctan x)'dx$ et $\arctan x$ apparait dans l'intégrande, poser le

3. La première inégalité vient du fait que $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \geq 0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \geq 0$, ainsi par la relation de Chasles

$$\int_0^{\sqrt{M}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} + \int_1^{\sqrt{M}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} \geq \int_1^{\sqrt{M}} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

changement de variable $y = \arctan x$ simplifiera donc l'intégrale : pour $1 < M < \infty$ on a

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int_{\arctan 1}^{\arctan M} y\,dy &= \int_{\pi/4}^{\arctan M} y\,dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\pi/4}^{\arctan M} \\ &= \frac{1}{2}(\arctan M)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}(\arctan M)^2 - \frac{\pi^2}{32}.\end{aligned}$$

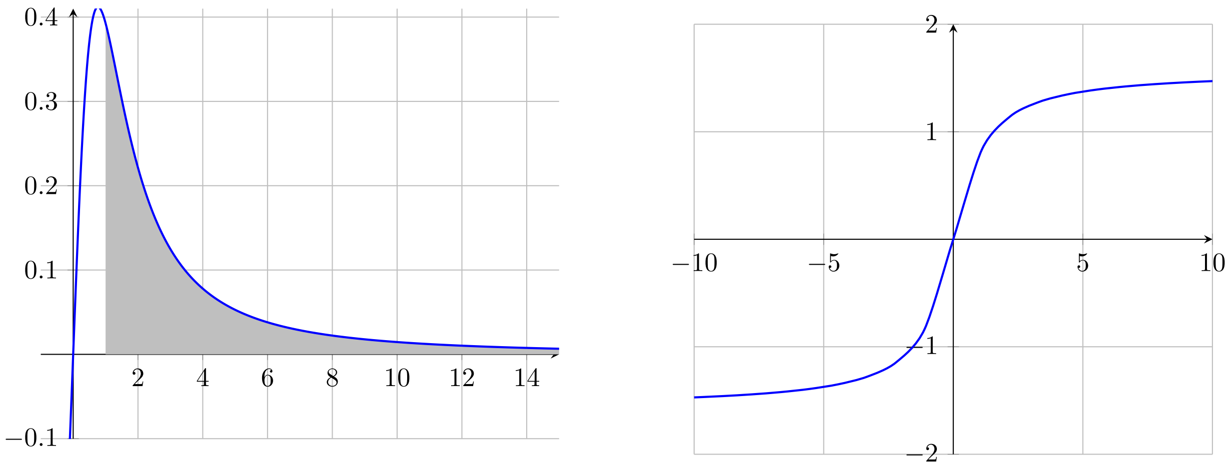
On peut alors faire $M \to +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2}(\arctan M)^2 - \frac{\pi^2}{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3}{32}\pi^2.$$

L'intégrale sur $(1, +\infty)$ est donc convergente.

Remarque : Une autre approche, plus simple et directe, serait de reconnaitre

$$\left(\arctan(x)^2\right)' = 2\arctan'(x)\arctan(x) = \frac{2\arctan(x)}{1+x^2}.$$



(a) $\dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$ (b) $\arctan(x)$

8. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$. Il n'y a pas de problème en $x \to 0^+$ car $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \to \frac{\pi}{2}$, mais il y en a un en $x \to +\infty$, on coupe donc cette singularité :

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

On va comparer $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ avec $\dfrac{1}{x}$ dont l'intégrale est divergente en $+\infty$. Plus précisément, on utilise l'inégalité

$$\forall x \geq 1, \quad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{2x}$$

ce qui découle de

$$\forall x \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq y \leq 1,\ \arctan(y) = \int_0^y \frac{dt}{1+t^2} \geq \int_0^y \frac{dt}{2} \geq \frac{y}{2}.$$

Ainsi on a la comparaison

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \geq \int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty,$$

où on a utilisé le fait que $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ pour tout $x > 0$ dans la première inégalité. L'intégrale sur $(0, +\infty)$ est donc divergente.

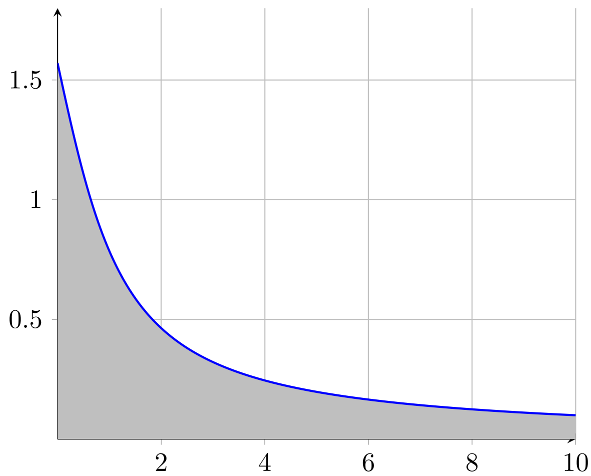


FIGURE 8 – $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Remarque : On aurait aussi pu utiliser le développement limité $\arctan(y) = y + o(y)$ en $y \to 0$, car si $0 \leq y \leq \varepsilon$ avec ε suffisamment petit pour que $|o(y)| \leq \frac{y}{2}$, alors on aurait encore

$$\forall 0 \leq y \leq \varepsilon, \quad \arctan(y) = y + o(y) \geq y - \frac{y}{2} = \frac{y}{2}.$$

9. On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$. Il y a un problème en $x \to +\infty$, on coupe donc cette singularité puis on intègre :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{M \to +\infty} \int_0^M e^{-x} dx \\ &= \lim_{M \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=M} = \lim_{M \to +\infty} 1 - e^{-M} = 1. \end{aligned}$$

L'intégrale sur $(1, +\infty)$ est donc convergente.

