

M62 – Correction du DS2 (Session 1)

28 avril 2025

Exercice 1

1. On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$(x, y)' = (x, y).$$

Ce système est **découplé**, c'est-à-dire que les deux coordonnées évoluent selon des **équations indépendantes** :

$$x' = x \quad \text{et} \quad y' = y$$

que l'on peut résoudre **séparément** :

$$x(t) = e^t x(0) \quad \text{et} \quad y(t) = e^t y(0).$$

Similairement, la seconde équation $(x, y)' = (x, -y)$ a pour solution $(x(t), y(t)) = (e^t x(0), e^{-t} y(0))$.

Remarque concernant les exponentielles de matrices :

Réécrire un système d'équations linéaires sous forme matricielle que l'on diagonalise n'est vraiment intéressant que lorsque le système est **couplé**, c'est-à-dire que l'équation pour une coordonnée fait intervenir les autres. Par exemple

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}.$$

Afin de réécrire ce système sous une forme **découplée**, on peut procéder à un changement d'inconnue :

$$\begin{cases} w = x + y \\ z = x - y \end{cases} \quad \text{qui satisfait l'équation **découplée**} \quad \begin{cases} w' = 3w \\ z' = -z \end{cases},$$

autrement dit

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{qui satisfait} \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}.$$

La solution de est donc

$$\begin{cases} w(t) = e^{3t} w(0) \\ z(t) = e^{-t} z(0) \end{cases} \quad \text{autrement dit} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} (e^{3t} + e^{-t}) x(0) + \frac{1}{2} (e^{3t} - e^{-t}) y(0) \\ y(t) = \frac{1}{2} (e^{3t} - e^{-t}) x(0) + \frac{1}{2} (e^{3t} + e^{-t}) y(0) \end{cases}.$$

La technique du cours faisant intervenir l'exponentielle de matrice permet de systématiser les calculs précédents.

Ici P est la matrice de passage permettant de diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en la matrice diagonale D .

2. Un exemple classique d'équation admettant des solutions non-globales est *l'équation de Riccati* :

$$x' = x^2, \quad x_0 > 0, \quad (1)$$

dont la solution est $x(t) = (x_0^{-1} - t)^{-1}$ pour tout $t < x_0^{-1}$.

Remarque concernant le lemme de Grönwall et l'explosion en temps fini :

Rappelons que le lemme de Gronwall affirme que si la solution maximale $x(t) \geq 0$ (où $t \in I$) d'une équation différentielle vérifie l'inégalité différentielle **linéaire**

$$\forall t \in I, \quad x'(t) \leq C(1 + x(t)), \quad x_0 > 0$$

alors on déduit une borne sur $x(t)$ garantissant que la solution est **globale** par le théorème d'explosion/sortie de tout compact (i.e. $I = \mathbb{R}$) :

$$x(t) \leq e^{Ct}(x_0 + 1).$$

Dans le cas contraire, si x ne satisfait pas de telle inégalité différentielle linéaire, par exemple l'équation

$$x' = x^{1+\theta}, \quad x_0 > 0$$

explose en temps fini dès que $\theta > 0$, même si θ est très petit. Notons que pour résoudre explicitement cette équation, on effectue le changement d'inconnue $y(t) = x(t)^{-\theta}$ qui satisfait alors l'équation $y' = -\theta$. On en déduit donc $y(t) = y_0 - \theta t$ pour $t < y_0/\theta$ et ainsi

$$\forall t < \frac{1}{\theta x_0^\theta}, \quad x(t) = \left(\frac{1}{x_0^\theta} - \theta t \right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Exercice 2 On s'intéresse à l'équation $(x, y)' = f(x, y) = (\sin x, \cos x)$ où $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et donc Cauchy-Lipschitz garantit l'existence d'une unique solution maximale pour toute donnée initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Cependant, **cela ne garantit pas que les solutions sont globales**, un argument supplémentaire est nécessaire (voir Eq. (1)).

1. Les solutions sont globales, c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}$ tout entier car f est globalement Lipschitz (par les accroissements finis et le fait que Df est bornée). Une autre justification possible est de remarquer que f est bornée.
2. Il faut montrer que chaque droite $\Delta_k := \{(k\pi, s) : s \in \mathbb{R}\}$ est une trajectoire, c'est-à-dire qu'il existe un (et donc tous) $(x_0, y_0) \in \Delta_k$ tel que la solution maximale associée $(x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie

$$(x, y)(\mathbb{R}) = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\} = \Delta_k.$$

Puisque $x(t) := k\pi$ vérifie $x' = 0 = \sin x$ et $y(t) := (-1)^k t$ vérifie $y'(t) = (-1)^k = \cos x$, on en conclut que (x, y) est bien une solution telle que $(x_0, y_0) = (k\pi, 0) \in \Delta_k$, de plus $(x, y)(\mathbb{R}) = \Delta_k$.

