

Exercice 1

On considère $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$$

1. On a que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-tx}}{1+t^2} \right) = - \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$
cette fonction est continue en $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

1. Notons $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ainsi
$$(t, x) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

on a que $F(x) = \int_0^1 \varphi(t, x) dt$. Sachant que φ est continue et que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) = -t\varphi(t, x)$, on en déduit que sa dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$, et donc par le théorème de dérivation, $F \in C^1(\mathbb{R})$.

Similairement, puisque $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = t^2 \varphi$, on en déduit que $F \in C^2(\mathbb{R})$.

Enfin, on a que

$$F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

ainsi que

$$F'(0) = - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = - \left[\frac{\log(1+t^2)}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = - \frac{\log 2}{2}.$$

Lemme: Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ telle que $f \geq 0$, on a

$$\int_I f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f = 0,$$

ou, de façon équivalente (car $f \geq 0$)

$$\int_I f(x) dx > 0 \Leftrightarrow f \neq 0.$$

Preuve: Il est clair que $f = 0 \Rightarrow \int_I f(x) dx = 0$.

Montrons que $f \neq 0 \Rightarrow \int_I f(x) dx > 0$.

Puisque $f \neq 0$, il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = \pi \neq 0$, et sachant que $f \geq 0$, on a en fait $f(x_0) = \pi > 0$. De plus, f est continue, donc il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

tel que $f(x) \geq \frac{\pi}{2}$ pour $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$, d'où

$$\int_I f(x) dx \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx \geq \pi \varepsilon > 0,$$

ce qui permet de conclure.

2. Rappelons que d'après la question 1, on a

$$F'(x) = - \int_0^1 t \varphi(t, x) dt,$$

$$F''(x) = \int_0^1 t^2 \varphi(t, x) dt,$$

où $t \mapsto \varphi(t, x)$ est continue sur $[0, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, positive et non-nulle, donc d'après le lemme, $F' < 0$ et $F'' > 0$. F est alors strictement décroissante et convexe.

3. Limite en $+\infty$: On a que

$$* |\varphi(t, x)| \leq 1, \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R},$$

$$* \varphi(t, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire que la famille $(t \mapsto \varphi(t, x))_{x \in \mathbb{R}}$

converge simplement presque partout sur $[0, 1]$.

$$* t \mapsto \varphi(t, x) \text{ est continue sur } [0, 1] \text{ pour } x \in \mathbb{R},$$

Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$F(x) = \int_0^1 \varphi(t, x) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Limite en $-\infty$: On a pour tout $M \geq 0$

$$F(-M) = \int_0^1 \frac{e^{tM}}{1+t^2} dt \geq \int_{1/2}^1 \frac{e^{tM}}{1+t^2} dt \geq \frac{e^{M/2}}{2},$$

ce qui permet d'affirmer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

4. Notons que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^{-0}}{x - 0} \\ &= -(e^{-x})'_{x=0} = 1. \end{aligned}$$

Il existe bien une fonction continue g valant $\frac{1 - e^{-x}}{x}$ pour $x \neq 0$, elle est donnée par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Elle est de plus unique car toute autre telle fonction $\tilde{g}$ vérifie

$$\tilde{g}(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} = g(x), \quad x \neq 0,$$

ainsi que (les sachant continues)

$$\tilde{g}(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \tilde{g}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g(x) = g(0),$$

autrement dit, $g(x) = \tilde{g}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Note: Cette question consiste à montrer qu'un prolongement par continuité est unique.

5. On a d'après la question 1 que pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} F(x) + F''(x) &= \int_0^1 (1+t^2) \varphi(t, x) dt \\ &= \int_0^1 e^{-tx} dt \\ &= -\frac{1}{x} \left[e^{-tx} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1-e^{-x}}{x} = g(x). \end{aligned}$$

De plus, on a également que pour $x = 0$

$$\begin{aligned} F(0) + F''(0) &= \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \left(\frac{t^2+1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = 1 = g(0). \end{aligned}$$

Ainsi, F satisfait $F'' + F = g$.

6. Supposons que $\tilde{F}$ soit une autre solution, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\tilde{F}'' + \tilde{F} = g$, et supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{F}(x) \in \mathbb{R}$ existe.

En soustrayant les équations satisfaites par F et $\tilde{F}$, on trouve pour $D := F - \tilde{F}$ que

$$D'' + D = 0.$$

Considérons l'équation caractéristique de l'équation :

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i,$$

donc D s'écrit pour certains réels A et ϕ

$$D(x) = A \cos(x + \phi).$$

Il s'avère que le paramètre A est nul de par la condition imposée à $\tilde{F}$ en $+\infty$. En effet, d'après la question 3, on a que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} D(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{F}(x) \text{ existe,}$$

ce qui n'est possible que si $A = 0$, autrement

$D(x)$ oscillerait entre $-A$ et A sans converger.