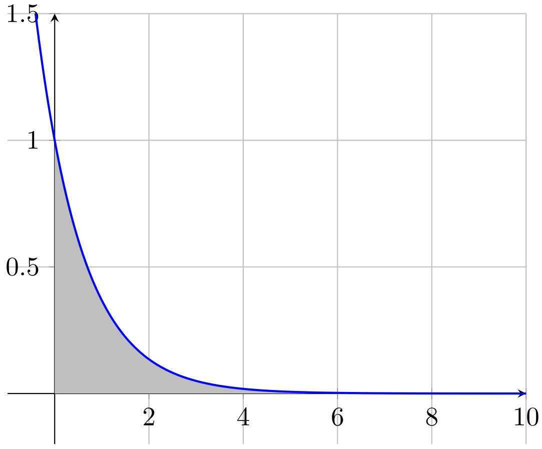


FIGURE 9 – e^{-x}

10. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. Il y a deux problèmes ; un en $x \to 0^+$ où $\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \to +\infty$, et un en $x \to +\infty$, on coupe donc ces singularités :
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ M \to +\infty}} \int_\varepsilon^M \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$
On reconnait $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})' dx$, de plus $\sqrt{x}$ apparait dans l'intégrande, poser le changement de variables $y = \sqrt{x}$ simplifiera donc l'intégrale : pour $0 < \varepsilon < M < \infty$
$$\int_0^M \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{M}} e^{-y} dy \xrightarrow[M \to +\infty]{\varepsilon \to 0^+} 2$$
où on a conclu comme pour l'intégrale no. 9. L'intégrale sur $(0, +\infty)$ est donc convergente.

11. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. Il y a deux problèmes ; un lorsque $x \to 0^+$ car $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \to +\infty$, et un lorsque $x \to +\infty$, on coupe donc ces singularités :
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \lim_{\substack{M \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \int_\varepsilon^M \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$
On pourrait utiliser le changement de variable $y = \sqrt{x}$ comme pour les intégrales no. 6 et 10, mais on peut aussi directement remarquer que
$$\forall x > 0, \quad \left(\arctan \sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan' \left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)},$$
et donc pour $0 < \varepsilon < M < \infty$
$$\int_\varepsilon^M \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \left[\arctan(\sqrt{x})\right]_{x=\varepsilon}^{x=M} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{M \to +\infty} \pi.$$
L'intégrale sur $(0, +\infty)$ est donc convergente.

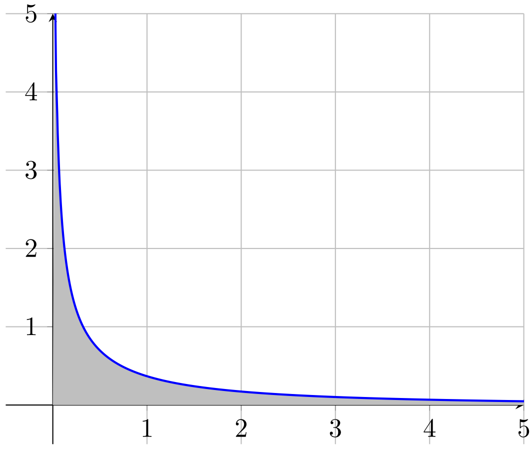


FIGURE 10 – $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

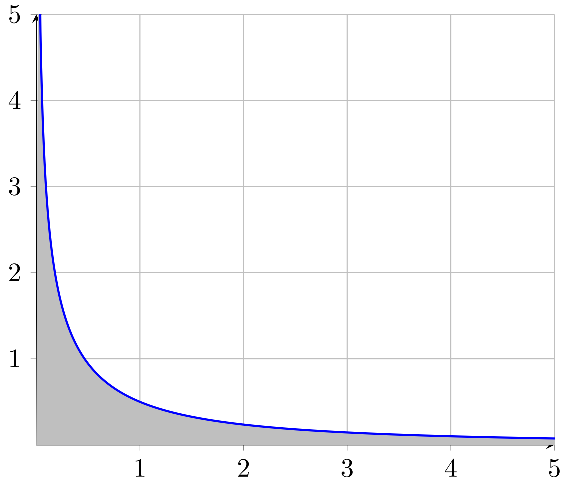


FIGURE 11 – $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

12. On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$. Il y a un problème en $x \to +\infty$, on coupe donc cette singularité :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M \frac{x}{1+x^4} dx.$$
On reconnait $xdx = \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx$ et x^2 apparait dans l'intégrande (sous la forme $(x^2)^2$), poser le changement de variable $y = x^2$ simplifiera donc l'intégrale : pour $0 < M < \infty$ on

effectue le changement de variable puis on intègre :

$$\int_0^M \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{M^2} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} [\arctan y]_{y=0}^{y=M^2},$$

et donc en faisant $M \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{2} \arctan\left(M^2\right) = \pi.$$

L'intégrale sur $(0, +\infty)$ est donc convergente.