Remarque : Montrer que $x'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ justifie uniquement l'inclusion $(x, y)(\mathbb{R}) \subset \Delta_k$, il faut aussi justifier que tous les points de Δ_k sont atteints.

3. Supposons que $(x_0, y_0) \in B_k$, et par l'absurde que $(x, y)(t_1) \notin B_k$ pour un $t_1 \in \mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un $t_{1/2} \in]0, t_1]$ tel que $(x, y)(t_{1/2}) \in \Delta_j$ (où $j = k-1$ ou k). Dans ce cas, par unicité des solutions maximales (Cauchy-Lipschitz), on en déduit $(x, y)(\mathbb{R}) = \Delta_j$, ce qui contredit $(x_0, y_0) \in B_k$.
4. Soit $(x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une solution maximale et notons $(\tilde{x}, \tilde{y}) := S(x, y)$, montrons que $(\tilde{x}, \tilde{y}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est également une solution. En effet, en utilisant l'impairité du sinus et la parité du cosinus.

$$\begin{cases} \tilde{x}' = -x' = -\sin x = \sin(-x) = \sin(\tilde{x}), \\ \tilde{y}' = y' = \cos(x) = \cos(-x) = \cos(\tilde{x}), \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\tilde{x}, \tilde{y})' = f(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

De façon similaire, en posant $(\hat{x}, \hat{y}) := T(x, y)$, on a par la 2π -périodicité du sinus et cosinus

$$\begin{cases} \hat{x}' = x' = \sin(x) = \sin(x + 2\pi) = \sin(\hat{x}), \\ \hat{y}' = y' = \cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(\hat{x}), \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\hat{x}, \hat{y})' = f(\hat{x}, \hat{y}).$$

5. Rappelons qu'un **portrait de phase** (pour une équation autonome dans $\mathbb{R}^2$) est la représentation graphique de trajectoires. En pratique, lorsqu'on a identifié plusieurs catégories de solutions ayant des comportements différents, on représente quelques unes de chaque catégorie sur le portrait de phase.

Si (x, y) est une solution dans B_{2k} , alors d'après la question 4 (par T), $(x - 2k\pi, y)$ est une solution dans B_0 . Les trajectoires contenues dans les bandes paires sont donc les mêmes que celles contenues dans B_0 à translation près.

De même, si (x, y) est une solution dans B_{2k-1} , alors $(x - 2k\pi, y)$ est une solution dans B_{-1} , de plus d'après la question 4 (par S) $(-x + 2k\pi, y)$ est une solution dans B_0 .

6. Rappelons que H est une **intégrale première** de l'équation si toute solution (x, y) est telle que $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}(H(x, y)) = d_{(x, y)}H \cdot f(x, y) = \langle \nabla H(x, y), f(x, y) \rangle = 0.$$

Ici, on considère la fonction $H(x, y) = y - \ln(\sin x)$ pour $(x, y) \in B_0 =]0, \pi[\times \mathbb{R}$. Son gradient est donné par

$$\nabla H(x, y) = \left(-\frac{\cos x}{\sin x}, 1 \right)$$

et donc

$$\langle \nabla H(x, y), f(x, y) \rangle = \left\langle \left(-\frac{\cos x}{\sin x}, 1 \right), (\sin x, \cos x) \right\rangle = -\cos x + \cos x = 0.$$

Ainsi, H est une intégrale première de l'équation dans la bande B_0 .

7. D'après la question 5, il suffit de comprendre le comportement des solutions dans B_0 pour comprendre le comportement des solutions dans chaque bande B_k . Il reste encore le problème de savoir décrire les solutions dans B_0 , ce qui est permis par la question 6 : puisque H est une intégrale première, on a que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0) =: H_0.$$

On en déduit donc que

$$y(t) = \ln(\sin x(t)) + H_0$$

ainsi, en notant $I := x(\mathbb{R})$, la trajectoire/orbite de (x, y) est donnée par le graphe de $z \in I \mapsto g(z) = \ln(\sin z) + H_0$:

$$(x, y)(\mathbb{R}) = \{(z, g(z)) : z \in I\}.$$

Nous sommes donc ramenés à deux sous-problèmes : (a) déterminer I , et (b) établir plusieurs propriétés de g pour être en mesure de tracer son graphe.