Donc $A = 0$, c'est-à-dire $D = 0$, et en conséquence $F = \tilde{F}$.

7. Soit $\mathcal{F}(x) = \frac{\pi}{4} \cos(x) - \frac{\ln}{2} \sin(x) + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt$

Comme $\cos'' = -\cos$ et $\sin'' = -\sin$, on a que

$$\mathcal{F}'' + \mathcal{F} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_0^x g(t) \sin(x-t) dt \right) + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt.$$

Dans le terme dérivé deux fois, x est non-seulement un paramètre de l'intégrale, mais aussi une borne d'intégration; on ne peut donc utiliser ni le théorème fondamental de l'analyse, ni le théorème de dérivation tel quel. Pour résoudre ce problème, on peut utiliser la formule d'addition du sinus:

$$\sin(x-t) = -\cos x \sin t + \cos t \sin x,$$

ce qui donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt &= -\cos x \int_0^x g(t) \sin t dt \\ &\quad + \sin x \int_0^x g(t) \cos t dt. \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour la première dérivée

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x g(t) \sin(x-t) dt \right) &= \sin x \int_0^x g(t) \sin t dt \\ &\quad - \cancel{\cos x g(x) \sin x} \\ &\quad + \cos x \int_0^x g(t) \cos t dt \\ &\quad + \sin x \cancel{g(x) \cos x}, \end{aligned}$$

1^{ère} MÉTHODE

et pour la seconde dérivée

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_0^x g(t) \sin(x-t) dt \right) &= \cos x \int_0^x g(t) \sin t dt \\ &\quad + \sin^2 x g(x) \\ &\quad - \sin x \int_0^x g(t) \cos t dt \\ &\quad + \cos^2 x g(x) \\ &= - \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt + g(x).\end{aligned}$$

On en conclut que $\tilde{F}'' + \tilde{F} = g$. De plus, $F(0) = \tilde{F}(0) = \frac{\pi}{4}$
et $F'(0) = \tilde{F}'(0) = -\frac{1}{2} \log 2$, donc $F = \tilde{F}$, c'est-à-dire

$$F(x) = \frac{\pi}{4} \cos(x) - \frac{\ln}{2} \sin(x) + \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt.$$

2^{ème} MÉTHODE

On utilise un corollaire du théorème de dérivation :

Corollaire: Sous les hypothèses du théorème de dérivation, on a que

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x F(t, x) dt \right) = F(x, x) + \int_0^x \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) dt$$

Preuve: Remarquons que $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x F(t, x) dt \right) = \frac{d}{dn} \left(\tilde{F}(x, x) \right)$

où on a noté $\tilde{F}(u, v) = \int_0^u F(t, v) dt$, puis

appliquer le TFA et le TD.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_0^x g(t) \sin(x-t) dt \right) &= \frac{d}{dx} \left(g(x) \cdot 0 + \int_0^x g(t) \cos(x-t) dt \right) \\ &= g(x) \cdot 1 - \int_0^x g(t) \sin(x-t) dt,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure comme dans la 1^{ère} méthode.

Exercice 2:

$$1. \text{ On a } \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(x^2 \cos^2 t + \sin^2 t) \right) = \frac{2x \cos^2 t}{x^2 \cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$\text{et } \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\dots) = \frac{2 \cos^2 t (x^2 \cancel{\cos^2 t} + \sin^2 t) - (2x \cancel{\cos^2 t})^2}{(x^2 \cos^2 t + \sin^2 t)^2}$$

$$= 2 \left(\frac{\cos t \sin t}{x^2 \cos^2 t + \sin^2 t} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2t)}{x^2 \cos^2 t + \sin^2 t} \right)^2,$$

où on a utilisé la formule d'addition du sinus dans la dernière égalité.

Montrer que F est C^2 sur $(0, +\infty)$ est identique à montrer que F est C^2 sur (a, b) pour tout $0 < a < 1 < b < +\infty$, donc fixons de tels $a < b$. Ceci permet de trouver la domination requise par le théorème de dérivation :

$$\forall a < x, \quad x^2 \cos^2 t + \sin^2 t \geq a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2,$$

d'où les domination

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} (\ln (x^2 \cos^2 t + \sin^2 t)) \right| \leq \frac{2x \cos^2 t}{a^2} \leq 2b/a^2$$

et

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\dots) \right| \leq \frac{1}{2a^2},$$

ainsi que la continuité de $(t, x) \mapsto \ln(x^2 \cos^2 t + \sin^2 t)$ sur $(a, b) \times [0, \pi/2]$. Ainsi, par le théorème de dérivation $F \in C^2((a, b))$, et par suite $F \in C^2(0, +\infty)$.