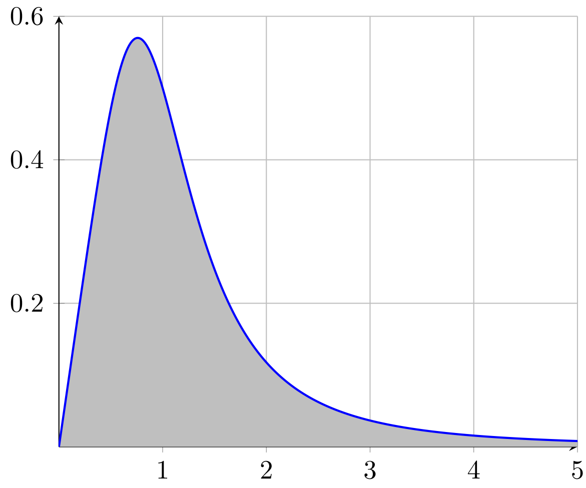


FIGURE 12 – $\frac{x}{1+x^4}$

Exercice 2

1. Soit $\lambda = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_0^M e^{\lambda x} dx.$$

Si λ est réel, c'est-à-dire $b = 0$ et donc $\lambda = a$, alors on montre facilement [4] que

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} e^{ax} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a \geq 0, \\ -\frac{1}{a}, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Si λ n'est pas réel, c'est-à-dire si $b \neq 0$ et en particulier $\lambda \neq 0$, alors on peut intégrer :

$$\int_0^M e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \left[e^{\lambda x}\right]_{x=0}^{x=M} = \frac{1}{\lambda} \left(e^{\lambda M} - 1\right).$$

4. En utilisant $(e^a)' = ae^a$, voir l'intégrale no. 9 de l'Exercice 1

Lorsque $a < 0$, on a que $\left|e^{\lambda M}\right| = \left|e^{aM}e^{ibM}\right| \leq e^{aM} \xrightarrow{M\to+\infty} 0$, et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda},$$

ce que l'on réécrit en multipliant en haut et en bas par le complexe conjugué $\overline{\lambda} = a - ib$:

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}dx = -\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{-a+ib}{a^2+b^2}.$$

Lorsque $a \geq 0$, on passe à la forme trigonométrique afin de se reposer sur nos connaissances du sinus et cosinus :

$$\frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda M} - 1\right) = \frac{e^{aM}}{\lambda}\left(\cos(bM) + i\sin(bM)\right) - \frac{1}{\lambda}.$$

Cette fois, le terme e^{aM} ne vas pas faire disparaitre le terme [5] $e^{ibM} = \cos(bM) + i\sin(bM)$ car il ne tend plus vers 0. Pour montrer que l'intégrale diverge, il est suffisant de trouver une suite $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ vérifiant $M_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ pour laquelle la limite suivante diverge :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{M_n} e^{-\lambda x}dx.$$

On choisit [6] la suite $M_n = \dfrac{n\pi}{|b|}$ de sorte à faire disparaitre le sinus tout en conservant le cosinus qui vaut alternativement 1 (pour n pair) et -1 (pour n impair) :

$$\sin(bM_n) = \sin(\text{signe}(b)n\pi) = 0, \qquad \cos(bM_n) = \cos(\text{signe}(b)n\pi) = (-1)^n,$$

ce qui donne alors

$$\int_0^{M_n} e^{-\lambda x}dx = (-1)^n\frac{e^{an\pi/|b|}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda},$$

et donc l'intégrale est bien divergente car cette suite diverge lorsque $n \to +\infty$.
En conclusion,

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}dx = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } a \geq 0, \\ -\frac{1}{\lambda} & \text{si } a < 0, \end{cases}$$

et plus précisément

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}dx = +\infty, \quad \text{si } a \geq b = 0.$$

2. D'une part, lorsque $a < 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(a+ib)x}dx$ converge, on peut donc écrire

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos(bx)dx = \int_0^{+\infty}\Re\left(e^{(a+ib)x}\right)dx = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(a+ib)x}dx\right) = -\frac{a}{a^2+b^2},$$

5. et ce sont principalement les oscillations de e^{ibM} lorsque $M \to +\infty$ qui empêche la convergence, tout particulièrement lorsque $a = 0$.