- (a) Puisque $x'(t) = \sin x(t)$ et $x(t) \in]0, \pi[$ on en déduit que $x'(t) > 0$, ainsi $x(t)$ converge lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. De plus, cette équation n'admet aucun équilibre dans $]0, \pi[$, donc $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ et $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pi$, ainsi $I =]0, \pi[$.
- (b) Dû à la symétrie du sinus par rapport à $x = \frac{\pi}{2}$, la fonction g est elle aussi symétrique :

$$\forall h \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right], \quad g\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = g\left(\frac{\pi}{2} - h\right),$$

de plus $\sin(0) = 0$ donc

$$g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\infty,$$

enfin, g est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et atteint son maximum en $\frac{\pi}{2}$ et vaut H_0 .

On est à présent en mesure de tracer le graphe de g , c'est-à-dire les trajectoires des équations dans B_0 et par la question 5 les trajectoires de toutes solutions.

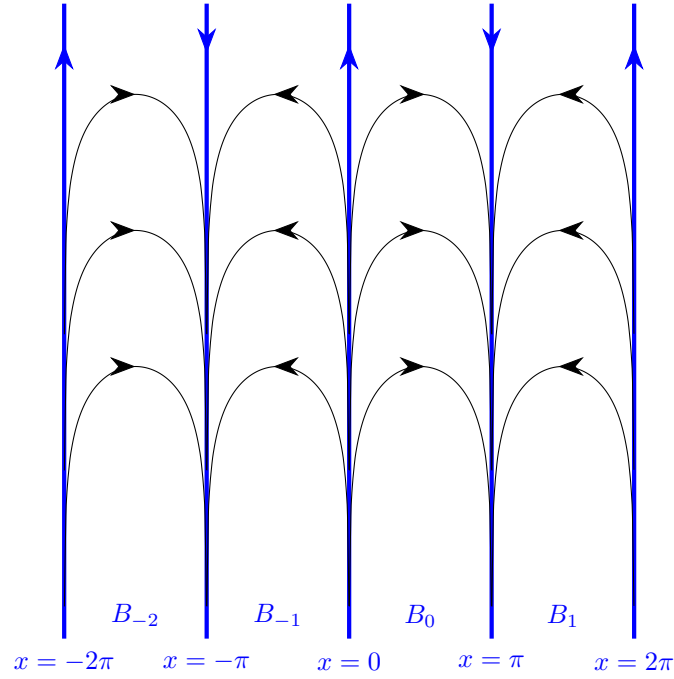


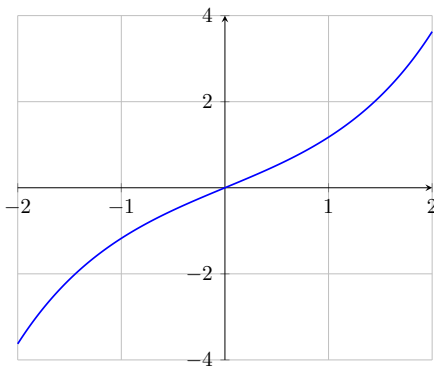
FIGURE 1 – Portrait de phase de $(x, y)' = (\sin(x), \cos(x))$.

Exercice 3 Commençons par quelques rappels de trigonométrie hyperbolique : les cosinus et sinus hyperboliques sont donnés par

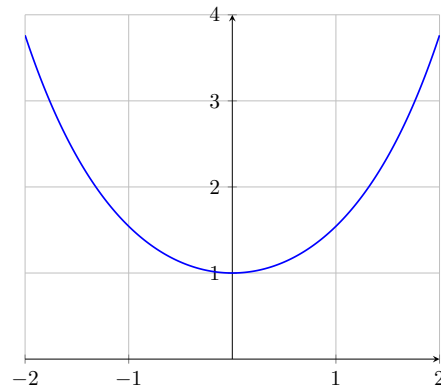
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Par conséquent, on a les relations différentielles (contrairement aux cosinus et sinus classiques)

$$\cosh' x = + \sinh x \quad \text{et} \quad \sinh' x = \cosh x$$



(a) $\sinh x$



(b) $\cosh x$

1. Il suffit d'introduire une variable artificielle $y = x'$ et considérer le système **équivalent**

$$(x, y)' = (y, x'') = (y, kx' - \sinh x) = (y, ky - \sinh x)$$

que l'on qualifie de **système augmenté** (on réduit l'ordre de l'équation mais on **augmente** la dimension).