2. D'après la question 1, on a que

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x \cos^2 t}{x^2 \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2x dt}{x^2 + \tan^2 t},$$

où on a utilisé que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. On pose ensuite

le changement de variable $s = \tan t$ pour avoir

$$F'(x) = 2x \int_0^{+\infty} \frac{ds}{(x^2 + s^2)(1 + s^2)}.$$

Une décomposition en éléments simples (voir TD1, en particulier l'exercice 4-9°3) donne

$$\frac{2x}{(x^2 + s^2)(1 + s^2)} = \frac{a(x)}{x^2 + s^2} - \frac{q(x)}{1 + s^2}$$

où l'on a noté $q(x) = \frac{2x}{1-x^2}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= q(x) \int_0^{+\infty} \frac{ds}{x^2+s^2} - q(x) \int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} \\ &= \frac{q(x)\pi}{2x} - \frac{q(x)\pi}{2} = \pi \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{\pi}{1+x}. \end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{x^2+s^2} = \frac{\pi}{2x}$ (voir exercice 4bis de la correction du TD1).

3. On a $F(1) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(1) dt = 0$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) + \int_1^x F'(y) dy \\ &= \pi \int_1^x \frac{dy}{1+y} = \pi \ln(1+x) \end{aligned}$$

Exercice 3:

1. Lorsque $s > 0$, la singularité en $t \rightarrow 0^+$ est intégrable car

$$t^{s-1} e^{-t} \sim t^{-1+s}$$

et l'intégrande est intégrable en $t \rightarrow +\infty$ car

$$t^{s-1} e^{-t} = O(e^{-t/2}),$$

donc l'intégrale converge. Au contraire, lorsque $s \leq 0$, la singularité en $t \rightarrow 0^+$ n'est pas intégrable;

$$t^{s-1} e^{-t} \sim t^{s-1}$$

et donc par comparaison

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \geq \int_0^1 t^{s-1} e^{-t} dt = +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale converge ssi $s > 0$.

2. Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} t^s e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} t^s (e^{-t})' dt \\ &= s \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt + \left[t^s e^{-t} \right]_{t=0}^{t=+\infty} \\ &= s \Gamma(s),\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $s > 0$ et donc $t^s e^{-t} \Big|_{t=0} = 0$.

En particulier, on a que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-3)$
 $= \dots = (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(1),$

et comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on déduit $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. Fixons $0 < \varepsilon < \eta < +\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a que

* $\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ converge pour $s > 0$ (question 1)

* $(t, s) \mapsto \frac{\partial^m}{\partial s^m} (t^{s-1} e^{-t}) = (\ln t)^m t^{s-1} e^{-t}$ est continue sur $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$

* $|(\ln t)^m t^{s-1} e^{-t}| = |\ln t|^m t^{s-1} e^{-t} \leq C_{\varepsilon, \eta, m} (t^{\varepsilon/2-1} t^{\eta-1}) e^{-t}$

pour $(t, s) \in (0, +\infty) \times (\varepsilon, \eta)$, où

② si $0 < t \leq 1$, $t^{s-1} \leq t^{\varepsilon-1}$, et $|\ln t|^m t^{\varepsilon-1} \leq C_{\varepsilon, m} t^{\frac{\varepsilon}{2}-1}$, où $C_{\varepsilon, m} = \sup_{0 < t \leq 1} |\ln t|^m t^{\frac{\varepsilon}{2}}$

③ si $t > 1$, $t^{s-1} \leq t^{\eta-1}$, et $|\ln t|^m t^{\eta-1} \leq C_{\eta, m} t^{\eta}$, où $C_{\eta, m} = \sup_{t > 1} |\ln t|^m t^{-1}$

④ $C_{\varepsilon, \eta, m} = C_{\varepsilon, m} + C_{\eta, m}$

alors par le théorème de dérivation, $\Gamma \in C^m(\varepsilon, \eta)$, et comme ε et η sont q.e.q., $\Gamma \in C^m(0, +\infty)$. On conclut $\Gamma \in C^\infty$.