6. On pourrait aussi choisir $M_n = \dfrac{\pi}{2b} + \dfrac{n\pi}{|b|}$ pour avoir $\sin(bM_n) = (-1)^n$ et $\cos(bM_n) = 0$

ainsi que

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\sin(bx)dx = \int_0^{+\infty} \Im\left(e^{(a+ib)x}\right)dx = \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(a+ib)x}dx\right) = \frac{b}{a^2+b^2},$$

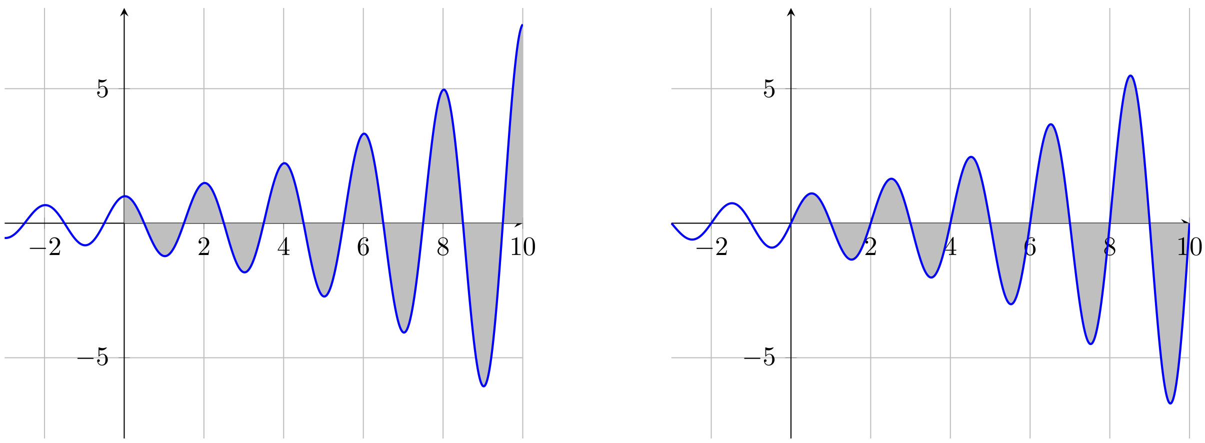
où on a utilisé les résultats de la question précédente. D'autre part, lorsque $a \geq 0$, on peut montrer comme dans la question précédente [7] que

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos(bx)dx = \lim_{M\to+\infty} \Re\left(\int_0^{M} e^{(a+ib)x}dx\right)$$

ainsi que

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos(bx)dx = \lim_{M\to+\infty} \Im\left(\int_0^{M} e^{(a+ib)x}dx\right)$$

sont des intégrales divergentes.



(a) $e^{x/5}\cos(\pi x)$

(b) $e^{x/5}\sin(\pi x)$

FIGURE 13 – Cas $a > 0$ et $b \neq 0$

Exercice 3

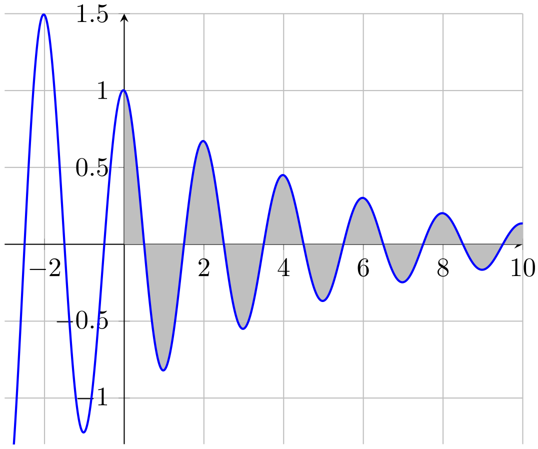
1. On considère l'intégrale

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^{M} \frac{\log(x)}{1+x^2}dx.$$

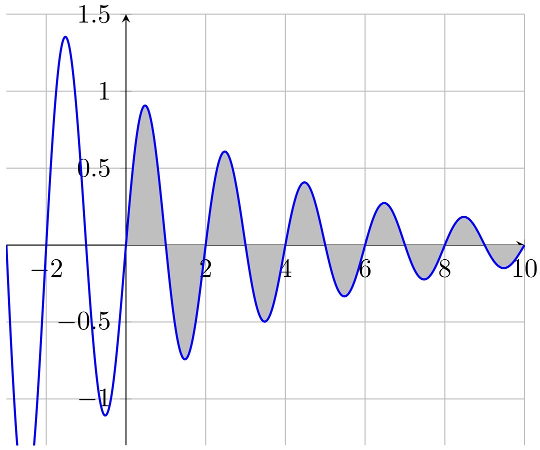
Pour prouver qu'elle est convergente, nous allons considérer l'intégrale tronquée comme une fonction de $M \in (0,+\infty)$ croissante et majorée, et donc convergente :

$$\forall M > 0, \quad f(M) := \int_1^{M} \frac{\log(x)}{1+x^2}dx.$$

7. En prenant $M_n = \frac{n\pi}{|b|}$ pour la première intégrale, et $M_n = \frac{\pi}{2b} + \frac{n\pi}{|b|}$ pour la seconde.