2. Notons **qu'il n'est pas nécessaire d'étudier les isoclines I_0 et I_∞** pour déterminer les équilibres ; il est plus rapide (en particulier au niveau de la rédaction) de résoudre directement le système

$$\begin{cases} y = 0 \\ ky - \sinh x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sinh x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

où on a utilisé le fait que $\sinh$ est une bijection de $\mathbb{R}$ telle que $\sinh(0) = 0$. Étudions à présent la nature de l'unique équilibre $(0, 0)$. Commençons par calculer la différentielle de f en $(0, 0)$:

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(0) \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}.$$

Puisqu'on est face à une matrice réelle 2×2 , elle admet soit deux valeurs propres réelles λ_+ et λ_- , ou bien deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_\pm = a \pm ib$. Nous sommes face à un **puits** si $\Re(\lambda_\pm) < 0$ et une **source** si $\Re(\lambda_\pm) > 0$. Nous pouvons faire deux observations :

- $\lambda_+ \times \lambda_- = \det Df(0, 0) = 1$ donc les valeurs propres $\lambda_\pm$ sont non-nulles et de même signes, de plus $\lambda_+ = \lambda_-^{-1}$.
- $\lambda_+ + \lambda_- = \text{tr} Df(0, 0) = k$.

On en déduit que $\Re(\lambda_+)$ et $\Re(\lambda_-)$ sont du même signe que k (puisque si elles sont complexes conjuguées $\Re(\lambda_\pm) = \frac{k}{2}$, autrement $\lambda_+ + \lambda_+^{-1} = \lambda_- + \lambda_-^{-1} = k$), ce qui nous permet de conclure concernant la nature du point fixe :

- Si $k > 0$, l'équilibre est une source (hyperbolique).
- Si $k < 0$, l'équilibre est un puits (hyperbolique).
- Si $k = 0$, alors $\Re(\lambda_\pm) = 0$ mais comme $\lambda_+ \lambda_- = 1$, on en déduit que $\lambda_\pm = \pm ia$ où $a^2 = 1$. Ainsi, $\lambda_\pm = \pm i$, l'équilibre est donc un **centre** (pas hyperbolique).

Remarque concernant un calcul direct de valeurs propres : Cette approche est plus fastidieuse mais a souvent été utilisée dans la première session du DS2. Le polynôme caractéristique est donné par

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & k - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(k - \lambda) + 1 = \lambda^2 - k\lambda + 1$$

et dont les racines sont données par

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \left(k \pm i\sqrt{4 - k^2} \right) \quad \text{si } |k| \leq 2,$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \left(k \pm \sqrt{k^2 - 4} \right) \quad \text{si } |k| \geq 2.$$

Dans le second cas, **il est important de justifier que $\sqrt{k^2 - 4}$ ne compense pas le signe de k** . Puisque $\sqrt{k^2 - 4} < |k|$ on en déduit que $k + \sqrt{k^2 - 4}$ est du même signe que k . La conclusion reste donc la même.

3. On suppose désormais que $k = -1$. Considérons une solution maximale $(x, y) : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- (a) D'une part, on a que $\nabla H(x, y) = (2 \sinh x, 2y)$ et donc

$$\frac{d}{dt} (H(x, y)) = 2y \sinh x - 2y(y + \sinh x) = -2y^2 \leq 0.$$

Ainsi, $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est décroissante.

- (b) Il suffit de montrer (voir Figure 3) que $H(u, v) \xrightarrow{\|(u, v)\| \rightarrow \infty} +\infty$, ce qui est le cas. En effet, cela implique que pour $R > 0$ assez grand on a $\|(u, v)\| > R \Rightarrow H(u, v) > h$, autrement dit

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : H(u, v) \leq h\} \subset B(0; R).$$