En particulier $\Gamma''(s) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{s-1} e^{-t} dt > 0$, donc Γ est strictement convexe. De plus $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ par la question 2, donc Γ atteint un unique minimum. En effet

⑤ Puisque $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, le thm. de Rolle affirme qu'il existe $s_0 \in (1, 2)$ tq $\Gamma'(s_0) = 0$.

⑥ Puisque $\Gamma'' > 0$, Γ' est strictement croissante, donc $\Gamma' < 0$ sur $(0, s_0)$ et $\Gamma' > 0$ sur $(s_0, +\infty)$, donc Γ atteint son unique minimum en s_0 .

s	0	s_0	$+\infty$
Γ'	-	0	+
Γ			

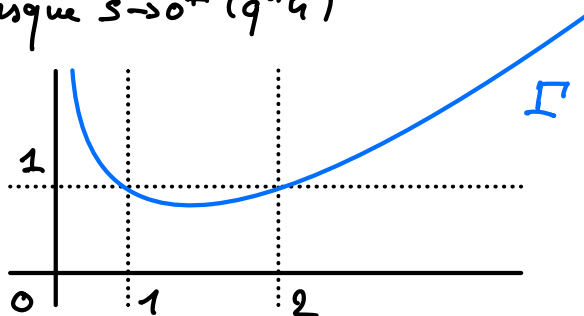
4. Par la question 2, on a $s \Gamma(s) = \Gamma(s+1) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \Gamma(1) = 1$.

5. On sait donc que

* Γ est convexe et atteint son minimum sur $(1, 2)$ (q° 3)

* $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$ lorsque $s \rightarrow +\infty$ (q° 2)

* $\Gamma(s) \sim \frac{1}{s}$ lorsque $s \rightarrow 0^+$ (q° 4)



Exercice 4:

1. Comme exo 1 avec $\frac{e^{-tx}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ (*)

2. Comme exo 2, et

$$F + F'' = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}.$$

3. Comme (*), et $\frac{e^{-tx}}{1+t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ pour $t \in (0, +\infty)$
(c-à-d pour presque tout $t \in [0, +\infty)$, par $T \subset D$
on a que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. Comme exo 1.

5. Comme TD1-Exo 8

$$6. \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt =: \mathcal{F}(x)$$

$s = t-x \in (0, +\infty)$
 $ds = dt$ et $t = s+x$

De plus, pour tout $x \geq \varepsilon > 0$,

$$* \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt \text{ converge (Abel, voir TD1-Exo 8)}$$

$$* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin(t)}{t+x} \right) = - \frac{\sin(t)}{(t+x)^2} \text{ et } \left| \frac{\partial}{\partial x} (\dots) \right| \leq \frac{1}{(t+\varepsilon)^2}$$

donc la dérivée partielle est continue et dominée par la fonction intégrable $\frac{1}{(t+\varepsilon)^2}$.

Alors par le théorème de dérivée, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$ et

pour $x > 0$, $\mathcal{F}'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(t+x)^2} dt$. Similaire^{tr}, on montre que

$$\mathcal{F} \in \mathcal{C}^2(0, +\infty) \text{ et } \mathcal{F}''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(t+x)^3} dt,$$

ainsi que $\mathcal{F}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc pour mq $\mathcal{F} = F$,
d'après la question 4, il suffit de mq $\mathcal{F} + \mathcal{F}'' = \frac{1}{x}$.

En faisant deux intégrations par parties, on a pour $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}''(x) &= \int_0^{+\infty} \sin(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-1}{(t+x)^2} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \cos(t) \frac{1}{(t+x)^2} dt + \underbrace{\left[\frac{\sin(t)}{(t+x)^2} \right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{0 - 0 = 0} \\ &= \int_0^{+\infty} \cos(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-1}{t+x} \right) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \sin(t) \frac{1}{t+x} dt + \underbrace{\left[- \frac{\cos(t)}{t+x} \right]_{t=0}^{t=+\infty}}_{0 + \frac{1}{x}} \\ &= -\mathcal{F}(x) + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{F} + \mathcal{F}'' = \frac{1}{x}$, on en déduit alors $F = \mathcal{F}$.

7. D'une part, d'après la question 6 et l'identité

$$\sin(t-x) = \sin(t) \cos(x) - \cos(t) \sin(x)$$

on peut réécrire F comme

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{t} dt \\
 &= \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt.
 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la question 1, F est continue en 0, donc

$$F(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \right)_{x=0} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Sachant que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$ convergent, on en déduit ainsi :

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \right) \\
 &= \cos(0) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(0) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt
 \end{aligned}$$