(a) $e^{-x/5}\cos(\pi x)$



(b) $e^{-x/5}\sin(\pi x)$

FIGURE 14 – Cas $a < 0$ et $b \neq 0$

D'une part, f est bien une fonction croissante car l'intégrande est positif : par Chasles

$$\forall M, \alpha > 0, \quad f(M+\alpha) = \int_1^{M+\alpha} \frac{\log(x)}{1+x^2}dx = \underbrace{\int_1^M \frac{\log(x)}{1+x^2}dx}_{f(M)} + \underbrace{\int_M^{M+\alpha} \frac{\log(x)}{1+x^2}dx}_{\geq 0} \geq f(M).$$

D'autre part, cette fonction est majorée : pour le montrer, nous allons comparer l'intégrande à quelque chose que l'on sait intégrer facilement. Il existe une constante[8] $C > 0$ telle que

$$\forall x \geq 1, \quad \log(x) \leq Cx^{1/2},$$

et comme $1 + x^2 \geq x^2$ pour tout réel x, on a donc

$$f(M) = \int_1^M \frac{\log(x)}{1+x^2}dx \leq C \int_1^M \frac{x^{1/2}}{x^2}dx,$$

ce qui permet de calculer une borne supérieure pour $f(M)$:

$$f(M) \leq C \int_1^M x^{-1-1/2}dx = 2C \left[x^{-1/2}\right]_{x=1}^{x=M} = 2C\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \leq 2C.$$

Comme f est une fonction croissante et majorée, elle est convergente en $+\infty$, et donc I_1 est une intégrale convergente.

2. On considère à présent l'intégrale

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\log(x)}{1+x^2}dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\log(x)}{1+x^2}dx.$$

8. Ceci est une conséquence des croissances des comparées ; la fonction $x \mapsto x^{-1/2}\log(x)$ est une continue sur $[0, +\infty)$ et tend vers 0 en $+\infty$ (par croissances comparées), et est donc bornée pour tout $x \geq 1$.

Une autre façon de le vérifier serait de définir C comme le maximum de $x^{-1/2}\log(x)$ que l'on peut calculer en vérifiant que sa dérivée est positive sur $\left[1, e^2\right]$ et négative sur $\left[e^2, +\infty\right)$, donc $C = 2/e$.

On veut relier I_1 et I_2 à l'aide d'un changement de variables. On pose $y = \dfrac{1}{x}$, ce qui donne

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\log(x)}{1+x^2}dx = \int_{1/\varepsilon}^1 \frac{\log\left(\frac{1}{y}\right)}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy$$

ce qui, en utilisant que $\log\left(\frac{1}{y}\right) = -\log(y)$, se simplifie comme

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\log(x)}{1+x^2}dx = -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\log(y)}{1+y^2}dy.$$

Ainsi, en faisant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient finalement $I_1 = -I_2$.

3. On a montré dans la première question que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}dx$ convergeait en 0, et dans la deuxième question qu'elle convergeait en $+\infty$, ainsi I converge et vaut

$$I = I_1 + I_2 = 0.$$

4. On considère l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx.$$

Cette réécriture est très proche de l'expression de I, mais avec x remplacé par $\dfrac{x}{a}$, on effectue donc le changement de variables $y = \dfrac{x}{a}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{a^2+x^2}dx &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\log(ay)}{1+y^2}dy \\ &= \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\log(y)}{1+y^2}dy}_{I} + \frac{\log(a)}{a}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}.\end{aligned}$$

Ayant déterminé que $I = 0$ à la question précédente, et sachant que $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$, on en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{a^2+x^2}dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{\log(a)}{a}\left(\arctan(M) - \arctan(0)\right) = \frac{\pi\log(a)}{2a}.$$

THÉORÈME (Décomposition en éléments simples) *Soit F une fraction rationnelle* ***réelle*** *:*

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-x_1)^{m_1}\dots(x-x_n)^{m_k}\left(\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1\right)^{n_1}\dots\left(\alpha_\ell x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell\right)^{n_\ell}}$$

que l'on suppose simplifiée, c'est-à-dire

1. *le numérateur est de degré inférieur :*

$$\deg(P) < m_1 + \dots + m_k + 2n_1 + \dots + 2n_\ell,$$

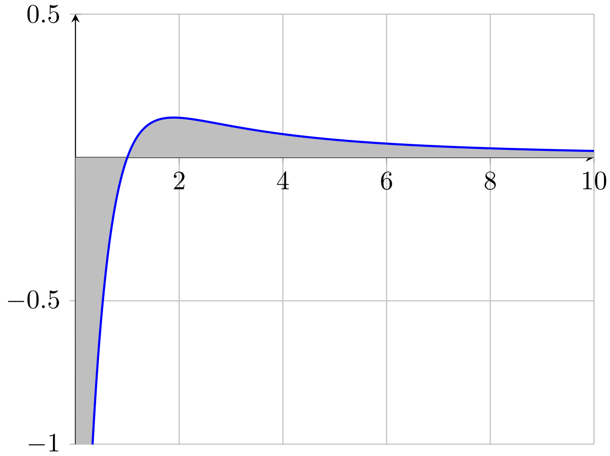


FIGURE 15 – $\dfrac{\log(x)}{1+x^2}$

2. les racines réelles x_j sont distinctes : $x_j \neq x_{j'}$,

3. les trinômes p_j n'ont pas de racines réelles : $\beta_j^2 - 4\alpha_j\gamma_j < 0$.