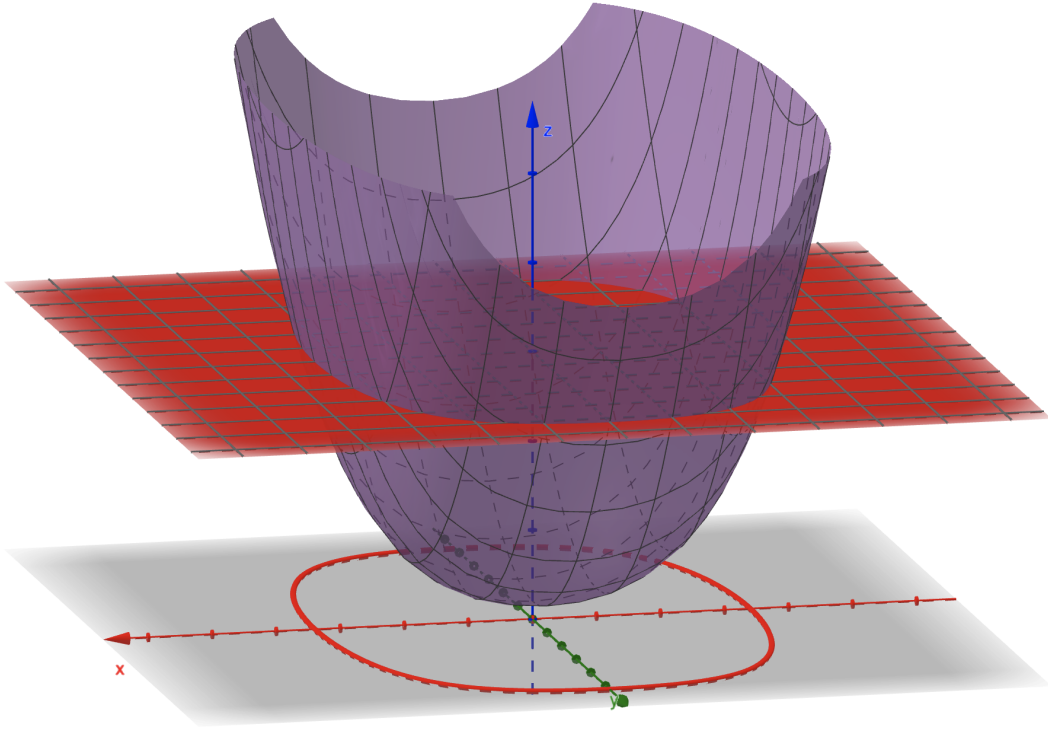


FIGURE 3 – Ensemble de niveau $\{H(u, v) \leq h\}$.

Puisque H est continue, $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : H(u, v) \leq h\}$ est de plus fermé, ainsi cet ensemble est compact.

Puisque $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est décroissante, on a donc que

$$(x, y)(t) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : H(u, v) \leq H(x_0, y_0)\} \quad \text{compact.}$$

On en déduit par le lemme de sortie de tout compacts/critère d'explosion que $t_+ = +\infty$.

(c) D'après la question (a) et le fait que $\cosh x \geq 0$, on en déduit

$$\frac{d}{dt}(H(x, y)) = -2y^2 \geq -2(y^2 + \cosh x) = -2H(x, y).$$

Il s'agit à présent d'appliquer une forme du lemme de Grönwall en «remontant le temps» :

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}H(x, y)) \geq 0,$$

et donc en intégrant en $t \in [\tau, 0]$ pour $\tau \in]t_-, 0[$, on obtient

$$\forall \tau \in]t_-, 0[, \quad H(x_0, y_0) - e^{2\tau}H(x, y) \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad H(x, y) \leq e^{-2\tau}H(x_0, y_0).$$

(d) En appliquant le théorème d'explosion, on conclut de la question précédente que $t_- = -\infty$.

(e) D'après la question (a), on a que $\frac{d}{dt}(H(x, y)) = -2y^2$, mais puisque rien n'exclut a priori que $y(t) = 0$ pour certains temps t , on ne peut pas affirmer que $\frac{d}{dt}(H(x, y)) < 0$, et donc H n'est pas une fonctionnelle de Lyapunov.

La fonctionnelle L règle ce «faux problème» en ajoutant le terme supplémentaire xy :

$$\nabla(xy) = (y, x) \quad \text{ainsi} \quad \langle \nabla(xy), f(x, y) \rangle = y^2 - xy - x \sinh x \leq y^2 - xy - x^2$$

ce qui permet de récupérer le terme $-x^2$, et donc (par réduction de Gauss)

$$\langle \nabla L(x, y), f(x, y) \rangle \leq -x^2 - y^2 + xy = -\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}y^2.$$

Ainsi, on a pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ que $\frac{d}{dt}(L(x, y)) < 0$, c'est-à-dire que L est une fonction de Lyapunov.

- (f) D'après un résultat du cours, (x, y) ne peut admettre comme point d'adhérence qu'un équilibre. L'unique équilibre étant $(0, 0)$, et (x, y) étant à valeurs dans un compact, on en déduit que (x, y) converge lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers l'unique équilibre $(0, 0)$.