# Fonctions définie par une intégrale

**Exercice 1.** Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\, dt.$$

1. Montrer que $F$ est de classe $\mathrm{C}^2$. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.
2. Montrer que $F$ est strictement décroissante et convexe.
3. Montrer que l'on a
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty.$$
4. Montrer qu'il existe une seule fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ pour tout $x \neq 0$.

   On considère l'équation différentielle
$$y + y'' = g(x). \tag{1}$$
5. Montrer que $F$ est solution de l'équation différentielle (1).
6. Montrer que $F$ est la seule solution de (1) ayant une limite finie quand $x \to +\infty$.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$F(x) = \frac{\pi}{4}\cos(x) - \frac{\ln(2)}{2}\sin(x) + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\, dt.$$

**Exercice 2.** Soit $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(x^2\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt.$$

1. Montrer que la fonction $F$ est de la classe $\mathrm{C}^2$.
2. Calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$, $x \neq 1$.
3. Calculer $F(1)$. En déduire une expression explicite de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

**Exercice 3. La fonction Gamma**

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\, dt$ converge si et seulement si $s > 0$.

   On définit la fonction Gamma $\Gamma$ par
$$\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\, dt.$$
2. Montrer que pour tout $s > 0$ on a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.

3. Montrer que la fonction $\Gamma$ est de classe $C^2$ et convexe. En déduire que $\Gamma$ atteint son minimum en un point de l'intervalle $(1,2)$.
4. Montrer que l'on a $\lim_{x\to 0} x\Gamma(x) = 1$.
5. Dessiner l'allure du graphe de $\Gamma$.

**Exercice 4.** Soit $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$.

1. Montrer que $F$ est continue.
2. Montrer que $F$ est de classe $C^2$ sur $[0,+\infty)$ et que $F$ est solution de l'équation différentielle $y + y'' = 1/x$.
3. Montrer que $F(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
4. Montrer que $F(x)$ est la seule solution de l'équation différentielle $y + y'' = 1/x$ ayant une limite finie lorsque $x \to +\infty$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$ les intégrales généralisées $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, dt$ sont convergentes.
6. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\, dt$.
7. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

**Exercice 5.** Déterminer l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$f_1(t) = e^{2t}\cos(wt) \quad (w \in \mathbb{R}), \qquad f_2(t) = t^n e^{-3t}, \qquad f_3(t) = \cosh(wt) \quad (w > 0).$$

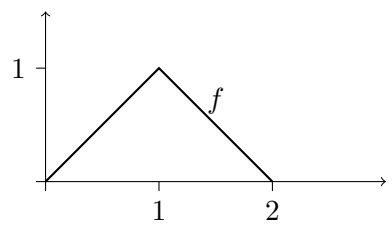
**Exercice 6.** Déterminer la transformée de Laplace pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cosh(x), \qquad f_2(x) = 3x^2,$$
$$f_3(x) = xe^{-x}, \qquad f_4(x) = 3 + x^3,$$
$$f_5(x) = xe^{4x}, \qquad f_6(x) = \cos^3(x)e^6,$$
$$f_7(x) = H(x-1) - H(x-2), \qquad f_8(x) = (x-2)^2 H(x-2),$$
$$f_9(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(H(x-2n) - H(x-(2n+1))\right), \qquad f_{10}(x) = \left(e^x - e^{2x}\cos\left(\tfrac{2}{3}x\right)\right).$$

**Exercice 7.** Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

$$F_1(s) = \frac{1}{(s+3)(s+2)}, \qquad F_2(s) = \frac{1}{s^2\,(s^2+9)},$$
$$F_3(s) = \frac{2s+6}{s^2+4}, \qquad F_4(s) = \frac{3s}{(s-1)\,(s^2-4)}.$$

**Exercice 8.** On considère la fonction $f$ dont le graphe est donné par



1. Déterminer l'expression de $f$ sur les intervalles $[0,1]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty]$.
2. Montrer que $f(x) = th(x) - 2(x-1)H(x-1) + (x-2)H(x-2)$.
3. En déduire la transformée de Laplace de $f$.

**Exercice 9.** Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes en utilisant la transformée de Laplace :

1. $\frac{dx}{dt} + 3x = 3H(t)$ avec $x(0) = 2$,
2. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 3t$ avec $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,
3. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 4\cos(2t)$ avec $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$,
4. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 4\delta(t)$ avec $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

**Exercice 10.** Trouver une solution pour le système des équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = y - x,$$
$$\frac{dy}{dt} = y + 3x,$$

avec $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$.

**Exercice 11.** Calculer la transformée de Fourier pour la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exercice 12.**

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f_a(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.
2. En utilisant la formule de l'inverse en déduire la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer $f \star f$ et la transformée de Fourier de la fonction $g^2(x)$.
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

**Exercice 13.** Le but de cette exercice est de calculer

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{e}^{itx} dt.$$

1. Donner une équation différentielle qui est vérifiée par la fonction $f(x)$.
2. En déduire $f(x)$.

**Exercice 14.** Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $fg$ et $f \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

**Exercice 15. (Principe d'incertitude d'Heisenberg)**

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx = 1$.

1. Montrer que
$$2\int_{-\infty}^{+\infty} xf'(x)f(x)\,dx = -1.$$

2. En déduire que
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|\hat{f}(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3. Quand est-ce que l'on a égalité ?