La fraction rationnelle F se décompose en éléments simples comme suit :

$$F(x) = G_1(x) + \cdots + G_k(x) + H_1(x) + \cdots + H_\ell(x)$$

où les éléments simples associés aux racines réelles s'écrivent

$$G_j(x) = \frac{a_{j,1}}{x - x_j} + \cdots + \frac{a_{j,m_j}}{(x - x_j)^{m_j}}, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

et ceux associés aux racines complexes (c'est-à-dire aux trinômes $\alpha_j x^2 + \beta_j x + \gamma_j$) s'écrivent

$$H_j(x) = \frac{b_{j,1}x + d_{j,1}}{\alpha_j x^2 + \beta_j x + \gamma_j} + \cdots + \frac{b_{j,n_j}x + d_{j,n_j}}{(\alpha_j x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{n_j}}, \qquad j = 1, \ldots, \ell.$$

Exercice 4 Chaque intégrale a un intégrande positif continu sur $[0, +\infty)$ et d'ordre $O\left(x^{-2}\right)$ lorsque $x \to +\infty$, donc chaque intégrale est convergente par comparaison avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$.

1. On considère $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. On décompose l'intégrande en éléments simples :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}.$$

En multipliant par $x+1$ (resp. $x+2$ ou $x+3$), puis en évaluant en $x = -1$ (resp. $x = -2$ ou $x = -3$), on obtient immédiatement

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = \frac{1}{2},$$

autrement dit

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2(x+3)}.$$

On peut ainsi intégrer pour $x \in [0, M]$:

$$\int_0^M \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2}\left(\log(M+1) - \log(1)\right) - \left(\log(M+2) - \log(2)\right) + \frac{1}{2}\left(\log(M+3) + \log(3)\right)$$

ce qui donne après réarrangement des termes

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \log(2) + \frac{1}{2}\log(3) + \frac{1}{2}\left(\log(M+1) - 2\log(M+2) + \log(M+3)\right) \\ &= \log(2) + \frac{\log(3)}{2} + \log\left(\frac{(M+1)(M+3)}{(M+2)^2}\right),\end{aligned}$$

où on a utilisé les relations $\log(\alpha\beta) = \log(\alpha) + \log(\beta)$ ainsi que $\log(\alpha/\beta) = \log(\alpha) - \log(\beta)$ et $\log\left(\alpha^2\right) = 2\log(\alpha)$ pour regrouper les termes logarithmes. En faisant $M \to +\infty$, on obtient ainsi

$$\int_0^M \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \xrightarrow{M\to+\infty} \log(2) + \frac{\log(3)}{2} + \log(1) = \log(2) + \frac{\log(3)}{2}.$$

En conclusion, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \log(2) + \frac{\log(3)}{2}.$$

2. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)}$. On décompose l'intégrande en éléments simples :

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2}$$

En multipliant par $x+1$ (resp. $(x+1)^2$ ou $x+2$) puis en faisant $x \to \infty$ (resp. en évaluant en $x = -1$ ou $x = -2$), on a

$$a + c = 0, \qquad b = 1, \qquad c = 1.$$

d'où $a = -1$ et donc

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+2}.$$

En intégrant pour $x \in [0, M]$

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)} &= -\left[\log(x+1)\right]_{x=0}^{x=M} + \left[-\frac{1}{x+1}\right]_{x=0}^{x=M} + \left[\log(x+2)\right]_{x=0}^{x=M} \\ &= 1 - \log(2) - \log(M+1) - \frac{1}{M+1} + \log(M+2) \\ &= 1 - \log(2) + \log\left(\frac{M+2}{M+2}\right) - \frac{1}{M+1} \xrightarrow{M\to+\infty} 1 - \log(2).\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)} = 1 - \log(2).$$

3. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$. On décompose l'intégrande en éléments simples :

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2}.$$

En multipliant par x^2+1 puis en faisant $x = \pm i$ on obtient

$$1 = ai + b = -ai + b$$

d'où en sommant ou soustrayant les deux équations [9]

$$b = 1, \qquad \text{et} \qquad a = 0.$$

En multipliant par x^2+2 puis en faisant $x = \pm i\sqrt{2}$

$$-1 = ci\sqrt{2} + d = -ci\sqrt{2} + d$$

d'où en sommant ou soustrayant les deux équations

$$d = -1, \qquad \text{et} \qquad c = 0.$$

On a donc la décomposition suivante :

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$$

que l'on intègre comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2}.$$

Le premier terme est facile à traiter car il s'agit de l'intégrale de $\arctan'(x)$, le second le sera également après le changement de variable $x = \sqrt{2}y$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 4bis On considère l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ où $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, c'est-à-dire que le dénominateur est sans racine réelle. Notons que cette intégrale est absolument convergente car l'intégrande est continu sur $\mathbb{R}$ (car le dénominateur ne s'annule pas) et est d'ordre $O\left(x^{-2}\right)$ lorsque $x \to \pm\infty$. Calculons à présent la valeur de cette intégrale, et pour cela on écrit le dénominateur sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \qquad \boldsymbol{\Delta = \mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac} < 0},$$

9. Ou bien en prenant leurs parties réelles puis imaginaires.

ce qui permet de réécrire l'intégrale grâce au changement de variable $y = x - \frac{b}{2a}$ comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}.$$

On pose enfin $y = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a} z$ pour se ramener à l'intégrale de $\arctan'(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{-\Delta}}.$$

Exercice 5

1. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^4}}dx$. L'intégrande est continu sur $[0,1)$, le seul problème est en $x \to 1^-$ où $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-x^4}} \to +\infty$. Pour étudier cette singularité, on cherche un équivalent du dénominateur autour de $x = 1$:

   $$1 - x^4 = 1 - \left(1 + 4(x-1) + O\left((x-1)^2\right)\right) = 4(1-x) + O\left((1-x)^2\right)$$

   d'où l'équivalent en $x \to 1^-$:

   $$\frac{e^x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{e^x}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+O(1-x)}} \sim \frac{e}{2\sqrt{1-x}}.$$

   Étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable en $x \to 1^-$, par comparaison $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ converge.

2. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin\left(\sqrt{1-x^4}\right)}$. L'intégrande est continu sur $[0,1)$, la seule singularité est en $x \to 1^-$, or d'après la question précédente on l'équivalent suivant pour le dénominateur :

   $$\sin\left(\sqrt{1-x^4}\right) \sim \sqrt{1-x^4} \sim 2\sqrt{1-x}$$

   où on a utilisé l'équivalent $\sin(y) \sim y$ lorsque $y \to 0$ pour la première équivalence. Comme pour la question précédente, on conclut que l'intégrale est convergente.

3. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos(x)}$. L'intégrande est continu sur $(0,1]$, la seule singularité est en $x \to 0^+$, on lui cherche donc un équivalent pour déterminer si elle est intégrable ou non. Un développement limité en $x \to 0$ nous donne

   $$e^x - \cos(x) = 1 + x + O\left(x^2\right) - \left(1 + O\left(x^2\right)\right) = x + O\left(x^2\right) \sim x.$$

   La singularité $\dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $x \to 0$, donc l'intégrale diverge par comparaison.

4. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. L'intégrande est continu et positif sur $[0,+\infty)$, donc il suffit de le contrôler par une fonction positive intégrable pour montrer qu'elle converge, au moins pour x suffisamment grand. On a, par exemple, pour $x \geq 1$

   $$e^{-x^2} \leq \frac{C}{x^2}, \qquad \text{et} \qquad e^{-x^2} \leq e^{-x},$$

où on a utilisé les croissances comparées pour la première majoration (où $C > 0$), et $x^2 \geq x$ pour la seconde. Ces deux fonctions contrôlant e^{-x^2} sont intégrables sur $[1, +\infty)$, donc l'intégrale converge.

5. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x}} dx$. L'intégrande est continu sur $(0, 1]$, donc il suffit d'étudier la seule singularité qui est en $x \to 0^+$. La singularité $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en $x \to 0$, cependant le facteur x présent au dénominateur pourrait potentiellement rendre cette singularité non-intégrable. Ce n'est pas le cas grâce au numérateur $e^x - 1$ qui compense ce x au numérateur ; en effet, on reconnait un taux d'accroissement :
$$\frac{\exp(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \to 0} \exp'(0) = 1.$$
On en déduit $\dfrac{e^x - 1}{x\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque $x \to 0$, la singularité est donc bien intégrable, et l'intégrale converge.

6. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$. L'intégrande est continu et positif sur $[0, +\infty)$, il suffit donc de le contrôler par une quantité intégrable pour conclure à la convergence de l'intégrale. Sachant que
$$\forall x \geq 1, \quad x\sqrt{1 + x^2} \geq x\sqrt{x^2} = x^2,$$
on a donc $\dfrac{1}{x\sqrt{1 + x^2}} \leq \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$, l'intégrale est ainsi convergente par comparaison.

Exercice 6

1. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log(1 + \sqrt{x})} dx$. Il y a deux problèmes ; un en $x \to 0^+$ où l'intégrande diverge car $\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ oscille entre -1 et 1 tandis que $\dfrac{1}{\log(1 + \sqrt{x})} \to +\infty$, et un autre lorsque $x \to +\infty$.
   (a) Pour traiter le premier problème, on considère l'intégrale sur $[0, 1]$ et on remarque que $\log(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, ainsi
   $$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log(1 + \sqrt{x})} dx \quad \text{converge} \iff \int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}} dx \quad \text{converge.}$$
   Or l'intégrale de droite converge absolument car $x^{-1/2}$ est absolument intégrable sur $(0, 1]$ et $|\sin| \leq 1$, donc
   $$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log(1 + \sqrt{x})} dx \quad \text{converge.}$$
   (b) Pour traiter le second problème, on remarque que $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $x \to +\infty$, et comme $\log(1 + \sqrt{x}) \geq \log(2)$ pour $x \geq 1$, on en déduit que
   $$\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log(1 + \sqrt{x})} = O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ce qui est intégrable en $+\infty$, donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\log(1+\sqrt{x})} dx \quad \text{converge.}$$

On conclut que l'intégrale converge sur $(0,+\infty)$.

2. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$. On effectue le changement de variable $y=\sqrt{x}$ pour réécrire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^{+\infty} \sin(y) dy,$$

et on sait que cette intégrale ne converge pas.

3. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^{4/3}} dx$, que l'on commence par réécrire à l'aide du changement de variable $y=x-1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(y)}{y^{4/3}} dy.$$

L'intégrale a donc deux problèmes ; un en $x \to 0^+$ où l'intégrande donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, et un autre lorsque $x \to +\infty$. L'intégrande est intégrable en $y \to 0^+$ par comparaison :

$$\frac{\arctan(y)}{y^{4/3}} \sim \frac{y}{y^{4/3}} = \frac{1}{y^{1/3}}, \quad \text{car} \arctan(y) \sim y,$$

ainsi qu'en $y \to +\infty$ car $|\arctan(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\frac{\arctan(y)}{y^{4/3}} = O\left(\frac{1}{y^{4/3}}\right).$$

L'intégrale est donc convergente sur $[1,+\infty)$.

4. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(x)}{(x-1)^{1/3}} dx$. Le seul problème est en $x \to 1^+$ car l'intégrande diverge vers $+\infty$ (notons que lorsque $0 \leq x \leq 1 < \pi/2$, on a $\cos(x) \geq 0$). L'intégrale converge absolument par comparaison avec $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} < \infty$, donc l'intégrale converge.

Exercice 6bis On considère l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2+\alpha}} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx, \qquad \alpha \in (-3,1)$$

Il y a deux problèmes ; un en $x \to 0^+$ où l'intégrande diverge car $\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ oscille entre -1 et 1 tandis que $\dfrac{1}{x^{2+\alpha}} \to +\infty$, et un autre lorsque $x \to +\infty$. Le second est traité comme dans la question 1 de l'exercice 6 car l'intégrande est $O\left(x^{-(\alpha+3)-1}\right)$ avec $\alpha+3>0$ lorsque $x \to +\infty$, on se concentre alors sur le premier. Pour déterminer la convergence de cette intégrale sur $[0,1]$, on utilise la technique d'Abel : c'est-à-dire qu'on réécrit l'intégrande comme le produit d'une dérivée et de quelque chose d'intégrable :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^{2+\alpha}} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{3-(2+\alpha)} \left(-\frac{2}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{1-\alpha}\left(\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' dx,\end{aligned}$$

ce qui donne par intégration par partie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2+\alpha}} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{1-\alpha}{2}\int_0^1 x^{-\alpha}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx + \frac{\cos(1)}{2}.$$

L'intégrale du membre de droite converge absolument car $\alpha < 1$ et $|\cos| \leq 1$, ce qui permet de conclure que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2+\alpha}} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \quad \text{converge.}$$

Exercice 7

1. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^a} dx$. Lorsque $a > 1$, l'intégrale est absolument convergente :

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x^a}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx < \infty.$$

Lorsque $0 < a \leq 1$, l'intégrale n'est pas absolument convergente :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x^a}\right| dx &\geq \int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x^a}\right| dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x^a}\right| dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{((k+1)\pi)^a} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{1}{\pi^a}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^a}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $|\sin(x+k\pi)| = \sin(x)$ pour tout $0 \leq x \leq \pi$ et donc

$$\frac{1}{\pi^a}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{1}{\pi^a}\int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{1}{\pi^a}.$$

Cette somme est divergente car on peut la comparer à $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = +\infty$:

$$\frac{1}{k^a} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^a} \qquad \text{donc} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^a} \geq \sum_{k=2}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^a} = \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^a} = +\infty.$$

On conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^a} dx$ n'est pas absolument convergente.

Cependant, cette intégrale est tout de même convergente (donc semi-convergente) ; en effet, en utilisant une intégration par partie pour appliquer la technique d'Abel :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^a} dx = \int_1^{+\infty} (-\cos(x))' \frac{1}{x^a} dx = -a \int_1^{+\infty} \cos(x) \frac{1}{x^{a+1}} dx - \cos(1),$$

ce qui permet de déduire la convergence de l'intégrale grâce au terme $\frac{1}{x^{a+1}}$ apparu suite à l'intégration par parties, où l'on souligne le fait que l'hypothèse sur a garantit $1+a > 1$. Notons que la même stratégie permet de montrer la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^a} dx = a \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{a+1}} dx + \sin(1).$$

2. On applique le changement de variable $y = x^2$, ce qui donne

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} y^{-1/4} \sin(y)\, dy,$$

ainsi l'intégrale est semi-convergente.

Exercice 8

1. Voir Exercice 7 question 1.
2. On additionne les relations (Pythagore et formule d'addition du cosinus [10])

$$\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2 \quad \text{et} \quad \sin(x)^2 = \cos(x)^2 - \cos(2x)$$

pour obtenir

$$\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

De plus, comme $0 \leq |\sin(x)| \leq 1$, on a que $0 \leq \sin(x)^2 = |\sin(x)|^2 \leq |\sin(x)|$.

3. Soit $M > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^M \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx &\geq \frac{1}{2} \int_1^M \frac{dx}{x} - \int_1^M \frac{\cos(2x)}{2x} dx \\ &= \frac{\log(M)}{2} - \frac{1}{2} \int_2^{2M} \frac{\cos(y)}{y} dy, \end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $y = 2x$ dans la dernière ligne. La deuxième intégrale converge lorsque $M \to +\infty$ (voir Exercice 7 question 1), on en déduit que

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = +\infty.$$

10. Le <u>co</u>sinus est un <u>co</u>nnard ; il passe en premier, ne fait pas se rencontrer les cos et sin et nous embête avec le signe : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. Contrairement au <u>si</u>nus qui est <u>sy</u>mpa parce qu'il mélange les cos et sin et l'ordre n'est pas important : $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.